

Tópicos de Física Estatística - IFUSP - 2018
Introdução à técnica de grupo de renormalização no espaço dos
momentos
Notas de aula - Silvio Salinas - 29/10/2018

- 1. Modelo gaussiano**
- 2. Renormalização do modelo gaussiano**
- 3. Renormalização no espaço dos momentos**

A primeira parte dessas notas de aula é sobre o “modelo gaussiano”, versão solúvel mas muito simplificada do modelo de Ising, proposta por Mark Kac em 1947 (ver as reminiscências de Kac em *Physics Today* **17**, #10, 40, 1964).

A função de partição de um modelo de Ising pode ser escrita como uma soma sobre configurações,

$$Z_I = \sum_{\{\sigma_r\}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H \sigma_r \right\}, \quad (1)$$

em que $\sigma_r = \pm 1$ é uma variável de spin no sítio \vec{r} de uma rede cristalina, a primeira soma é sobre as configurações de spins, e as outras duas somas são sobre os sítios da rede. A interação de troca, $J_{r,r'} = J(|\vec{r}' - \vec{r}|)$, pode ser bem geral, mas deve depender apenas da distância entre dois sítios da rede; H é um campo externo aplicado e β é o inverso da temperatura. Para simplificar a notação, desde que não haja ambiguidades, vamos omitir os símbolos de vetor nas posições dos sítios da rede.

Com o objetivo de contornar as dificuldades de uma soma discreta sobre configurações, Mark Kac propôs que as variáveis de spin fossem contínuas, assumindo valores entre $-\infty$ e $+\infty$, mas com um peso gaussiano para assegurar a convergência das integrais. A função de partição desse “modelo gaussiano” é dada por

$$Z_G = \prod_r \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_r^2 \right) \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H \sigma_r \right\}. \quad (2)$$

A forma quadrática do integrando pode ser diagonalizada através de uma transformação de Fourier. Esse problema é solúvel em qualquer dimensão, mesmo na presença de campo externo, mas o comportamento crítico é do tipo campo médio. Além disso, como há uma “catástrofe de baixas temperaturas”, pois as integrais divergem abaixo de determinada temperatura crítica, houve pouco interesse pelo modelo gaussiano durante algum tempo. Mas o modelo se tornou útil novamente quando se percebeu que o próprio modelo de Ising tem um comportamento crítico do tipo campo médio acima de $d = 4$ dimensões. Tornou-se então interessante tratar perturbativamente uma versão contínua do modelo de Ising, com base no parâmetro pequeno $\epsilon = 4 - d$, em torno da solução gaussiana em quatro dimensões.

Na primeira seção dessas notas definimos o modelo gaussiano, introduzimos transformadas de Fourier na rede, e obtemos resultados exatos para as funções termodinâmicas e para as formas assintóticas das correlações de pares. Esperamos que essas notas sirvam como introdução elementar a conceitos úteis em física estatística e teoria de campos.

Devido às limitações do modelo gaussiano, o próprio Mark Kac propôs um modelo alternativo, com variáveis de spin contínuas, mas submetidas a um vínculo global ao invés dos vínculos gaussianos individuais. A função de partição desse “modelo esférico” é dada por

$$Z_E = \prod_r \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] \delta \left(\sum_r \sigma_r^2 - N^d \right) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H \sigma_r \right\}, \quad (3)$$

em que o argumento da função delta de Dirac contém o “vínculo esférico” (N^d é o número total de sítios de uma rede d -dimensional). Introduzindo uma representação integral da função delta e recorrendo à representação de Fourier, é possível reduzir o problema a uma única integral que pode ser resolvida no limite termodinâmico (por uma aplicação judiciosa do método do ponto de sela). Esse modelo esférico também é solúvel em qualquer dimensão, mesmo na presença de campo externo, produzindo expoentes críticos que diferem das previsões usuais de campo médio (mas que também diferem das experiências). Apesar de um tanto distante da realidade física, o modelo esférico tem sido utilizado como excelente laboratório para testes das teorias sobre o comportamento crítico.

Na segunda seção, vamos mostrar que o modelo gaussiano é particularmente adequado para um cálculo de grupo de renormalização no espaço dos momentos, preservando graus de liberdade associados a pequenos momentos

(grandes comprimentos de onda).

Introduzimos em seguida o hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson, cujo comportamento crítico deve pertencer à mesma classe de universalidade do modelo de Ising. Desenvolvemos então um cálculo perturbativo, baseado na expansão de Wilson-Fisher em torno de $d = 4$ dimensões, para obter o expoente crítico térmico do hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson em primeira ordem em $\epsilon = 4 - d > 0$.

Esse texto deve ser lido com boa dose de cautela, pois ainda pode haver um certo número de errinhos!

1 Modelo gaussiano

Utilizando a notação conhecida da física estatística, a função de partição do modelo gaussiano pode ser escrita na forma

$$Z_G = \left[\prod_r \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] \exp [\overline{\mathcal{H}}_G], \quad (4)$$

com o hamiltoniano efetivo

$$\overline{\mathcal{H}}_G = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H_r \sigma_r - \sum_r \frac{1}{2} \sigma_r^2, \quad (5)$$

em que estamos aplicando um campo externo H_r dependendo do sítio da rede. As somas são sobre os sítios de uma rede d -dimensional e o parâmetro de troca $J_{r,r'} = J(|r' - r|)$ depende apenas da distância de separação entre os sítios \vec{r} e \vec{r}' .

Adotando condições periódicas de contorno, introduzimos a transformada discreta de Fourier,

$$\sigma_r = \frac{1}{N^{d/2}} \sum_q \hat{\sigma}_q \exp(iqr), \quad (6)$$

em que o vetor q pertence à primeira zona de Brillouin.

Usando a condição de ortogonalização,

$$\sum_r \exp[i(q + q')r] = N^d \delta_{q,-q'}, \quad (7)$$

é fácil mostrar que

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}_G &= \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H_r \sigma_r - \sum_r \frac{1}{2} \sigma_r^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_q \left[\hat{K}(q) - 1 \right] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \sum_q \hat{\sigma}_q \hat{L}_{-q},\end{aligned}\quad (8)$$

com as definições

$$\hat{K}(q) = \sum_h \beta J(|h|) \exp(-iqh) \quad (9)$$

e

$$\hat{L}_q = \frac{1}{N^{d/2}} \sum_r \beta H_r \exp(-iqr) \quad (10)$$

Vamos agora registrar algumas observações:

(i) Considerando (por simplicidade) um caso unidimensional, com parâmetro de rede unitário, as condições periódicas de contorno implicam que

$$\exp(iqN) = 1. \quad (11)$$

Portanto, supondo que o número N de sítios seja par, a primeira zona de Brillouin é definida pela escolha

$$q = 0, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm 2\frac{2\pi}{N}, \dots, \pm \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \frac{2\pi}{N}, \pi. \quad (12)$$

Essa escolha, que deve ser conferida, não é necessária, mas é muito conveniente. Note que existem sempre N valores de q .

(ii) A variável de spin σ_r é real. Levando em conta a escolha da zona de Brillouin, temos então

$$\sum_q \hat{\sigma}_q \exp(iqr) = \sum_q \hat{\sigma}_q^* \exp(-iqr) = \sum_q \hat{\sigma}_{-q}^* \exp(iqr), \quad (13)$$

ou seja,

$$\hat{\sigma}_q = \hat{\sigma}_{-q}^*, \quad (14)$$

indicando que a introdução de variáveis de spin complexas não altera o número de graus de liberdade do sistema. É conveniente escrever $\hat{\sigma}_q$ em termos das partes real e imaginária,

$$\hat{\sigma}_q = \frac{1}{\sqrt{2}}(R_q + iI_q), \quad \forall q \neq 0, \quad (15)$$

de onde vem que

$$R_q = R_{-q}; \quad I_q = -I_{-q}. \quad (16)$$

Note que $\hat{\sigma}_0 = R_0$ é uma variável real.

(iii) Usando essas definições, temos

$$\sum_r \sigma_r^2 = \sum_q \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} = R_0^2 + \sum_{q \neq 0} \frac{1}{2} (R_q^2 + I_q^2), \quad (17)$$

ou seja,

$$\sum_r \sigma_r^2 = R_0^2 + \sum_{q>0} (R_q^2 + I_q^2), \quad (18)$$

em que a soma é feita sobre a "metade positiva" da primeira zona de Brillouin. A partir dessas considerações justificamos a transformação jacobiana

$$\left[\prod_r \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] (\dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} dR_0 \left[\prod_{q>0} \int_{-\infty}^{+\infty} dR_q \int_{-\infty}^{+\infty} dI_q \right] (\dots). \quad (19)$$

Esse resultado pode ser verificado através do cálculo direto da integral

$$\begin{aligned} & \left[\prod_r \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] \exp \left[-\sum_r \sigma_r^2 \right] = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dR_0 \left[\prod_{q>0} \int_{-\infty}^{+\infty} dR_q \int_{-\infty}^{+\infty} dI_q \right] \exp \left[-R_0^2 - \sum_{q>0} (R_q^2 + I_q^2) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Na presença de um campo uniforme, $H_r = H$ para todo r , fica trivial realizar as integrações gaussianas e escrever a função de partição do modelo gaussiano,

$$Z_G = \exp \left\{ \frac{N^d H^2 \beta^2}{2 [1 - \widehat{K}(0)]} \right\} \prod_q \left[\frac{2\pi}{1 - \widehat{K}(q)} \right]^{1/2}, \quad (21)$$

em que a produtória é sobre todos os pontos da primeira zona de Brillouin. É importante conferir com cuidado os termos dessa expressão; note que $\widehat{K}(q)$ é sempre real, e que $\widehat{K}(q) = \widehat{K}(-q)$.

Nesse ponto o problema está praticamente resolvido. A partir de Z_G podemos obter o comportamento termodinâmico do sistema. No entanto, essa forma de Z_G indica que o modelo gaussiano não faz sentido para

$$1 - \widehat{K}(q) = 1 - \beta \widehat{J}(q) < 0, \quad (22)$$

ou seja, para

$$k_B T < \max_q \widehat{J}(q). \quad (23)$$

Portanto, há uma temperatura limite, ou temperatura crítica T_c , dada por

$$k_B T_c = \max_q \widehat{J}(q). \quad (24)$$

1.1 Modelo gaussiano ferromagnético numa rede hipercúbica

Restringindo o problema a um modelo ferromagnético com interações $J > 0$ entre primeiros vizinhos numa rede hipercúbica em d dimensões, com parâmetro de rede unitário, temos

$$\widehat{K}(q) = \sum_h \beta J (|h|) \exp(-iqh) = 2\beta J \sum_{j=1}^d \cos q_j, \quad (25)$$

ou seja,

$$\widehat{K}(q) = 2\beta J d - \beta J q^2 + O(q^4). \quad (26)$$

Portanto, $\widehat{K}(q)$ assume o valor máximo, $\widehat{K}(0) = 2\beta J d$, para $q = 0$.

A magnetização por spin é dada por

$$m = \frac{1}{\beta N^d} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z_G = \frac{\beta H}{1 - \widehat{K}(0)}, \quad (27)$$

que se anula para $H = 0$ (e não existe abaixo de T_c). Temos então a suscetibilidade magnética,

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{\beta}{1 - \widehat{K}(0)} = \frac{\beta}{1 - 2\beta Jd} = \frac{1}{k_B T - 2Jd}, \quad (28)$$

que diverge, com o expoente $\gamma = 1$, na temperatura crítica $T_c = 2Jd/k_B$.

De acordo com as propostas de homogeneidade das funções termodinâmicas, nas vizinhanças do ponto crítico, a magnetização contra o campo pode ser representada por uma curva universal (desde que sejam feitos gráficos de m/t^β contra $H/t^{\beta+\gamma}$, em que $t = (T - T_c)/T_c$ e os expoentes β e γ assumem os valores usuais de campo médio).

A campo nulo, a energia interna por spin é dada por

$$u = -\frac{1}{2N^d} \sum_q \frac{\widehat{J}(q)}{1 - \widehat{K}(q)}. \quad (29)$$

No limite termodinâmico, temos

$$u = -\frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d q \frac{\widehat{J}(q)}{1 - \widehat{K}(q)}. \quad (30)$$

que tem uma estrutura semelhante às formas que aparecem na solução do modelo de Ising na rede quadrada. Essa integral deve ser feita na zona de Brillouin. Certamente pode haver problemas nas vizinhanças de $q = 0$. Por exemplo, na temperatura crítica devemos analisar o comportamento em $q = 0$ da integral

$$\int_0^1 q^{d-1} dq \frac{1}{q^2} = \frac{1}{d-2} q^{d-2} \Big|_0, \quad (31)$$

que diverge para $d < 2$ (pois não tem sentido uma energia interna infinita).

O calor específico a campo nulo é dado por

$$c_{H=0} = \frac{1}{2} k_B \frac{1}{N^d} \sum_q \left[\frac{\widehat{K}(q)}{1 - \widehat{K}(q)} \right]^2. \quad (32)$$

Para analisar o comportamento crítico, transformamos a soma numa integral e retemos apenas os termos dominantes, para q pequeno, no numerador e no denominador. Temos então a forma assintótica

$$c_{H=0} \sim \frac{1}{2} k_B \frac{1}{N^d} \frac{N^d}{(2\pi)^d} \int C_d q^{d-1} dq \frac{(2\beta Jd)^2}{[\Delta T + \beta Jq^2]}, \quad (33)$$

em que

$$\Delta T = 1 - 2\beta Jd \quad (34)$$

vai a zero no ponto crítico, e a constante C_d incorpora o resultado de integrações angulares. Fazendo uma pequena manipulação algébrica, ainda é fácil mostrar que

$$c_{H=0} \sim t^{\frac{d}{2}-2}, \quad (35)$$

ou seja, o calor específico a campo nulo comporta-se com o expoente $\alpha = 2 - d/2$ (com $\alpha = 0$ quando $d = 4$). O calor específico certamente não diverge para $d \geq 4$.

1.2 Correlações gaussianas

As correlações de dois pontos (spin-spin) são dadas por

$$\Gamma(r, r') = \langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle = \frac{1}{N^d} \sum_q \exp[iq \cdot r + iq' \cdot r'] \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle, \quad (36)$$

em que, por simplicidade, não estamos utilizando a notação vetorial.

Levando em conta a representação das variáveis complexas de spin em termos das componentes reais e imaginárias, dada pela eq. (15), temos

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_{q'} + iR_q I_{q'} + iI_q R_{q'} - I_q I_{q'} \rangle. \quad (37)$$

Como não há acoplamentos entre as variáveis R_q e I_q , temos uma expressão mais simples,

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_{q'} \rangle - \frac{1}{2} \langle I_q I_{q'} \rangle. \quad (38)$$

Também é fácil verificar que

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_q \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_q \rangle - \frac{1}{2} \langle I_q I_q \rangle = 0, \quad (39)$$

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_{-q} \rangle - \frac{1}{2} \langle I_q I_{-q} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle I_q^2 \rangle = \langle R_q^2 \rangle \quad (40)$$

e

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = 0 \quad \text{para } q' \neq -q. \quad (41)$$

Resumindo, podemos escrever

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle \delta_{q', -q} \quad (42)$$

e

$$\langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle = \frac{1}{N^d} \sum_q \exp[iq \cdot (r - r')] \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle, \quad (43)$$

ficando bem evidente a simetria translacional. Resta agora notar que

$$\hat{\Gamma}(q) = \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle = \langle R_q^2 \rangle = \frac{1}{1 - \hat{K}(q)}, \quad (44)$$

que é a expressão conhecida como “propagador gaussiano” (verificar esse cálculo).

Finalmente podemos escrever as correlações de dois pontos,

$$\Gamma(r) = \Gamma(r, 0) = \frac{1}{N^d} \sum_q \exp(iq \cdot r) \frac{1}{1 - \hat{K}(q)}. \quad (45)$$

No limite termodinâmico, para um ferromagneto na rede hipercúbica com interações de primeiros vizinhos, temos

$$\Gamma(r) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{\exp(iq \cdot r)}{1 - 2\beta J (\cos q_1 + \cos q_2 + \dots + \cos q_d)}, \quad (46)$$

que é conhecida como uma função de Green na rede (e que lembra expressões obtidas no contexto das soluções exatas para o modelo de Ising).

Nas vizinhanças da criticalidade, com $\Delta T = 1 - 2\beta J d \sim 0$, a equação (46) assume uma forma bem mais simples, restrita aos termos de pequenos momentos (grandes comprimentos de onda) no denominador do integrando. Escrevemos então a forma assintótica

$$\Gamma(r) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{\exp(iq \cdot r)}{\Delta T + \beta J q^2 + \dots}, \quad (47)$$

que ainda pode ser simplificada se a zona de Brillouin for transformada num objeto com simetria esférica, e a variável radial for tomada de 0 a ∞ (pois

o comportamento crítico assintótico é dominado pelos pequenos valores do momento q). Note que o elemento de volume em d dimensões é dado por

$$d^d q = q^{d-1} \sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1}, \quad (48)$$

e os limites de integração vão de 0 a π para θ_1 e de 0 a 2π para $\theta_2, \theta_3, \dots$. Para $d \geq 4$, não há o menor problema com essas integrais.

Pelo menos em três dimensões, $d = 3$, nas vizinhanças da criticalidade (isto é, com ΔT pequeno, mas $\Delta T \neq 0$), é fácil obter um resultado analítico. Nesse caso, descartando termos de ordem q^4 no denominador, temos a forma assintótica

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &\sim \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi q^2 dq \frac{\exp(iqr \cos \theta)}{\Delta T + \beta J q^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi q^2 \left(\frac{\sin qr}{qr} \right) \frac{1}{\Delta T + \beta J q^2} dq. \end{aligned} \quad (49)$$

Na região assintótica (com $\Delta T \rightarrow 0$), podemos alterar os limites de integração. Então temos

$$\Gamma(r) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \frac{\sin(qr)}{qr} \frac{1}{t + q^2} dq, \quad (50)$$

que é uma integral dominada pelo polos complexos, $q = \pm i\sqrt{t}$. Recorrendo às técnicas usuais de integração complexa, obtemos finalmente a forma assintótica (para $t \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$)

$$\Gamma(r) \sim \frac{1}{r} \exp\left[-\frac{r}{\xi}\right], \quad (51)$$

em que

$$\xi \sim t^{-1/2} \quad (52)$$

é o comprimento de correlação, associado ao expoente crítico $\nu = 1/2$. Ainda em três dimensões, exatamente na temperatura crítica, isto é, fazendo $\Delta T = 0$, temos

$$\Gamma(r) \sim \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\beta J} \int_0^\pi dq \int_{-1}^1 dx \exp(iqrx) \sim \frac{1}{r}, \quad (53)$$

de onde vem o expoente $\eta = 0$ associado ao decaimento das correlações críticas.

Não é difícil mostrar, pelo menos qualitativamente, que esses resultados ainda permanecem válidos para $d \geq 4$, com a forma

$$\Gamma(r) \sim \frac{1}{r^{d-2}} \exp\left[-\frac{r}{\xi}\right] \quad (54)$$

em que $\xi \sim t^{-1/2}$ é um resultado famoso de campo médio, obtido em trabalhos pioneiros de Ornstein e Zernike.

O modelo gaussiano confirma então a ideia que nós temos das correlações críticas. Fora da criticalidade, as correlações decaem exponencialmente, com um comprimento característico de decaimento, que se torna cada vez maior ao nos aproximarmos do ponto crítico. Na criticalidade, não há comprimento característico, pois as correlações decaem com uma lei de potência.

Nota técnica: há um artifício atribuído a Montroll, no estudo de funções de Green na rede, que pode ser utilizado para obter resultados assintóticos em d dimensões. A ideia consiste em considerar a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_d \frac{\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r})}{q^2 + \kappa^2} \quad (55)$$

e utilizar a identidade

$$\int_0^{\infty} \exp(-\tau x) dx = \frac{1}{\tau} \quad (56)$$

para se livrar do denominador. Após manipulações elementares, obtemos a integral

$$I = \int_0^{\infty} dt \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} \exp\left(-\kappa^2 t - \frac{r^2}{4t}\right), \quad (57)$$

que pode ser expressa em termos de uma função de Bessel (ver a tabela de Gradshteyn e Ryzhik, Academic Press, edições a partir de 1965). Para $\kappa = 0$, é fácil obter um decaimento da forma $I \sim 1/r^{d-2}$, confirmando o expoente $\eta = 0$. Para $\kappa \neq 0$, mas $\kappa \rightarrow 0$, obtemos o resultado assintótico

$$I \sim (\kappa r)^{(d-3)/2} \exp(-\kappa r), \quad (58)$$

confirmando o valor de campo médio, $\nu = 1$.

2 Renormalização do modelo gaussiano

A idéia do cálculo de grupo de renormalização no espaço dos momentos consiste em integrar sobre as variáveis de spin associadas a valores grandes do vetor de onda q , fazendo uma operação que é equivalente à eliminação no espaço real dos graus de liberdade de curto alcance, dentro de bloquinhos de dimensão $b > 1$. Como os grandes comprimentos de onda não devem influenciar o comportamento crítico, o primeiro passo consiste em deformar a zona de Brillouin, que vai ser tomada como uma esfera de raio unitário. Em seguida essa esfera é dividida num caroço interno, de raio $1/b$, e numa coroa externa, com $1/b < q < 1$ (ver a figura 1). A integração é feita apenas sobre os graus de liberdade correspondentes a valores de q na coroa externa.

Usando uma notação mais compacta, a função de partição do modelo gaussiano pode ser escrita como

$$Z_G = \int [d\hat{\sigma}_q] \exp(\overline{\mathcal{H}}_G), \quad (59)$$

em que

$$\int [d\hat{\sigma}_q] (\dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} dR_0 \left[\prod_{q>0} \int_{-\infty}^{+\infty} dR_q \int_{-\infty}^{+\infty} dI_q \right] (\dots) \quad (60)$$

e

$$\overline{\mathcal{H}}_G = \frac{1}{2} \sum_q [2\beta Jd - 1 - \beta Jq^2 + O(q^4)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \beta H N^{d/2} R_0, \quad (61)$$

em que restringimos a análise a um modelo numa rede hipercúbica de dimensão d , com interações ferromagnéticas entre primeiros vizinhos, na presença de um campo externo uniforme. Como a integral se fatoriza, ainda podemos escrever

$$Z_G = \int^{<} [d\hat{\sigma}_q] \int^{>} [d\hat{\sigma}_q] \exp(\overline{\mathcal{H}}_0^{<} + \overline{\mathcal{H}}_0^{>}), \quad (62)$$

em que os símbolos $<$ ou $>$ referem-se a valores de q no caroço interno (dentro) ou na coroa externa (fora) da zona de Brillouin. A integração sobre os graus de liberdade correspondentes a valores de q na coroa externa produz uma função da temperatura bem comportada, pois as singularidades somente se manifestam nas vizinhanças de $q = 0$. Então temos

$$Z_G = f_0(T) \int^{<} [d\hat{\sigma}_q] \exp(\overline{\mathcal{H}}_0^{<}), \quad (63)$$

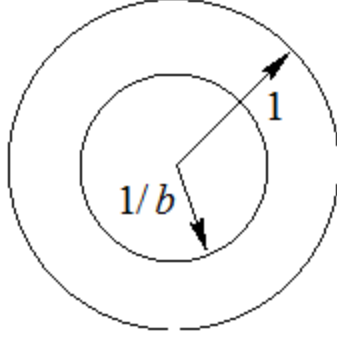


Figure 1: Zona de Brillouin ($q < 1$), dividida em um caroço interno ($q < 1/b$) e uma coroa externa ($1/b < q < 1$).

com o hamiltoniano transformado

$$\overline{\mathcal{H}}' = \overline{\mathcal{H}}_0^< = \frac{1}{2} \sum_{|q| < 1/b} [2\beta Jd - 1 - \beta Jq^2 + O(q^4)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \beta H N^{d/2} R_0. \quad (64)$$

Vamos tornar essa expressão um pouco mais interessante introduzindo a mudança de variáveis

$$\hat{\sigma}_q \rightarrow \frac{1}{(\beta J)^{1/2}} \hat{\sigma}_q \quad (65)$$

e a notação

$$r = \frac{2\beta Jd - 1}{\beta J}. \quad (66)$$

Como é comum na área, estamos usando a variável r ao invés de $t = (T - T_c)/T_c$. O ponto crítico corresponde a $r = 0$ (por favor, não confundam r com a posição). Temos então.

$$\overline{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \sum_{|q| < 1/b} [r - q^2 + \omega q^4 + O(q^6)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \frac{\beta H N^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R_0, \quad (67)$$

em que foi explicitamente incluído um termo de ordem q^4 (e a soma se realiza apenas “sobre o caroço” da zona de Brillouin). Transformado a soma numa

integral, temos

$$\bar{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \frac{N^d}{(2\pi)^d} \int_0^{1/b} d^d q [r - q^2 + \omega q^4 + O(q^6)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \frac{\beta H N^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R_0. \quad (68)$$

Para comparar com o hamiltoniano original, vamos restaurar os comprimentos e a magnitude das variáveis de spin através das transformações de escala

$$q' = bq \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{b} q' \quad (69)$$

e

$$\hat{\sigma}_{\frac{1}{b}q'} \rightarrow b \hat{\sigma}'_{q'}. \quad (70)$$

Essa última escolha, em particular, que mantém inalterado o coeficiente do termo em q^2 do hamiltoniano, vai preservar o decaimento das correlações críticas (isto é, o expoente crítico η). Num cálculo perturbativo de ordem mais baixa, como no esquema de Wilson-Fisher que vamos utilizar mais adiante, essa escolha ainda é suficiente.

Temos então o hamiltoniano transformado $\bar{\mathcal{H}}'$, com $(N')^d = (N/b)^d$ graus de liberdade, que deve ser comparado com o hamiltoniano inicial,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' [b^2 r - q'^2 + \omega b^{-2} q'^4 + O(q'^6)] \hat{\sigma}'_{q'} \hat{\sigma}'_{-q'} + \\ + b^{1+\frac{d}{2}} \frac{\beta H (N')^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R'_0, \end{aligned} \quad (71)$$

ou seja,

$$\bar{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \sum_{q'} [b^2 r - q'^2 + \omega b^{-2} q'^4 + O(q'^6)] \hat{\sigma}'_{q'} \hat{\sigma}'_{-q'} + b^{1+\frac{d}{2}} \frac{\beta H (N')^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R'_0, \quad (72)$$

em que a soma é feita sobre uma zona de Brillouin com $(N')^d = (N/b)^d$ pontos. Comparando com o hamiltoniano inicial, obtemos as relações de recorrência

$$r' = b^2 r, \quad (73)$$

$$\omega' = b^{-2} \omega \quad (74)$$

e

$$H' = b^{1+\frac{d}{2}} H. \quad (75)$$

de onde vem o ponto fixo gaussiano (de natureza trivial),

$$r^* = \omega^* = H^* = 0. \quad (76)$$

O termo em q^4 é irrelevante (também é fácil verificar que são irrelevantes todos os termos de ordem superior). Os expoentes térmico e magnético são dados por

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \frac{d}{2}, \quad (77)$$

de onde obtemos

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad \Delta = \beta + \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{d}{4}. \quad (78)$$

Para $d = 4$, recuperamos os valores usuais de campo médio.

3 Renormalização no espaço dos momentos

A presença de um termo de quarta ordem na expressão da energia livre de Landau é essencial para descrever o comportamento nas vizinhanças do ponto crítico de um ferromagneto simples. De acordo com a teoria de Landau, adotando a linguagem do ferromagnetismo uniaxial, podemos escrever uma densidade de energia livre,

$$f[m(r)] = a[m(r)]^2 + b[\nabla m(r)]^2 + c[m(r)]^4,$$

em que o termo de gradiente leva em conta a variação espacial, mas não quebra a simetria do sistema. Além disso, devemos ter $a = a_0(T - T_C)$, em que as constantes a_0 , b e c são positivas. A energia livre F do sistema é dada por uma integral no espaço,

$$F = \int d^3r f[m(r)] = \int d^3r \{a[m(r)]^2 + b[\nabla m(r)]^2 + c[m(r)]^4\}. \quad (79)$$

Essa energia livre de Landau pode ser vista como um “hamiltoniano de grão grosso” do sistema, em que já se eliminaram graus de liberdade atuando a curtíssimas distâncias. Podemos então utilizar a notação de integrais funcionais para escrever a função canônica de partição

$$Z = \int [dm(r)] \exp \left\{ -\beta \int d^3r f[m(r)] \right\}, \quad (80)$$

que é muito semelhante à expressão para o modelo gaussiano, mas com a adição de um termo extra de ordem quártica, que torna intransponível qualquer cálculo exato (a aproximação de campo médio seria uma mera “solução de ponto de sela” dessa integral). Levando em conta a universalidade do comportamento crítico, esse hamiltoniano de Ginzburg-Landau-Wilson deve ter o mesmo comportamento crítico do modelo de Ising.

Vamos então considerar o modelo gaussiano, com a adição de um termo quártico,

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_G + \bar{\mathcal{H}}_p, \quad (81)$$

em que $\bar{\mathcal{H}}_G$ é o hamiltoniano usual do modelo gaussiano (ferromagnético, numa rede cúbica d -dimensional, com interações de primeiros vizinhos) e o termo perturbativo, com o parâmetro $\tilde{u} > 0$, é dado por

$$\bar{\mathcal{H}}_p = -\tilde{u} \sum_r \sigma_r^4 = -\frac{\tilde{u}}{N^d} \sum_{q_1, q_2, q_3, q_4} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_4} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4, 0}. \quad (82)$$

Devido a esse termo, aparecem acoplamentos “dentro” e “fora” da esfera de raio $1/b$. Mantendo a mesma notação do caso gaussiano, temos

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0^< + \bar{\mathcal{H}}_0^> + \bar{\mathcal{H}}_p. \quad (83)$$

A função de partição é dada por

$$\begin{aligned} Z &= \int^< [d\hat{\sigma}_q] \int^> [d\hat{\sigma}_q] \exp \left[\bar{\mathcal{H}}_0^< + \bar{\mathcal{H}}_0^> + \bar{\mathcal{H}}_p \right] \\ &= \int^< [d\hat{\sigma}_q] \exp \left[\bar{\mathcal{H}}_0^< \right] \int^> [d\hat{\sigma}_q] \exp \left[\bar{\mathcal{H}}_0^> + \bar{\mathcal{H}}_p \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Definindo o valor esperado em relação a $\bar{\mathcal{H}}_0^>$,

$$\langle \exp [\bar{\mathcal{H}}_p] \rangle_{0>} = \frac{1}{Z_{0>}} \int^> [d\hat{\sigma}_q] \exp \left[\bar{\mathcal{H}}_0^> + \bar{\mathcal{H}}_p \right], \quad (85)$$

em que $Z_{0>}$, dada por

$$Z_{0>} = \int^> [d\hat{\sigma}_q] \exp \left[\bar{\mathcal{H}}_0^> \right], \quad (86)$$

é uma função bem comportada da temperatura, temos

$$Z = Z_{0>} \int^< [d\hat{\sigma}_q] \exp \left[\bar{\mathcal{H}}_0^< \right] \langle \exp [\bar{\mathcal{H}}_p] \rangle_{0>}, \quad (87)$$

que está na forma adequada para um tratamento perturbativo.

A idéia do esquema de grupo de renormalização de Wilson-Fisher consiste em:

- (i) fazer uma expansão perturbativa em torno da dimensão $d = 4$;
- (ii) adotar o parâmetro pequeno $\epsilon = 4 - d$;
- (iii) supor que \tilde{u} seja de ordem ϵ , e que o expoente η associado ao decaimento das correlações críticas seja de ordem ϵ^2 .

O tratamento perturbativo até segunda ordem se baseia na expansão de cumulantes

$$\langle \exp [\overline{\mathcal{H}}_p] \rangle = \exp \left\{ \langle \overline{\mathcal{H}}_p \rangle + \frac{1}{2} \left[\langle \overline{\mathcal{H}}_p^2 \rangle - \langle \overline{\mathcal{H}}_p \rangle^2 \right] + \dots \right\}, \quad (88)$$

em que a forma do termo quadrático, com um sinal menos, é providencial (na linguagem dos grafos, isso significa que podem ser descartados os grafos desconexos). Vamos fazer os cálculos e verificar a posteriori a consistência dessas hipóteses.

Preparando um pouco mais o hamiltoniano, é conveniente fazer a transformação de variáveis,

$$\hat{\sigma}_q \rightarrow \frac{1}{(\beta J)^{1/2}} \hat{\sigma}_q, \quad (89)$$

que já foi adotada no caso gaussiano, e introduzir a notação

$$r = \frac{2\beta Jd - 1}{\beta J} \quad \text{e} \quad u = 4! \frac{\tilde{u}}{(\beta J)^2}. \quad (90)$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} = & \frac{1}{2} \sum_q [r - q^2 + O(q^4)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \frac{\beta H N^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R_0 - \\ & - \frac{u}{4!} \frac{1}{N^d} \sum_{q_1, q_2, q_3, q_4} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_4} \delta_{q_1 + q_2 + q_3 + q_4, 0}, \end{aligned} \quad (91)$$

que também pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} = & \frac{1}{2} \frac{N^d}{(2\pi)^d} \int_{|q| < 1} d^d q [r - q^2 + O(q^4)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \\ & + \frac{\beta H N^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R_0 - \frac{u}{4!} \frac{1}{N^d} \frac{N^{3d}}{(2\pi)^{3d}} \int d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3 \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{-q_1 - q_2 - q_3}, \end{aligned} \quad (92)$$

em que as integrais devem se feitas sobre a esfera unitária.

Vamos agora usar o mesmo procedimento do caso gaussiano, dividindo a zona de Brillouin num caroço interno, com raio $1/b$, e numa coroa externa. O hamiltoniano transformado é dado por

$$\overline{\mathcal{H}}' = \overline{\mathcal{H}}_0^< + \langle \overline{\mathcal{H}}_p \rangle_{0>} + \frac{1}{2} \left[\langle \overline{\mathcal{H}}_p^2 \rangle_{0>} - \langle \overline{\mathcal{H}}_p \rangle_{0>}^2 \right] + \dots, \quad (93)$$

em que o primeiro termo é idêntico ao caso gaussiano. Aplicando o mesmo tipo de mudança de escala utilizado anteriormente,

$$q' = bq \rightarrow q = \frac{1}{b}q' \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma}_{\frac{1}{b}q'} \rightarrow b\widehat{\sigma}'_{q'}, \quad (94)$$

temos o primeiro termo

$$\overline{\mathcal{H}}_0^< = \frac{1}{2} \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' [b^2 r - q'^2 + O(q'^4)] \widehat{\sigma}'_{q'} \widehat{\sigma}'_{-q'} + b^{1+\frac{d}{2}} \frac{\beta H (N')^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R'_0, \quad (95)$$

com $N' = N/b$.

Os termos seguintes são mais complicados.

3.1 Cálculo até primeira ordem em $\epsilon = 4 - d$

Até primeira ordem temos que calcular médias da forma

$$\langle \widehat{\sigma}_{q_1} \widehat{\sigma}_{q_2} \widehat{\sigma}_{q_3} \widehat{\sigma}_{q_4} \rangle_{0>,} \quad (96)$$

em que os vetores de onda das variáveis de spin podem estar “dentro” ou “fora” do caroço da zona de Brillouin (mas a integração para tomar a média é feita sobre variáveis associadas a vetores de onda na coroa da zona de Brillouin).

Devido ao emparelhamento das médias gaussianas, temos três possibilidades apenas:

(i) todos os vetores de onda estão no caroço da zona de Brillouin. Nesse caso a média não opera (fornece a unidade), pois ela é efetuada apenas sobre variáveis de spin associadas a vetores de onda na coroa externa. Temos então uma contribuição para o termo de quatro spins,

$$-\frac{u}{4!} \frac{1}{N^d} \sum_{|q_1| < 1/b} \dots \sum_{|q_4| < 1/b} \widehat{\sigma}_{q_1} \widehat{\sigma}_{q_2} \widehat{\sigma}_{q_3} \widehat{\sigma}_{q_4} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0}. \quad (97)$$

Cada termo nessa soma pode ser representado pelo grafo (a) da figura 2. Esse grafo tem quatro "patas", devidamente orientadas, que representam momentos no caroço da zona de Brillouin. O vértice, que carrega um fator u , também indica a conservação dos momentos incidentes (o delta de Kronecker).

Com os devidos reescalamentos, podemos escrever

$$-\frac{u}{4!} b^{4-d} \frac{1}{(N')^d} \sum_{|q_1|<1} \cdots \sum_{|q_4|<1} \hat{\sigma}'_{q_1} \hat{\sigma}'_{q_2} \hat{\sigma}'_{q_3} \hat{\sigma}'_{q_4} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0}. \quad (98)$$

(ii) dois vetores de onda estão dentro e dois estão fora da coroa da zona de Brillouin. Nesse caso temos termos do tipo

$$-\frac{u}{4!} \frac{1}{N^d} \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_2|<1/b} \sum_{|q_3|>1/b} \sum_{|q_4|>1/b} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \langle \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_4} \rangle_{0>} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0}. \quad (99)$$

Agora é necessário perceber que existem

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 \quad (100)$$

termos desse tipo (número de maneiras de escolher dois vetores de onda dentro e dois fora do caroço) e que

$$\langle \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_4} \rangle_{0>} = \frac{1}{r + q_3^2} \delta_{q_3+q_4,0}, \quad (101)$$

como já havíamos obtido no caso gaussiano. Há uma interpretação gráfica muito simples dessas operações, como está ilustrado na figura 2 (os momentos na coroa da Zona de Brillouin estão devidamente ligados, indicando que $q_3 = -q_4$).

Temos então a contribuição (para o termo de dois spins):

$$-6 \frac{u}{4!} \frac{1}{N^d} \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_2|<1/b} \left[\sum_{|q_3|>1/b} \frac{1}{r + q_3^2} \right] \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \delta_{q_1+q_2,0}. \quad (102)$$

Introduzindo a definição

$$A = \frac{1}{N^d} \sum_{|q_3|>1/b} \frac{1}{r + q_3^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q_3|>1/b} d^d q_3 \frac{1}{r + q_3^2}, \quad (103)$$

em que A depende apenas de r , e notando que A é uma constante em primeira ordem em r , a contribuição perturbativa desse termo é dada por

$$-6 \frac{u}{4!} A \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_2|<1/b} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \delta_{q_1+q_2,0}. \quad (104)$$

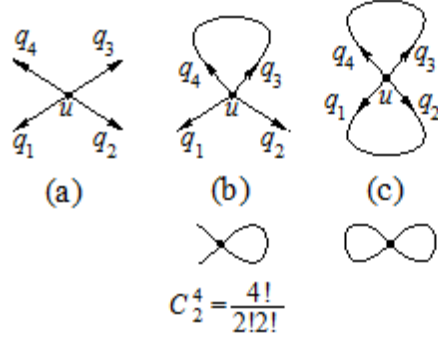


Figure 2: Grafos de primeira ordem em u .

Introduzindo finalmente os rescalonamentos de praxe, temos a contribuição para o termo de dois spins,

$$-6 \frac{u}{4!} A \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_{q' < 1} d^d q' b^2 \widehat{\sigma}'_{q'} \widehat{\sigma}'_{-q'}. \quad (105)$$

(iii) finalmente, há uma última possibilidade, com os quatro vetores de onda na coroa externa. Essa contribuição, que está associada ao grafo da figura 2 (c), fornece apenas uma constante trivial.

Para simplificar, vamos escrever o hamiltoniano transformado a campo nulo ($H = 0$),

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}' = & \frac{1}{2} \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' [b^2 r - q'^2 + O(q'^4)] \widehat{\sigma}'_{q'} \widehat{\sigma}'_{-q'} - 6 \frac{u}{4!} A \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' b^2 \widehat{\sigma}'_{q'} \widehat{\sigma}'_{-q'} \\ & - b^{4-d} \frac{u}{4!} \frac{1}{(N')^d} \frac{(N')^{3d}}{(2\pi)^{3d}} \int d^d q'_1 d^d q'_2 d^d q'_3 \widehat{\sigma}'_{q'_1} \widehat{\sigma}'_{q'_2} \widehat{\sigma}'_{q'_3} \widehat{\sigma}'_{-q_1 - q_2 - q_3}. \end{aligned} \quad (106)$$

Então temos as relações de recorrência,

$$r' = b^2 r + \frac{1}{2} A b^2 u \quad (107)$$

e

$$u' = b^{4-d}u. \quad (108)$$

De novo, surge apenas o ponto fixo trivial,

$$r^* = u^* = 0, \quad (109)$$

característico do modelo gaussiano, com os autovalores

$$\Lambda_1 = b^2 \rightarrow \lambda_1 = 2, \quad (110)$$

associado a um operador relevante (operador energia), que define o comportamento crítico de natureza térmica (como no modelo gaussiano), e

$$\Lambda_2 = b^{4-d} \rightarrow \lambda_2 = 4 - d, \quad (111)$$

associado a um operador irrelevante quando $d > 4$.

Esses autovalores indicam uma situação peculiar: o ponto fixo trivial se torna fisicamente inaceitável para $d < 4$ (nos casos de interesse real). O que será que acontece para $d < 4$? Esse resultado nos obriga a ir adiante, a fazer uma tentativa de realizar um cálculo até uma ordem superior, a fim de analisar o que acontece para $d < 4$ (incluindo o caso de interesse físico, $d = 3$).

3.2 Cálculo de segunda ordem em $\epsilon = 4 - d$

Em segunda ordem, as relações de recorrência podem conter termos proporcionais a u^2 . Antes de qualquer cálculo, vamos estudar o efeito de um termo de segunda ordem na relação de recorrência para o parâmetro associado ao operador de quatro spins. Vamos supor que

$$r' = b^2r + \frac{1}{2}Ab^2u \quad (112)$$

e que

$$u' = b^{4-d}u - \frac{3}{2}Bb^{4-d}u^2, \quad (113)$$

em que o termo extra, escrito de forma conveniente, depende de uma determinada constante B . Esse sistema admite duas soluções:

(i) o ponto fixo trivial,

$$r^* = u^* = 0, \quad (114)$$

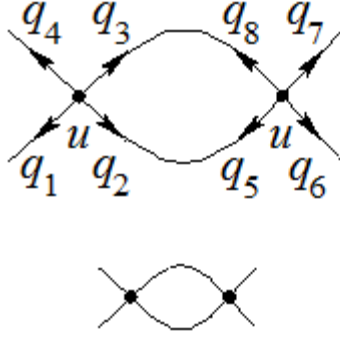


Figure 3: Grafo de segunda ordem que contribui para o termo de quatro spins.

de natureza gaussiana, que não é fisicamente aceitável para $d < 4$;

(i) novo ponto fixo, dado por

$$u^* = \frac{b^\epsilon - 1}{\frac{3}{2}Bb^\epsilon} \rightarrow \frac{2 \ln b}{3B_0} \epsilon, \quad (115)$$

para $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0$, e

$$r^* = -\frac{A_0 b^2 \ln b}{3B_0 (b^2 - 1)} \epsilon, \quad (116)$$

em que r^* e u^* são de ordem ϵ , de acordo com o “Anatz” de Wilson e Fisher. Embora A e B possam depender de r , deve ser suficiente, até ordem ϵ , considerar os valores constantes A_0 e B_0 (que A e B assumem para $r^* = 0$). Até a ordem dos nossos cálculos, também não há contribuição de um eventual termo adicional, de ordem u^2 , na primeira relação de recorrência, para o parâmetro r' .

Vamos então verificar se esse tipo de estrutura pode ser realmente obtido a partir dos nossos cálculos.

Em segunda ordem, a contribuição para o termo quártico deve ser prove-

niente de termos do tipo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\frac{u}{4!}\right) \frac{1}{N^d} \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_2|>1/b} \sum_{|q_3|>1/b} \sum_{|q_4|<1/b} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_2} \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_4} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0} \times \\ & \times \left(-\frac{u}{4!}\right) \frac{1}{N^d} \sum_{|q_5|>1/b} \sum_{|q_6|<1/b} \sum_{|q_7|<1/b} \sum_{|q_8|>1/b} \hat{\sigma}_{q_5} \hat{\sigma}_{q_6} \hat{\sigma}_{q_7} \hat{\sigma}_{q_8} \delta, \end{aligned} \quad (117)$$

em que estamos usando a notação da figura 3. Devido à estrutura dos cumulantes, não há contribuição de termos associados a grafos desconexos (que se cancelam) e há um fator 1/2 inicial. Além disso, precisamos levar em conta a multiplicidade desses termos, proveniente das escolhas das “contrações” gaussianas. Não é difícil perceber que precisamos escolher duas patas de cada vértice, e que ainda há um fator 2, pois a primeira pata escolhida pode ser ligada a cada uma das duas escolhas do outro vértice. Assim temos a multiplicidade (ver figura 3)

$$C_4^2 \times C_4^2 \times 2 = \frac{1}{8} (4!)^2. \quad (118)$$

Em resumo, temos a contribuição

$$\begin{aligned} & \frac{u^2}{16} \frac{1}{N^{2d}} \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_2|>1/b} \sum_{|q_3|>1/b} \sum_{|q_4|<1/b} \sum_{|q_6|<1/b} \sum_{|q_7|<1/b} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_4} \hat{\sigma}_{q_6} \hat{\sigma}_{q_7} \langle \hat{\sigma}_{q_2} \hat{\sigma}_{q_5} \rangle_{0>} \times \\ & \times \langle \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_8} \rangle_{0>} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0} \delta_{q_5+q_6+q_7+q_8,0}. \end{aligned} \quad (119)$$

Levando em conta a forma das correlações gaussianas,

$$\langle \hat{\sigma}_{q_2} \hat{\sigma}_{q_5} \rangle_{0>} = \frac{1}{r + q_2^2} \delta_{q_2+q_5,0} \quad (120)$$

e

$$\langle \hat{\sigma}_{q_3} \hat{\sigma}_{q_8} \rangle_{0>} = \frac{1}{r + q_3^2} \delta_{q_3+q_8,0}, \quad (121)$$

temos

$$\begin{aligned} & \frac{u^2}{16} \frac{1}{N^{2d}} \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_4|<1/b} \sum_{|q_6|<1/b} \sum_{|q_7|<1/b} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_4} \hat{\sigma}_{q_6} \hat{\sigma}_{q_7} \delta_{q_1+q_4+q_6+q_7,0} \times \\ & \times \left(\sum_{|q_2|>1/b} \frac{1}{r + q_2^2} \right) \left(\sum_{|q_3|>1/b} \frac{1}{r + q_3^2} \right) \delta_{q_2+q_3, q_6+q_7}. \end{aligned} \quad (122)$$

Torna-se agora conveniente definir

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{N^d} \left(\sum_{|q_2|>1/b} \frac{1}{r+q_2^2} \right) \left(\sum_{|q_3|>1/b} \frac{1}{r+q_3^2} \right) \delta_{q_2+q_3,q_6+q_7} = \\
&= \frac{1}{N^d} \sum_{|q_2|>1/b} \frac{1}{r+q_2^2} \frac{1}{r+(-q_2+q_6+q_7)^2} = \\
&= \frac{1}{(2\pi^d)} \int_{|q|>1/b} d^d q \frac{1}{r+q^2} \frac{1}{r+(-q+q_6+q_7)^2} = \\
&= \frac{1}{(2\pi^d)} \int_{|q|>1/b} d^d q \frac{1}{(r+q^2)^2} + O(q_6, q_7). \tag{123}
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que os termos dependentes dos momentos q_6 e q_7 estão associados a operadores irrelevantes (como foi calculado explicitamente no caso dos termos de ordem q^4 para o modelo gaussiano). Portanto, vamos descartar termos dessa natureza, bem como contribuições perturbativas de seis ou mais spins, que também são irrelevantes (note que em segunda ordem apareceria uma contribuição para o termo de seis spins). Uma análise muito simples, de caráter dimensional, seria suficiente para discutir essas questões, apenas aparentemente mais sutis (o leitor interessado deve consultar o artigo de revisão de Wilson e Kogut, citado nas referências).

Temos então a contribuição para o termo quártico,

$$\frac{u^2}{16} \frac{1}{N^d} B \sum_{|q_1|<1/b} \sum_{|q_4|<1/b} \sum_{|q_6|<1/b} \sum_{|q_7|<1/b} \hat{\sigma}_{q_1} \hat{\sigma}_{q_4} \hat{\sigma}_{q_6} \hat{\sigma}_{q_7} \delta_{q_1+q_4+q_6+q_7,0}, \tag{124}$$

com B dado pela equação (123), mas sem os termos de ordem superior nos momentos. Introduzindo os devidos reescalamentos, e redefinindo de forma conveniente as variáveis de momento, podemos escrever

$$\frac{u^2}{16} B b^{4-d} \frac{1}{(N')^d} \sum_{|q_1|<1} \dots \sum_{|q_4|<1} \hat{\sigma}'_{q_1} \hat{\sigma}'_{q_2} \hat{\sigma}'_{q_3} \hat{\sigma}'_{q_4} \delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0}. \tag{125}$$

Adicionando este termo ao hamiltoniano transformado da equação (106), temos

$$\bar{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' [b^2 r - q'^2 + O(q'^4)] \hat{\sigma}'_{q'} \hat{\sigma}'_{-q'} - 6 \frac{u}{4!} A \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' b^2 \hat{\sigma}'_{q'} \hat{\sigma}'_{-q'}$$

$$\begin{aligned}
& -b^{4-d} \frac{u}{4!} \frac{1}{(N')^d} \frac{(N')^{3d}}{(2\pi)^{3d}} \int d^d q'_1 d^d q'_2 d^d q'_3 \widehat{\sigma}'_{q'_1} \widehat{\sigma}'_{q'_2} \widehat{\sigma}'_{q'_3} \widehat{\sigma}_{-q_1-q_2-q_3} + \\
& -b^{4-d} \frac{u^2}{16} \frac{1}{(N')^d} \frac{(N')^{3d}}{(2\pi)^{3d}} \int d^d q'_1 d^d q'_2 d^d q'_3 \widehat{\sigma}'_{q'_1} \widehat{\sigma}'_{q'_2} \widehat{\sigma}'_{q'_3} \widehat{\sigma}_{-q_1-q_2-q_3}. \tag{126}
\end{aligned}$$

Comparando com o hamiltoniano original, dado pela equação (92), a campo nulo, temos finalmente as relações de recorrência,

$$r' = b^2 r + \frac{1}{2} A b^2 u \tag{127}$$

e

$$u' = b^{4-d} u - \frac{3}{2} B b^{4-d} u^2, \tag{128}$$

exatamente na mesma forma como tinham sido escritas no início dessa seção (ver equações 112 e 113). Como já foi visto, há um ponto fixo trivial, de caráter gaussiano, $r^* = u^* = 0$, que é instável para $d < 4$. Vamos então analisar o ponto fixo não trivial.

3.3 Análise de estabilidade do ponto fixo não trivial

No limite $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0$, o ponto fixo não trivial é dado pelas equações (115) e (116),

$$u^* = \frac{b^\epsilon - 1}{\frac{3}{2} B b^\epsilon} \rightarrow \frac{2 \ln b}{3 B_0} \epsilon \tag{129}$$

e

$$r^* = -\frac{A_0 b^2 \ln b}{3 B_0 (b^2 - 1)} \epsilon. \tag{130}$$

em que A_0 e B_0 são os valores de A e B para $r^* = 0$.

A análise linear de estabilidade nas vizinhanças desse ponto fixo não trivial requer certos cuidados. Vamos então recordar as definições

$$A = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q|>1/b} d^d q \frac{1}{r + q^2} \tag{131}$$

e

$$B = \frac{1}{(2\pi^d)} \int_{|q|>1/b} d^d q \frac{1}{(r + q^2)^2}, \tag{132}$$

em que estamos considerando a expressão de B para momentos internos nulos. A partir das relações de recorrência, temos

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial r}\right)_* = b^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)_* b^2 u_* + O(\epsilon^2), \quad (133)$$

em que

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q|>1/b} d^d q \frac{1}{(r+q^2)^2} = -B. \quad (134)$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial r}\right)_* = b^2 - \frac{1}{2} B_0 b^2 u_* + O(\epsilon^2) = b^2 - \frac{b^2 \ln b}{3} \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (135)$$

As outras derivadas necessárias para a análise linear de estabilidade são dadas por

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial u}\right)_* = \frac{1}{2} A_0 b^2 + O(\epsilon), \quad (136)$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial r}\right)_* = O(\epsilon^2) \quad (137)$$

e

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)_* = b^{4-d} - 3B_0 b^{4-d} u_* + O(\epsilon^2) = 1 - \epsilon \ln b + O(\epsilon^2), \quad (138)$$

em que ocorreram alguns cancelamentos absolutamente notáveis!

Temos assim a forma linear

$$\begin{pmatrix} \Delta r' \\ \Delta u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 - \epsilon \frac{1}{3} b^2 \ln b + O(\epsilon^2) & \frac{1}{2} A_0 b^2 + O(\epsilon) \\ O(\epsilon^2) & 1 - \epsilon \ln b + O(\epsilon^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta u \end{pmatrix}, \quad (139)$$

de onde vêm os autovalores

$$\Lambda_1 = b^2 - \epsilon \frac{1}{3} b^2 \ln b + O(\epsilon^2), \quad (140)$$

que está associado a um operador relevante, e

$$\Lambda_2 = 1 - \epsilon \ln b + O(\epsilon^2), \quad (141)$$

que está associado a um operador irrelevante para $\epsilon > 1$ (isto é, na situação de interesse físico, $d < 4$). Na figura 4, para $d < 4$, representamos os fluxos

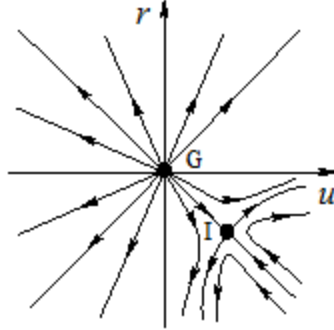


Figure 4: Esboço das linhas de fluxo no espaço de parâmetros, $r^* - u^*$, para $d < 4$. Também estão indicados os pontos fixos: gaussiano (G), de caráter instável, e Ising (I), de caráter hiperbólico.

das relações de recorrência no espaço $r - u$ de parâmetros (o ponto fixo não trivial, do “tipo Ising”, tem caráter hiperbólico; o ponto fixo gaussiano é completamente instável).

Até primeira ordem em ϵ , também podemos escrever

$$\lambda_1 = \frac{\ln \Lambda_1}{\ln b} = 2 - \frac{1}{3}\epsilon \quad (142)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{\ln \Lambda_2}{\ln b} = -\epsilon. \quad (143)$$

Os expoentes ν , associado ao comprimento de correlação, e α , associado ao calor específico, são dados por

$$\nu = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (144)$$

e

$$\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = \frac{1}{6}\epsilon + O(\epsilon^2). \quad (145)$$

Para $\epsilon = 0$ (isto é, $d = 4$) recuperamos os valores de campo médio, $\nu = 1/2$ e $\alpha = 0$. Para $d = 3$ ($\epsilon = 1$), obtemos valores não clássicos, embora ainda distantes dos expoentes do modelo de Ising. Em segunda ordem em ϵ , os valores obtidos podem ser favoravelmente comparados com os melhores resultados das análises de expansões em série ou simulações numéricas. No entanto, para levar adiante esse cálculo torna-se imprescindível utilizar técnicas bem mais controladas de teoria de campos, que estão além dos objetivos do nosso curso (ver o texto de Daniel Amit, citado nas referências). De qualquer forma, na análise do comportamento crítico, o método de Wilson-Fisher já faz parte da “cultura” da área, devendo ser utilizado em “primeira instância” para complementar ou substituir com muitas vantagens os cálculos usuais de campo médio.

Referências:

1- M. E. Fisher, “The renormalization group in the theory of critical behavior”, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 597-616 (1974). Talvez este seja o trabalho de revisão mais próximo do espírito do nosso curso. Ver também o ponto de vista de Michael Fisher cerca de vinte anos depois: M. E. Fisher, “Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 653-681 (1998).

2- K. G. Wilson e J. Kogut, “The renormalization group and the ϵ expansion”, *Phys. Rep.* **12**, 75-200 (1974). Discussão detalhada de todas as sutilezas da expansão de Wilson-Fisher.

3- J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher e M. E. J. Newman, “The theory of critical phenomena: An introduction to the renormalization group”, Oxford Science Publications, 1992. Texto didático, com ótima exposição sobre as expansões diagramáticas (vai bem além do nosso curso).

4- D. J. Amit, “Field theory, the renormalization group and critical phenomena”, McGraw-Hill, 1978 (edição revista, World Scientific, 1993). Exposição clássica sobre a utilização de métodos de teoria de campos em problemas de física estatística.

5- Notas de aula de Carlos E. I. Carneiro - Grupo de Renormalização - há promessas do lançamento de um livro.