

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**



**INSTITUTO DE FÍSICA**

**4300254**

**LABORATÓRIO DE MECÂNICA**

**(Licenciatura em Física)**

**2012**

### Introdução

Medidas físicas não são exatas. Devido às limitações dos aparelhos de medição ou dos processos adotados, o resultado de qualquer medida é diferente do “valor verdadeiro” da grandeza. Parte dos desvios que se observam resulta de fenômenos que intervêm no processo de medição e são incontroláveis, gerando interferências *aleatórias* (= ao acaso). A magnitude das flutuações de origem aleatória pode ser estimada, por exemplo, com a repetição da medição diversas vezes e a consequente obtenção de resultados diferentes. Normalmente, em um experimento sob condições controladas, é possível determinar uma função que represente razoavelmente bem a probabilidade de se obter um resultado dentro de certo intervalo de valores. O objetivo do presente experimento é mostrar a existência de flutuações nos resultados de medidas, que têm origem aleatória e podem ser interpretados dentro do quadro da teoria da Estatística, cujos conceitos básicos desenvolveremos ao longo do semestre.

### A distribuição binomial

A função de probabilidade binomial  $P_{n,p}(i)$  aplica-se às situações em que a *variável aleatória*  $i$  é o número inteiro de *sucessos* em  $n$  tentativas independentes quando a probabilidade de sucesso  $p$  é constante e igual em cada tentativa.

Os conceitos tornam-se mais claros através do exemplo específico desta experiência: lançaremos repetidamente oito dados cúbicos, cada um com duas faces marcadas com um ponto e quatro faces sem nenhuma marca. Quando lançarmos os dados sem arrumá-los no copinho nem esparramá-los cuidadosamente – ou seja, se jogarmos honestamente – não se poderão controlar as faces que os dados exibirão para cima, o que fará com que o número de dados que caem com a face marcada para cima seja um *número aleatório* entre 0 e 8. Ao definirmos *sucesso* como o evento: *o dado cai com a face marcada para cima*, então a probabilidade de sucesso é  $p = 2/6 = 1/3$ . Os 8 dados são lançados, constituindo um número de tentativas  $n = 8$ , que são independentes, porque a face que um dado exhibe para cima não influi na que outro dado mostra. Considerando os dados iguais, não importa, para efeitos de estatística, se os 8 dados são lançados simultaneamente ou em seqüência, ou se um único dado é

lançado 8 vezes<sup>1</sup>. Neste caso, o número de sucessos  $i$  é uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor inteiro entre 0 e o número de tentativas  $n = 8$ , com probabilidade  $P_n(i)$  dada pela fórmula

$$P_n(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)} \quad (1.1)$$

Vamos deduzir essa fórmula para este caso específico, cuja generalização está na equação (1.1). Começaremos, então, com a análise de um evento muito particular: em certo lançamento dos 8 dados *em seqüência*, isto é, dado a dado e não todos eles no copinho, ocorrem inicialmente 2 sucessos e depois 6 insucessos (isto é, seis faces vazias). A probabilidade de ocorrência deste evento composto pode ser calculada usando que a probabilidade de dois eventos independentes ocorrerem é o produto das probabilidades de cada evento isolado. A probabilidade do primeiro sucesso é  $1/3$ , bem como a do segundo, portanto a seqüência de dois sucessos seguidos tem probabilidade:

$$1/3 \times 1/3 = (1/3)^2 = 1/9 = p^2$$

Uma maneira de entender esse resultado é fazer uma tabela com todos os eventos possíveis com dois dados e perceber que apenas  $1/9$  deles corresponde ao evento “os dois com faces marcadas para cima”. Os próximos dados saíram todos com as faces vazias. A probabilidade de ocorrência  $q$  de um insucesso é o complemento para 1 da probabilidade do sucesso, uma vez que esses dois eventos são os únicos possíveis e mutuamente exclusivos:

$$q = (1 - p) = (1 - 1/3) = 2/3$$

A probabilidade de ocorrência de 6 fracassos seguidos seria, portanto,

$$(1 - p)^6 = (2/3)^6$$

A probabilidade de ocorrência de 2 sucessos seguida de 6 fracassos é, então:

$$P' = p^2(1 - p)^6$$

---

<sup>1</sup> Esta idéia é muito importante em física. Frequentemente,  $n$  sistemas físicos idênticos e independentes são entendidos como  $n$  repetições de um mesmo processo. Por exemplo, tanto faz medirmos as velocidades de  $n$  átomos de um gás quanto medirmos a velocidade de um átomo  $n$  vezes, em instantes suficientemente separados no tempo para que tenha ocorrido ao menos uma colisão no intervalo.

Esta não é, contudo, a probabilidade de se obter  $i = 2$ , uma vez que existem outras seqüências possíveis de eventos que têm no total 2 faces para cima. O problema de contar o número de seqüências diferentes possíveis de 2 sucessos e 6 fracassos é resolvido pela análise combinatória e é igual a  $\frac{8!}{[2!(8-2)!]}$ , que é o

número de permutações de 8 dados, corrigido pelo fato que permutações dos dados com faces marcadas para cima ou dos outros dados não devem ser contadas múltiplas vezes, ou seja, o número de combinações é o binomial de 8 sobre 2:  $\binom{8}{2}$ . Assim, como existem  $\binom{8}{2}$  maneiras **distintas** de ocorrer o resultado  $i = 2$ , cada uma delas com probabilidade igual a  $P^i = p^2(1-p)^6 = (1/3)^2(2/3)^6$ , a probabilidade total de  $i = 2$  é:

$$P_8(2) = \binom{8}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0,2731\dots$$

Esta fórmula corresponde ao caso particular da distribuição binomial para  $n = 8$ ,  $p = 1/3$  e  $i = 2$ , cuja generalização (fórmula 1) pode ser inferida substituindo os valores dessas grandezas neste exemplo particular pelos símbolos que as representam.

### A média e o desvio-padrão da distribuição binomial

A média de uma função de probabilidade pode ser calculada diretamente pela definição: a média da variável aleatória  $i$  ponderada pela probabilidade  $P(i)$ , que neste caso se escreve <sup>2</sup>:

$$\langle i \rangle = \sum_{i=0}^n i P_n(i) = \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \quad (1.2)$$

Como no cálculo de qualquer média ponderada, é necessário dividir pela soma dos pesos, mas neste caso ela vale 1:

$$\sum_{i=0}^n P_n(i) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = (p+1-p)^n = 1^n = 1$$

Nessa dedução, usamos a fórmula do binômio de Newton. Toda função de probabilidade é normalizada para que sua soma seja 1, o que facilita sua interpretação: algo acontece sempre, de modo que a soma de todas as probabilidades tem que dar 100%, ou seja 1; quando dizemos que a

---

<sup>2</sup> J.H. Vuolo, Fundamentos da Teoria de Erros, 2ª edição, Editora Edgard Blücher, São Paulo (1996).

probabilidade de um evento é 1, é porque ele vai acontecer, com toda certeza. A expressão (2) pode ser calculada e dá

$$\langle i \rangle = np \quad (1.3)$$

O desvio-padrão,  $\sigma$ , também pode ser obtido diretamente da definição, que é a média ponderada dos quadrados dos desvios:

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^n (i - \langle i \rangle)^2 P_n(i) = np(1 - p) \quad (1.4)$$

As demonstrações dos resultados (3) e (4) são deixadas como exercícios.

### **Procedimento Experimental**

A distribuição de probabilidades pode ser obtida experimentalmente realizando-se um número muito grande  $N$  de jogadas de 8 dados e verificando em cada jogada quantas ( $i$ ) faces marcadas estão voltadas para cima. Ao longo da atividade, ficará claro o que significa  $N$  muito grande, na prática.

A aproximação experimental da probabilidade para a ocorrência de  $i$  sucessos com  $n$  dados é a frequência relativa, que é dada por:

$$F_n(i) = \frac{N_i}{N} \quad (1.5)$$

onde  $N_i$  é o número de jogadas nas quais ocorreram  $i$  sucessos, i.e., foram observadas  $i$  faces marcadas voltadas para cima.

O valor experimental para a probabilidade de sucesso  $p$  é calculado a partir do valor médio dos valores observados para  $i$ ,

$$\langle i \rangle_{\text{exp}} = \sum_{i=0}^n i F_n(i) \quad (1.6)$$

usando a expressão (3), de modo que

$$p_{\text{exp}} = \frac{\langle i \rangle_{\text{exp}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i F_n(i) \quad (1.7)$$

A experiência consiste em realizar  $N = 10, 50$  e  $200$  jogadas com  $8$  dados, anotando o número de sucessos em cada jogada e comparar os resultados obtidos com as expectativas calculadas.

Deverá ser construído um histograma (recomenda-se fortemente a construção do histograma DURANTE a aula). Um histograma é um resumo gráfico de um conjunto de dados que nos permite ver certos comportamentos que são difíceis de observar em uma simples tabela numérica.

Sabemos que os valores variam em um conjunto de dados. O propósito da análise de um histograma é, por um lado, identificar e classificar o comportamento dessa variação, e, por outro lado, desenvolver uma explicação razoável e relevante desse comportamento. A explicação deve ser baseada em conhecimentos gerais e na observação da situação específica. Naturalmente, apenas a análise de um histograma não é suficiente para confirmar ou refutar uma teoria, mas deve seguir-se de uma análise adicional.

### O desvio padrão da média

O valor médio do número de sucessos da relação (3) também poderia ser calculado diretamente a partir dos números de sucessos nas  $N$  jogadas. Chamando  $i_k$  o número de sucessos na  $k$ -ésima jogada das  $N$  realizadas,

$$\langle i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N i_k ,$$

A incerteza desse valor médio é medida pelo desvio padrão da média, que é:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (1.8)$$

### Síntese

Não devem faltar na síntese os seguintes itens, detalhando as fórmulas empregadas:

- Descrição sucinta do experimento, apenas o suficiente para que o leitor entenda o que os símbolos do texto significam.
- Cálculo das probabilidades esperadas  $P_n(i)$  de  $i$  sucessos ( $0 \leq i \leq 8$ ).
- Tabela-resumo que apresente  $i, N_i, F_n(i)$  para os três conjuntos:  $N = 10, N = 50$  e  $N = 200$ , em comparação com  $P_n(i)$ . Apresente os resultados

numéricos da probabilidade teórica com um dígito significativo a mais que o do valor experimental correspondente.

- Médias dos números de sucessos,  $\langle i \rangle$ , observado em cada um dos conjuntos com  $N = 10$ ,  $50$  e  $200$  lançamentos.
- Desvios-padrão experimentais ( $\sigma$ ) para os três conjuntos com  $N = 10$ ,  $N = 50$  e  $N = 200$ , calculados como

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^n (i - \langle i \rangle)^2 N_i$$

e comparados ao teórico<sup>3</sup>.

- Desvios-padrão das médias ( $\sigma_m$ ) dos números de sucessos nos três conjuntos com  $N = 10$ ,  $N = 50$  e  $N = 200$ , e comparação com o desvio padrão da média esperado (eq. (1.8)).
- Gráficos com a probabilidade teórica (binomial) e com a frequência relativa (estimativa experimental da probabilidade) em função da variável  $i$  para a amostra com  $N = 200$ .
- Valores experimentais para a probabilidade  $p$  obtidas para os três conjuntos com  $N = 10$ ,  $N = 50$  e  $N = 200$ . Não se esqueça de indicar os valores obtidos com suas respectivas incertezas.
- Discussão das diferenças observadas entre suas estimativas de  $p$  do item anterior com o valor esperado  $1/3$  e interprete sua dependência com o número  $N$  de lançamentos do conjunto de dados. Há um desvio-padrão que varia pouco com o número de lançamentos e outro que varia muito; explique porque isso ocorre.

---

<sup>3</sup> Nas estimativas experimentais do desvio padrão, entra  $(N-1)$  no denominador e não  $N$ .

## Colisões Bidimensionais

A dinâmica da colisão entre dois corpos em um plano aplica-se a fenômenos físicos que ocorrem constantemente à nossa volta, como os choques entre as moléculas do ar, e pode ser utilizada em interpretações simplificadas de alguns esportes como bilhar, golfe, tênis, voleibol, futebol, etc.

Os conceitos desenvolvidos neste experimento são muito importantes, pois se verificam as conseqüências das leis de conservação da quantidade de movimento linear total e da energia mecânica em sistemas físicos *reais*.

A partir da análise da energia cinética total dos corpos que colidem, é possível estabelecer se a colisão foi *elástica* ou *inelástica*, conforme a energia cinética do sistema seja ou não conservada, respectivamente, uma vez que a energia cinética de translação pode ser convertida em energia cinética de rotação ou vibração, energia térmica e, também, dissipada por deformações.

Os movimentos dos corpos em colisão são descritos frequentemente em um sistema de coordenadas fixo no centro de massa do sistema (CM). Uma das atividades, então, será a localização do CM e o estudo de algumas de suas propriedades.

### Introdução

Nesta experiência, dois corpos deslizam quase sem atrito após um impulso inicial e colidem entre si. As trajetórias dos corpos são registradas com um faiscador ( $\Delta t = 1/60$  s) em uma folha de papel presa em uma placa paralela ao plano do movimento dos corpos. As Figuras 1 e 2 ilustram o arranjo experimental. As grandezas de interesse são a energia cinética e a quantidade de movimento linear.

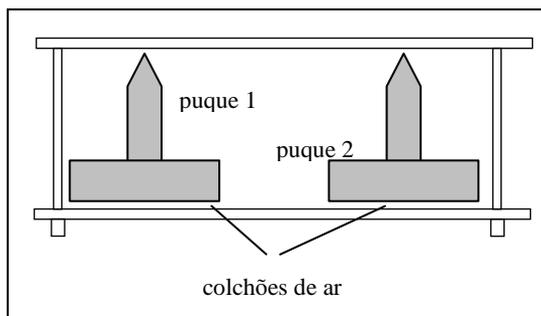


Figura 1: Puques sobre colchões de ar em mesa de vidro. Vista lateral.

Se o movimento ocorrer em um plano horizontal, isto é, se a mesa estiver perfeitamente nivelada, o peso do pique será compensado pela força normal, de modo que as forças resultantes nos dois piques serão iguais às forças de interação durante a colisão. No *sistema* formado pelos *dois* piques, a energia em jogo é a do movimento de translação, que pode ou não se conservar, conforme o tipo da colisão. Já a *quantidade de movimento linear* total do *sistema* se conserva, porque a resultante das forças externa é sempre nula.

O *centro de massa* de um conjunto de pontos materiais é a coordenada  $(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$  calculada por

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad (2.1)$$

e definições análogas para  $y_{CM}$  e  $z_{CM}$ , em que se substitui  $x$  por  $y$  e  $z$ , respectivamente. É necessário tomar as coordenadas de todos os pontos materiais **SIMULTANEAMENTE**, isto é, todas no mesmo instante de tempo; o centro de massa move-se conforme as partículas que compõem o sistema se movem.

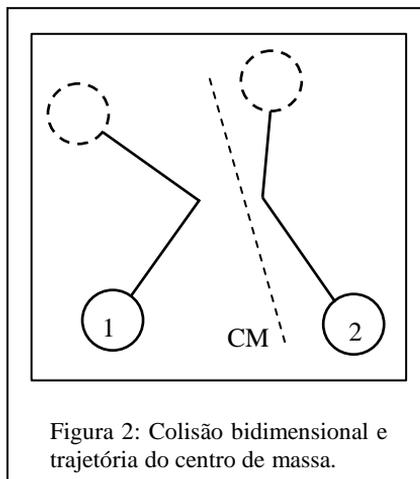


Figura 2: Colisão bidimensional e trajetória do centro de massa.

## Procedimento Experimental

Neste experimento, representaremos grandezas físicas em uma folha de papel, de modo que necessitaremos um *lápiz* bem apontado ou uma lapiseira, além de uma *calculadora*, para efetuar as transformações de escala necessárias – não se esqueça de trazê-los para o laboratório.

1. Monte o arranjo experimental mostrado na Figura 1. Anote as massas dos piques, que já estão marcadas em cada um deles. Teste o arranjo algumas vezes *antes* de colocar (e desperdiçar!) o papel sensível, que deve ser preso  *muito bem esticado*, com o lado sensível para fora. Arme o disparador dos piques e lance-os, mantendo o fiascador funcionando até que o primeiro deles bata na moldura da mesa.
2. Marque as direções iniciais dos movimentos dos piques no papel, bem como suas massas, de modo a identificar de quem é cada uma das trajetórias.

3. Transfira o registro das trajetórias para papel semitransparente vegetal, que aceita desenhos a lápis. *Todo o trabalho de análise deverá ser feito graficamente nessa folha semitransparente*, uma vez que o papel sensível não é adequado para esse tipo de tarefa, porque marca muito facilmente.
4. Identifique o par de marcas de faíscas mais próximo do ponto em que ocorreu a colisão. Calcule e desenhe a trajetória do centro de massa para os 13 instantes *antes* da colisão e mais outros 13, *depois*<sup>4</sup>; não inclua o instante mais próximo da colisão em nenhum dos dois grupos (antes e depois). Note que cada par de marcas de faíscas, feitas simultaneamente pelos dois puques, pode ser ligada por uma reta, que serve de sistema de referência para as posições e o centro de massa. Quando a posição de um dos puques nessa reta é definida como a origem do sistema, sua coordenada vale 0, e fica mais fácil calcular o centro de massa pela equação 2.1. Mesmo assim, você precisará usar a calculadora para determinar a posição do centro de massa ao longo dessa reta que une as posições dos dois puques.
5. Determine a velocidade de cada puque e do seu centro de massa imediatamente antes e imediatamente após a colisão; se você calcular a distância percorrida pela diferença de posição  $\Delta s$  relativa a 13 pontos (correspondente a 12 intervalos), a velocidade será  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{12 \times \frac{1}{60} \text{ s}} = 5\Delta s$ , em cm/s quando  $\Delta s$  está em cm (não confunda  $s$  de espaço com  $s$  de segundo).
6. Represente no papel os seis vetores velocidades (determinados no item anterior), numa escala em que 1 cm corresponde a 5 cm/s, de modo que os tamanhos das flechas que representam a velocidade e o deslocamento serão iguais.
7. Calcule as energias cinéticas dos dois puques e a energia cinética total antes e depois da colisão; a unidade mais conveniente neste caso é o joule.
8. Determine os vetores quantidade de movimento linear de cada puque depois e antes da colisão e represente-os por flechas no papel, em uma escala em que 1 cm corresponde a 0,05 kg·m/s. Some graficamente esses vetores para determinar as quantidades de movimento total antes e depois da colisão, e subtraia-os, para determinar os impulsos sobre os puques.

---

<sup>4</sup> O movimento mais longe do ponto da colisão tem mais chance de estar afetado pelos tubos de ar comprimido ou pelas forças de atrito, que *não* estamos levando em conta na análise e que podem desviar as trajetórias dos puques, que são supostas retilíneas e uniformes.

9. Determine os vetores quantidade de movimento linear do centro de massa antes e depois da colisão e represente-os por flechas, na mesma escala usada na etapa anterior.

### Síntese

---

- a) Especificar os objetivos do trabalho prático.
- b) Descrever resumidamente com suas palavras o procedimento experimental.
- c) Especificar os resultados experimentais na folha de papel milimetrado – indique valores e incertezas dos deslocamentos, velocidades e quantidades de movimento.
- d) Discutir, com base nos *seus* dados e respectivas incertezas, tanto nos módulos das velocidades quanto nas direções dos vetores, se, na colisão:
  - houve conservação da quantidade de movimento total.
  - os impulsos são opostos.
  - há ou não conservação da energia cinética.
  - a velocidade do centro de massa se mantém constante.
  - a quantidade de movimento do centro de massa ( $Mv_{CM}$ ) é igual à soma das quantidades de movimento dos dois puques.

### OPCIONAL

- i. Prove teoricamente que a quantidade de movimento linear total em relação ao CM é nula.
- ii. Verifique que a quantidade de movimento vetorial total é zero no CM antes e depois da colisão. Note que, para um observador fixo no referencial do centro de massa, os dois puques devem se aproximar até o choque e depois se afastar, em trajetórias retilíneas.
- iii. Prove teoricamente que a energia cinética no sistema de laboratório é a soma da energia cinética de translação do centro de massa com as energias cinéticas dos corpos em relação ao sistema de centro de massa.
- iv. Verifique se seus dados experimentais estão de acordo com o resultado acima.

## Pêndulo Simples

Considere um pêndulo simples feito com um objeto pendurado em um fio, cuja massa é muito menor que a do objeto, de modo que o centro de massa do sistema fio+objeto praticamente coincide com o centro de massa do objeto.

Supondo oscilações de pequena amplitude e desprezando o atrito com o ar, o período  $T$  do pêndulo simples pode ser calculado como

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (3.1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade local e  $\ell$ , a distância entre o centro de rotação e o centro de massa do objeto.

Essa fórmula depende da validade das hipóteses; se elas forem violadas, a fórmula correta poderá depender de outras grandezas além de  $\ell$  e  $g$ , como a amplitude do movimento, a massa e volume do objeto pendurado ou, ainda, ter uma dependência com o comprimento mais complicada que a da fórmula (3.1).

Neste laboratório, vamos realizar experimentos que permitam estabelecer limites de validade de algumas das hipóteses. Teremos à disposição duas aulas para realizar as atividades experimentais e mais uma para análise dos resultados.

### Procedimento Experimental

#### 1) Determinação experimental da aceleração da gravidade.

- Medir o período do pêndulo em seis medições (de 20 oscilações cada) para oscilações de pequena amplitude.
- Determinar o valor médio e a incerteza da aceleração da gravidade,  $g$ , mediante o procedimento de propagação de incertezas.

#### 2) Determinação experimental da dependência do período $T$ em função de $\ell$ : $T(\ell)$

- Medir o período de oscilação para, pelo menos, três comprimentos  $\ell$  diferentes, com um mesmo ângulo inicial apropriado.
- Fazer um gráfico de  $T^2$  vs.  $\ell$  com as respectivas incertezas e sobrepor a função teórica esperada.

**3) Determinação experimental da dependência do período de oscilação  $T$  em função da amplitude inicial da oscilação:  $T(\theta_0)$**

- a) Medir o período para amplitudes iniciais  $\theta_0$  de  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $30^\circ$ .
- b) Fazer um gráfico, em papel milimetrado, de  $T(\theta_0)$ , indicando os valores de  $T$  medidos e suas respectivas incertezas. Desenhar também a função teórica esperada para oscilações de pequena amplitude.

**4) Determinação experimental da dependência do período em função da massa do objeto:  $T(m)$**

- a) Pesar objetos de massas diferentes.
- b) Medir o período de oscilação  $T$  para cada objeto com comprimento  $\ell$  constante (escolher um ângulo inicial apropriado).
- c) Fazer um gráfico de  $T(m)$  com as respectivas incertezas. Desenhar também a função teórica esperada.

**Relatório**

A ênfase neste relatório é a análise de dados. Escreva em detalhes:

- Especificação dos objetivos do trabalho prático.
- Uma introdução teórica que seja breve, mas que inclua a dedução da equação (3.1) e indique quais são as condições experimentais sob as quais ela é válida.<sup>5</sup>
- Os materiais usados e a descrição do experimento realizado.
- Os resultados experimentais, usando gráficos e tabelas, devidamente numerados e legendados.
- Determinação de  $g$  a partir do período medido no item (1), inclusive a discussão do procedimento de propagação de incertezas.

---

<sup>5</sup> Cuidado com uma demonstração que parte de um pêndulo que roda em torno do eixo vertical; temos recebido deduções com interpretações sem sentido, apesar de chegarem à fórmula correta.

- Determinação de  $g$  a partir da *média ponderada* dos períodos medidos no item (2) (veja nota ao fim deste roteiro sobre o cálculo da média ponderada).
- Determinação experimental da dependência do período em função do comprimento do pêndulo ( $\ell$ ), supondo que  $T^2 = a + b\ell$  e comparação com o que é esperado teoricamente.
- Determinação experimental da dependência do período em função da amplitude inicial de oscilação  $\theta_0$ , supondo  $T = \alpha + \beta\theta_0^2$  e sua comparação com a expectativa teórica simples.
- Determinação experimental da dependência do período em função da massa, a partir *dos seus dados*, na hipótese de uma dependência linear do período com a massa, e comparação com o que é esperado teoricamente.
- Discussão e conclusões gerais do trabalho realizado.

**Nota. Cálculo da média ponderada**

A medida de uma grandeza física deve ser dada por uma estimativa do seu valor acompanhada do respectivo desvio-padrão,  $x \pm \sigma$ , como é detalhado no apêndice II. Em algumas situações, tais como a da medida de  $g$  a partir do período e do comprimento do fio do pêndulo no experimento realizado, temos mais de um valor experimental. Vamos representar o conjunto de dados de que dispomos por  $\{(x_i, \sigma_i), i = 1..m\}$ , em que o índice  $i$  refere-se a cada um dos  $m$  comprimentos de fio usados. Nesse caso, queremos reduzir esse conjunto a um único valor e uma única incerteza, que será a nossa medida experimental; parece (e é) muito razoável determinar a estimativa da grandeza a partir de uma média ponderada de *todas*<sup>6</sup> as medições,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i x_i}{\sum_{i=1}^m p_i}$$

em que os pesos  $p_i$  devem ser relacionados às precisões dos dados, quantificados por meio dos desvios-padrões  $\sigma_i$ , de forma que pesem mais os dados de maior

---

<sup>6</sup> Resista à tentação de jogar dados fora para ficar só com os que se acumulam no centro do histograma. Precisamos avaliar as incertezas e obter resultados que possam ser comparados aos de outros experimentadores e, para isso, temos que preservar o caráter aleatório do nosso valor em particular, que se perde ao selecionar resultados experimentais.

precisão, que são os de menor desvio-padrão – ou seja, os pesos são inversamente proporcionais aos desvios-padrões. A teoria da estatística ensina que o peso correto é

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

que concorda com a ideia intuitiva de aumento de precisão com a diminuição do desvio-padrão, embora a dependência com o *quadrado* do desvio-padrão seja algo inesperado.

Assim, vamos representar todo o conjunto de dados  $\{(x_i, \sigma_i), i = 1..m\}$  pelo par de valores  $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$  das fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad e \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (3.2)$$

que chamamos respectivamente de média e desvio-padrão da média. Dessas fórmulas é relativamente fácil deduzir que o desvio padrão da média de  $N$  dados que têm o mesmo desvio-padrão  $\sigma$  é dado pela fórmula (1.8), que usamos na análise do primeiro experimento do semestre – confira!

## Pêndulo Físico

É o momento de inércia que define o período de oscilação de um pêndulo físico. Assim, podemos tanto determinar o momento de inércia de um objeto a partir do período de oscilação em torno de um ponto, quanto prever o período de oscilação de um corpo rígido a partir da sua forma e tamanho.

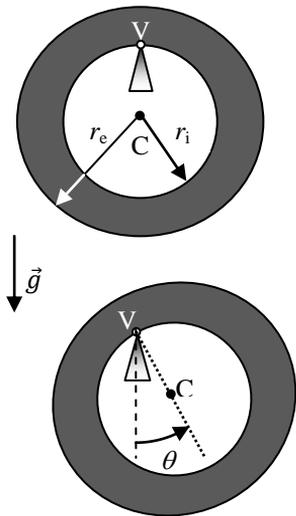
### Introdução

Denomina-se pêndulo físico o corpo cuja extensão influi no movimento de oscilação, ou seja, é um corpo que não se pode aproximar por um ponto material no seu centro de gravidade.

A figura 1 apresenta o esboço do pêndulo físico que será o objeto de estudo neste laboratório, em uma vista em que a gravidade tem a direção do papel, de cima para baixo. Ele consiste de um anel metálico, de raio interno  $r_i$  e raio externo  $r_e$ , com centro de gravidade no ponto C, que é suspenso por uma cunha interna e fica em equilíbrio quando o centro de gravidade e o ponto de contato da cunha com o anel, V, estão alinhados na direção vertical. Quando se desloca o anel da posição de equilíbrio, sem mudar o ponto de contato da cunha com o anel, e se larga o anel, ele começa a oscilar em torno de V. O ângulo formado entre CV e a direção da aceleração da gravidade,  $\theta$ , é a grandeza cinemática que se usa para descrever a oscilação.

Se  $M$  é a massa do anel e  $g$  o módulo da aceleração da gravidade, o torque da força peso em relação ao ponto V é, para pequenos deslocamentos:

$$\mathfrak{T} = -Mgr_i \sin\theta \approx -Mgr_i\theta \quad (4.1)$$



**Figura 1.** Os esboços de cima e de baixo representam, respectivamente, o pêndulo físico na posição de equilíbrio e deslocado de um ângulo  $\theta$  em relação a ela.

O momento angular total  $L$  a cada instante  $t$  é  $L = I \frac{d\theta}{dt}$ , onde  $I$  é o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo ponto V e é perpendicular ao plano do anel e  $\frac{d\theta}{dt} = \Omega$  é a velocidade angular do pêndulo em torno do ponto V. Por causa do torque, a velocidade angular varia o tempo todo,

$$\mathfrak{T} = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4.2)$$

Das equações (1) e (2) se obtém uma equação diferencial para  $\theta(t)$ :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgr_i\theta \quad (4.3)$$

A solução dessa equação com a condição inicial  $\theta(t=0) = 0$  é:

$$\theta(t) = A \text{sen}(\omega t) \quad (4.4)$$

onde  $A$  é a amplitude da oscilação e  $\omega$  é a freqüência angular característica de *oscilação* do sistema dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgr_i}{I}} \quad (4.5)$$

Note que essa freqüência angular  $\omega$  é constante; cuidado para não confundi-la com a velocidade angular de *rotação*  $\frac{d\theta}{dt} = \Omega$ , que varia o tempo todo.

O período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é, então,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr_i}} \quad (4.6)$$

Define-se o momento de inércia de um corpo rígido em torno de um eixo fixo como:

$$I = \int_V \rho r^2 dv \quad (4.7)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $dv$  é o elemento de volume,  $r$  é a distância do elemento de volume ao eixo fixo e integra-se sobre o volume total  $V$  do sólido. Observe que para uma massa  $M$  concentrada no ponto  $r = r_i = \ell$ , o momento de inércia seria  $I_{ps} = M\ell^2$  e a fórmula do período reduz-se ao resultado obtido anteriormente para o pêndulo simples.

### Procedimento Experimental

---

- 1) Meça a massa e as dimensões dos anéis que constituem os pêndulos físicos. Além de usar pelo menos dois objetos de metal bem diferentes, utilize um rolo de fita adesiva como pêndulo.
- 2) Com um cronômetro, meça o período de oscilação do pêndulo físico. Adote um procedimento semelhante ao usado para o pêndulo simples, a fim de reduzir o erro de medida e determinar a incerteza: repita sete vezes a cronometragem do intervalo de tempo que corresponde a 20 oscilações. Escolha uma amplitude de oscilação pequena ( $\theta < 10^\circ$ ) e repita todo o procedimento para três anéis diferentes.
- 3) Discuta os resultados experimentais a partir da comparação com as expectativas teóricas. No cálculo teórico do momento de inércia devem ser considerados os furos que eventualmente possam existir em um dos seus pêndulos físicos.

- i. Especificar os objetivos do trabalho prático.
- ii. Descrever resumidamente o arranjo e o procedimento experimental.
- iii. Apresentar os dados experimentais das medições de período com tabelas, devidamente numeradas e legendadas.
- iv. Apresentar as dimensões e massas dos objetos usados como pêndulos físicos, inclusive suas incertezas.
- v. Apresentar os momentos de inércia, acompanhados dos desvios-padrão, calculados a partir das dimensões e massas dos objetos.
- vi. Apresentar os valores dos momentos de inércia deduzidos a partir dos períodos de oscilação e raios internos; não se esquecer dos desvios-padrão desses valores.
- vii. Comparar os momentos de inércia do item vi com os do item v.
- viii. Discutir brevemente, com base nos resultados obtidos, a adequação do procedimento experimental e das aproximações que levaram às fórmulas usadas nos diversos cálculos.
- ix. Apresentar as conclusões gerais do trabalho realizado.

## Movimento de Um Corpo Sob a Ação de Força Central

Neste experimento, mediremos a energia mecânica e o momento angular de um corpo em movimento, no qual age uma força central elástica. O objetivo do experimento é interpretar o resultado do ponto de vista das leis de conservação.

### Introdução

---

O arranjo experimental consiste em um corpo preso por uma mola a um pino fixo na mesa e que desliza em uma mesa de ar sobre vidro, quase sem atrito. O corpo é lançado de forma que sua velocidade inicial é aproximadamente perpendicular à força da mola. A trajetória do corpo é registrada com faíscas a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 1/60$  s em uma folha de papel presa numa placa paralela ao tampo de vidro da mesa. As Figuras 1 e 2 ilustram o arranjo experimental. As principais grandezas de interesse são:

- *Energia cinética do corpo*
- *Energia potencial elástica da mola*
- *Energia total*
- *Quantidade de movimento linear*  $\vec{P} = m\vec{v}$
- *Momento angular*  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

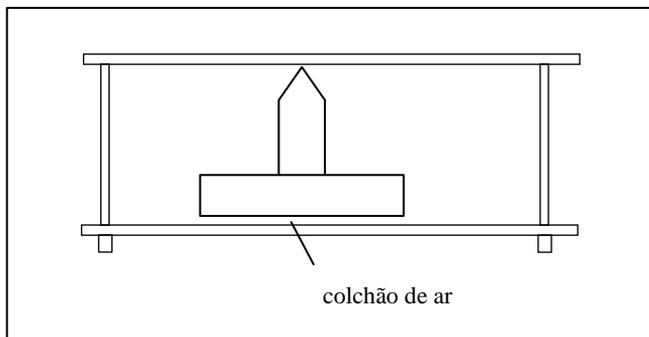


Figura 1. Puque sobre um colchão de ar em mesa de vidro. Vista lateral.

Ao analisar o diagrama de corpo livre do puque que se move em um plano horizontal sem atrito, o que acontece se a mesa estiver bem nivelada e com o ar fluindo, a força peso no puque será compensada pela força normal e a resultante será igual à força da mola. Como a soma das forças externas não é nula, a quantidade de movimento linear não é conservada, mas o momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$  se conserva quando se adota, neste arranjo, a origem do sistema de coordenadas no ponto fixo da mola: o vetor  $\vec{r}$  é paralelo à força que a mola exerce no puque, de modo que temos

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

e, como o torque é a derivada no tempo do momento angular,  $\vec{L}$  é constante.

No sistema puque-mola, as energias em jogo são:

- Energia cinética de translação do puque.
- Energia potencial da mola.

A energia potencial da mola pode ser determinada a partir da distância do centro do puque até o centro do pino que prende a mola, *descontando eventuais ganchos e prendedores*, e os parâmetros da mola: constante de força  $k$  e comprimento natural  $x_0$ . Deve-se tomar cuidado ao determinar  $x_0$ , uma vez que a energia potencial varia com o quadrado do comprimento da mola, de forma que um erro no comprimento natural da mola ( $x_0$ ) causa na energia potencial um erro maior, em relação ao seu valor. A energia cinética de translação do puque é calculada a partir da sua velocidade. Para esses cálculos, qualquer ponto fixo à mesa pode ser usado como referência.

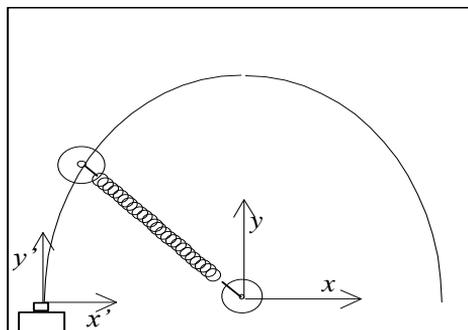


Figura 2: Puque sob a ação de força elástica central. Vista superior.

Conceitos importantes:

1) Torque e momento angular. Desenhe o diagrama de forças no pique, mostre que o torque é nulo e demonstre que, nestas condições, o momento angular se conserva.

2) Dependência das grandezas com o referencial. O que acontece com o momento angular do pique (e sua eventual conservação) se a origem for deslocada para o início da trajetória do pique, que é a origem do sistema  $x'$ ,  $y'$ , conforme ilustrado na figura 2?

A medição das energias envolve as medições da energia cinética do pique e da energia potencial do sistema pique-mola. A fim de obter um bom resultado para essa última, é precisa tomar bastante cuidado. Sua medição compreende duas etapas:

a) **Medição dos parâmetros da mola,  $x_0$  e  $k$ .** Com uma extremidade da mola presa em um suporte, mede-se o comprimento para diferentes pesos pendurados nela. Cuidado especial deve ser tomado na medida do comprimento, porque o critério de medida dessa quantidade no arranjo para determinação dos parâmetros da mola não é o mesmo que você usa na medição da distância do centro do pique ao centro do pino fixo, devido aos ganchos e outras peças de fixação, que são diferentes nas duas montagens.

Note que a energia potencial é uma função quadrática da *elongação*:

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (5.1)$$

que pode ser expandida:

$$E_p = \frac{k}{2}(x)^2 + \frac{k}{2}(x_0)^2 + k \cdot x \cdot x_0 \quad (5.2)$$

NOTE QUE um eventual erro em  $x_0$  não implica num simples acréscimo aditivo da energia, como pode ser visto no último termo da equação (5.2).

b) **Determinação da energia potencial da mola.** Para isso é necessário medir a distância do pique ao centro fixo (para alguns pontos da trajetória) e determinar a elongação da mola. Conforme discutido acima, deve-se cuidar para estimar corretamente o valor de  $x_0$ .

## Procedimento Experimental

---

1. Monte o arranjo experimental da Figura 1. Teste o arranjo algumas vezes ANTES de colocar (e desperdiçar) o papel sensível. Prenda o papel, verifique que esteja MUITO BEM ESTICADO, com o lado sensível (o que marca com facilidade ao raspar com qualquer objeto) para fora da placa, de modo que, ao baixá-la sobre a mesa, o lado sensível fique do mesmo lado que a ponta do puque. Arme o lançador do puque, dispare-o e registre sua trajetória com as faíscas. Transfira o registro das trajetórias para um papel semitransparente (vegetal, por exemplo), que aceite desenhos e traços a lápis. Antes de descolar o papel sensível da mesa, marque a posição do pino fixo: gire a sua ponta de latão para que fique mais alta, baixe a tampa e deixe a ponta furar o papel, mas evite que pressione excessivamente a tampa, que pode acabar furando também, uma vez que ela é relativamente mole. Depois de furar o papel, levante a tampa e recolha a ponta do pino, para evitar dano na tampa na próxima vez que ela for abaixada. Identifique a lápis no papel esse furo, bem como o sentido de lançamento do puque.
2. Num outro arranjo experimental, meça o comprimento da mola  $x$  em função da força  $F$ , para oito massas diferentes; escolha valores mais ou menos uniformemente distribuídos e que façam com que ela se distenda tanto quanto no movimento em estudo. Faça um gráfico, ajuste os parâmetros de uma reta  $F = kx + C$  e determine os parâmetros da mola  $k$  e  $x_0 = -C/k$ , que é o comprimento natural da mola, que você precisa medir para determinar a energia potencial. A fim de aplicar o ajuste pelo método dos mínimos quadrados, calcule  $\sigma_F = k_{graf}\sigma_x$ , onde  $k_{graf}$  é o valor da inclinação da reta no gráfico.
3. Com o fluxo de ar comprimido cortado e a tampa da mesa levantada, meça a diferença entre o comprimento da mola e a distância entre o centro do pino fixo e a ponta do puque; faça pelo menos 5 medições dessa diferença, em diversas posições, para avaliar quanto ela flutua e estimar a precisão da medida.
4. Voltando para a trajetória registrada, selecione 10 trechos distribuídos uniformemente ao longo da trajetória obtida, compostos por **sete pontos consecutivos** (ou seis intervalos, que é o mesmo), de modo que o intervalo de tempo correspondente a esse percurso é  $\Delta t = 6 \cdot 1/60 \text{ s} = 1/10 \text{ s}$ . Possivelmente, você usará todos os pontos para conseguir esses 10 trechos.

5. Represente os vetores deslocamento  $\overrightarrow{\Delta r}$  em escala 1:1 (1 cm de deslocamento = 1 cm de flecha), ou seja, desenhe uma flecha cuja pena esteja no primeiro ponto do trecho e a ponta de seta, no último.
6. Determine a velocidade média  $v$ , a partir de  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  do puque para cada trecho e a elongação da mola ( $x-x_0$ ); não se esqueça de levar em conta a diferença medida no item 3 acima. A velocidade instantânea no ponto central de cada trecho de trajetória selecionado no item 4 acima (o ponto central é o quarto ponto do trecho) pode ser aproximada pelo valor da velocidade média no trecho. Para obter o módulo do vetor momento angular, é necessário também conhecer a direção da velocidade:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = p(r \sin \theta_{rp}) = mvb$$

onde  $b$  é o braço associado à quantidade de movimento  $\vec{p} = m\vec{v}$  em relação ao ponto central  $\mathbf{O}$  (ponta do pino fixo), que é a distância do centro à reta que contém o segmento que representa  $\overrightarrow{\Delta r}$  – use uma régua e um esquadro para fazer essa construção geométrica. Calcule as energias cinética, potencial e total. Faça um gráfico dos valores de forma conveniente.

### Síntese

---

- Especifique claramente os objetivos do experimento
- Faça uma descrição sucinta das medições realizadas, com suas palavras.
- Determine as estimativas do coeficiente elástico  $k$  e do comprimento natural  $x_0$  da mola, bem como suas incertezas, a partir do ajuste da reta da força em função do comprimento da mola pelo método dos mínimos quadrados; apresente os dados em tabelas e gráficos e represente a reta ajustada no mesmo gráfico em que estiverem os dados experimentais.
- Determine, para cada um dos trechos selecionados, as seguintes grandezas e suas respectivas incertezas:
  - velocidade e quantidade de movimento linear.
  - braço associado ao momento angular ( $b$ ) e momento angular.
  - elongação da mola ( $x-x_0$ ).
  - energias cinética, potencial e total.
 Apresente os resultados em tabelas e gráficos.
- Discuta se houve ou não conservação da energia mecânica total e do momento angular.

## Movimento de Esferas em Meio Viscoso

Determinar a viscosidade de uma substância a partir de medidas da velocidade limite de corpos esféricos em queda através de uma amostra dela.

### Introdução

---

**Fluidos** são substâncias capazes de tomar a forma interna dos recipientes que os contêm. *Quando em equilíbrio* (hidrostático), *fluidos não causam forças tangenciais* (ou de cisalhamento). Fluidos podem ser líquidos ou gasosos e são, todos, compressíveis em maior ou menor grau. Líquidos são pouco compressíveis e, muitas vezes, podem ser tratados como incompressíveis, ao contrário dos gases, que, em geral, têm que ser tratados como compressíveis (um gás só pode ser tratado como incompressível quando houver pouca variação na pressão). Líquidos ocupam volumes definidos e apresentam uma superfície bem definida, enquanto que um gás se expande até ocupar *todo* o volume do recipiente que o contém. A camada de um fluido que toca a superfície de um sólido (tubo, esfera, obstáculo, etc.) está em repouso em relação ao sólido. Quando as velocidades são pequenas, o escoamento de um fluido pode ser descrito de forma simples como um deslizamento de camadas. O fluido "adere" à superfície e apresenta um perfil de velocidades contínuo entre sólidos em movimento relativo. Esse tipo de escoamento é denominado **escoamento laminar**. No caso de velocidades altas, as camadas tendem a se desfazer, e o movimento de um fluido pode ser muito complicado, com redemoinhos (também chamados turbilhões ou vórtices): é o **escoamento turbulento**.

### Viscosidade

A viscosidade pode ser interpretada como a resistência ao movimento de um fluido, que dificulta seu escoamento. Num escoamento laminar, a viscosidade pode ser definida a partir da força necessária para manter duas camadas próximas em movimento relativo com velocidade constante.

A viscosidade depende da temperatura. Para líquidos em geral, a viscosidade diminui com o aumento da temperatura e, nos gases, ao contrário do que se poderia esperar, a viscosidade cresce com a temperatura. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade do coeficiente de viscosidade é o  $N \cdot s/m^2$ , frequentemente escrito como Pa·s (pascal vezes segundo). Na prática, usa-se muito o poise ( $1 P = 1 g/cm \cdot s$ ).

### Lei de Stokes

Ela descreve o movimento de uma esfera de raio  $r$  em um volume infinito de fluido, cuja viscosidade é  $\eta$ , quando o escoamento do fluido em torno da esfera é laminar. Nessa situação, a força de atrito, quando  $v$  é a velocidade da esfera, é dada por:

$$\vec{F}_{a,\infty} = -6\pi \eta r \vec{v} \quad (6.1)$$

O sinal negativo indica que a força é contrária à velocidade, como toda força de atrito. Essa equação é conhecida como *fórmula de Stokes* ou *Lei de Stokes*. A Figura 1 ilustra o diagrama de corpo livre da esfera em queda dentro do fluido.

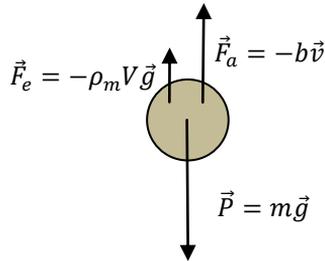


Figura 1. Forças sobre uma esfera de massa  $m$  e volume  $V$  em queda livre, com aceleração local da gravidade  $g$ , em um meio viscoso de densidade  $\rho_m$ , movendo-se para baixo.  $F_e$ ,  $F_a$  e  $P$  são as forças de empuxo, de atrito e peso, respectivamente. A grandeza  $b$  é o coeficiente de atrito viscoso.

### Queda de esferas em meio viscoso

A equação de movimento de um corpo em queda num meio viscoso, quando a força viscosa é dada pela Lei de Stokes, é:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_e - F_a = m^* g - bv \quad (6.2)$$

onde  $b$  é o coeficiente de proporcionalidade da força de atrito viscoso (ver Equação 1) e

$$m^* = (\rho_c - \rho_m)V \quad (6.3)$$

é a *massa aparente* do corpo com volume  $V$  e densidade  $\rho_c$  num meio com densidade  $\rho_m$ . Esta é uma equação diferencial não homogênea, cuja solução vamos escrever como a soma das soluções da equação homogênea com a solução particular

$$v_\infty = \frac{m^* g}{b} \quad (6.4)$$

A solução da equação homogênea  $m \frac{dv}{dt} + bv = 0$  é:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m} t\right) \quad (6.5)$$

A solução geral da equação (2) é, então, a soma das anteriores:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m} t\right) + \frac{m^* g}{b} \quad (6.6)$$

Da condição inicial,  $v(t = 0) = 0$ , resulta:

$$v_0 = -\frac{m^* g}{b} \quad (6.7)$$

Combinando (6.6) e (6.7), temos:

$$v = \frac{m^* g}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \quad (6.8)$$

Para tempos longos, isto é, no limite  $t \rightarrow \infty$ , essa expressão fica

$$v_\infty = \frac{m^* g}{b} \quad (6.9)$$

onde  $b=6\pi\eta r$ , conforme a equação (1).

Resulta que:

$$v_{\infty} = (\rho_c - \rho_m) \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} \quad (6.10)$$

Assim, para uma esfera com raio  $r$ , densidade  $\rho_c$  e velocidade limite  $v_{\infty}$ , temos:

$$\eta = \frac{2}{9} (\rho_c - \rho_m) \frac{r^2 g}{v_{\infty}} \quad (6.11)$$

### **A correção para meios finitos**

No interior de recipientes, a fórmula (6.1) deve ser corrigida, para dar conta da influência das paredes do recipiente no movimento.

Para um recipiente cilíndrico de raio  $R$ , escreve-se

$$F_a = (1 + C) F_{a,\infty}, \quad (6.12)$$

onde

$$C = \alpha \frac{r}{R} + \left( \alpha \frac{r}{R} \right)^2 \quad (6.13)$$

conhecida como correção de Ladenburg. Na literatura, encontram-se valores diferentes de  $\alpha$ , mas em todos os casos  $\alpha \approx 2,4$ .

A velocidade limite é aquela em que a força de atrito, proporcional à velocidade, iguala a força peso, descontado o empuxo. Assim, a correção da força de atrito das fórmulas 12 e 13 acima se reflete diretamente na velocidade limite real, ou seja,

$$v_{limite} = \frac{v_{\infty}}{(1+C)} \quad (6.14)$$

onde  $v_{limite}$  é a velocidade que observamos no tubo real e  $v_{\infty}$  o parâmetro que entra no cálculo da viscosidade na fórmula 11.

A correção para o comprimento finito do tubo é similar e depende da razão  $r/h$ , que neste experimento é bem menor que 0,01 para todas as esferas usadas. Assim, essa correção muda os resultados muito menos que as incertezas experimentais, de modo que pode ser ignorada.

### Outras condições de validade do modelo.

A princípio, numa experiência, nem sempre se consegue fazer com que as condições idealizadas correspondam às que efetivamente ocorrem. Em particular, pode ser que a velocidade não seja de fato  $v_\infty$  porque, simplesmente não se esperou o tempo necessário para ela alcançar a velocidade limite. Uma possibilidade de controle desse erro seria determinar a viscosidade com esferas de diferentes raios e fazer o gráfico do resultado experimental  $\eta$ , calculado pela eq. 11, em função do raio da esfera. Isso permitiria verificar a existência de alguma tendência nos dados e identificar erros sistemáticos. No entanto, aqui vamos calcular teoricamente a posição em que a velocidade limite é atingida e realizar o experimento de modo que sua influência no resultado possa ser ignorada.

Neste arranjo experimental, o diâmetro do tubo que contem o óleo é 50 mm e a maior esfera disponível tem 8 mm de diâmetro. O tempo necessário para que a esfera alcance 95% da velocidade limite,  $v_\infty$  da equação (8), pode ser avaliado a partir da equação (10), substituindo  $v$  por  $0,95 v_\infty$ . Um pouco de álgebra e vemos que o termo  $\frac{m^* g}{b}$  cancela e caímos em uma equação que depende apenas da razão  $b/m$ . A massa da esfera pode ser calculada a partir do seu raio  $r$

$$m = \rho_{\text{aço}} V = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

onde  $\rho_{\text{aço}}$  é a densidade do aço  $\rho_{\text{aço}} \sim 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e a razão entre a viscosidade e a densidade do óleo,  $\eta / \rho \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , que é o valor adequado para as condições experimentais, dentro de um fator no máximo igual a 2 (ou seja, é possível ter certeza que  $2 \cdot 10^{-4} < \eta / \rho < 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Verifique que esse tempo é de centésimos de segundo e, como a velocidade limite é menor que 1 m/s para todas as esferas que usaremos, o percurso da esfera nesse intervalo de tempo é menor que 10 cm.

### Procedimento Experimental

---

Este experimento destina-se a determinar a viscosidade do óleo (o parâmetro  $\eta$ ) a partir da velocidade limite de esferas de diferentes raios em queda num tubo preenchido com essa substância. Estima-se a velocidade limite pelo tempo que a esfera demora em atingir o fim do tubo, obtida com um cronômetro manual, e o comprimento do percurso no tubo, medido com uma escala milimetrada. Note que a equação (10) relaciona viscosidade com a velocidade limite em um

recipiente de raio infinito, o que não é o caso do tubo deste experimento, de modo que a velocidade limite *precisa* ser corrigida pelo fator de Ladenburg.

Observe que a velocidade limite dada pela equação (9) corresponde ao tempo infinito. Como isso não é realizável, na prática se avalia quando o corpo alcança mais que 95% da velocidade limite e usa-se a posição correspondente para iniciar a medição, o que acarreta um pequeno erro na medida – pequeno porque, nas condições experimentais do nosso arranjo, a esfera fará a maior parte do percurso até o fundo do tubo a uma velocidade ainda mais próxima da velocidade limite do que aquela em que se inicia a cronometragem.

- 1) Meça a temperatura e a densidade do óleo e o raio interno do tubo no início do experimento.
- 2) Marque dois níveis de referência no tubo, um a cerca de 10 cm ou pouco mais<sup>7</sup> da superfície do óleo e outro a uma distância do fundo de 10 cm, um pouco mais ou um pouco menos.
- 3) Escolha uma esfera, meça seu diâmetro com o micrômetro algumas vezes (6 repetições são suficientes) e verifique que ela é quase perfeita. Daqui para frente, trabalhe com a hipótese de que todas as esferas que vai usar são perfeitas, o que lhe permite medir somente uma vez o diâmetro e *usar a precisão do micrômetro como desvio-padrão do diâmetro*.
- 4) Começando pela menor esfera, meça o seu diâmetro (*uma única medição do diâmetro*, uma vez que são praticamente esféricas), segure-a com a pinça<sup>8</sup>, abandone-a na boca do tubo e meça o tempo de queda entre as duas marcas; para reduzir a incerteza na cronometragem, os dois membros da equipe devem efetuar a medição, simultaneamente.
- 5) Repita a operação do passo anterior com as esferas de todos os diâmetros disponíveis. No caso das esferas de menor diâmetro, abaixo de 6 mm, obtenha pelo menos 6 cronometragens e, com as esferas de diâmetro maior que 6 mm, repita a cronometragem pelo menos 10 vezes.
- 6) Meça novamente a temperatura do óleo, de modo a dispor desse dado tanto no início como no final do experimento.

---

<sup>7</sup> Procure posicionar o marcador de modo que consiga visualizar bem a passagem da esfera pelo anel, sem fazer grandes malabarismos, que podem comprometer a cronometragem.

<sup>8</sup> Manter a esfera na mão pode aquecer o metal e alterar o resultado, uma vez que a viscosidade depende bastante da temperatura. Assim, use a pinça para levá-la à boca do tubo e não a mantenha na palma da mão ou entre os dedos.

1. Determinar o valor médio e respectiva incerteza para o tempo de queda de cada esfera: usar o tempo médio das várias cronometragens e seu desvio-padrão da média.
2. Fazer o gráfico da velocidade em função de  $r^2$  e verificar que essas duas grandezas não são diretamente proporcionais, apesar dessa ser a previsão da equação (10).
3. Calcular  $v_\infty$  para cada raio de esfera, bem como o respectivo desvio-padrão, a partir a velocidade limite real (fórmula 13) com a correção de Ladenburg (fórmula 12) no cálculo.
4. Calcular  $\eta = \frac{2}{9}(\rho_c - \rho_m)\frac{r^2 g}{v_\infty}$  para cada raio de esfera; no cálculo do desvio-padrão, desprezar a contribuição da incerteza de  $r$  na correção de Ladenburg.
5. Calcular o valor médio da viscosidade  $\eta$ ; como cada valor tem um desvio-padrão diferente, usar a média ponderada dos dados, onde o peso de cada dado é igual ao *inverso* do quadrado do desvio-padrão (fórmula 3.2, do experimento do pêndulo simples).
6. Comparar o resultado experimental obtido para a viscosidade do óleo,  $\eta$ , com o valor nominal esperado.
7. Verificar se o experimento permite parametrizar a correção de Ladenburg:
  - Supor que basta considerar o termo de primeiro grau na correção de Ladenburg
  - Determinar a relação analítica entre o raio  $r$  da esfera e o dado experimental,  $v(r)$ , por meio das fórmulas 6.10 e 6.14 e usando a correção de Ladenburg (6.13) SEM substituir o valor  $\alpha$  pelo valor típico. Você deve obter a expressão:  $\frac{1}{v} = A_0 + A_1 \frac{1}{r} + A_2 \frac{1}{r^2}$ , onde  $A_2 = \frac{9\eta}{2g(\rho_c - \rho_m)}$  e  $A_1 = \frac{\alpha}{R} A_2$ .
  - Ajustar  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  pelo método dos mínimos quadrados (vide apêndice VI); para isso, faça a transformação  $y = \frac{1}{v(r)}$ , de modo que  $\sigma_y = y \frac{\sigma_v}{v}$ , e adote como variável independente a grandeza  $x = \frac{1}{r}$ , cuja incerteza pode ser ignorada.
  - Calcular a viscosidade  $\eta$  a partir de  $A_2$ , usando os valores conhecidos ou medidos das demais grandezas.
  - Calcular o fator  $\alpha$  a partir da razão  $A_1/A_2$  e do raio  $R$  do tubo e compare com o valor típico ( $\alpha=2,4$ ).

## Relatório

---

A ênfase deste relatório está em discutir a validade das leis físicas e das aproximações necessárias ao experimento a partir de dados experimentais e sua análise.

Você deve apresentar um relatório completo: resumo (dizer o que se procurava, como se procedeu e o que se achou, em 200 palavras ou menos); introdução teórica; descrição do procedimento experimental e da análise de dados; apresentação dos dados e dos resultados (inclusive as incertezas) em forma de gráficos e tabelas; discussão do experimento, baseada nos **SEUS** resultados, à luz dos modelos aplicáveis ao fenômeno, que devem estar explicados na introdução teórica, e uma conclusão.

Os pontos principais que você deve abordar a partir dos **SEUS** resultados são:

- Agora que você dispõe dos valores *experimentais* da velocidade limite, verifique se a avaliação do tempo necessário para que a esfera alcance 95% da velocidade limite estava correta e se a escolha de 10 cm abaixo da superfície do fluido foi adequada.
- Apresente uma tabela com os diâmetros das esferas e a velocidade limite atingida, com a correção de Ladenburg, e o valor da viscosidade do óleo ( $\eta$ ) considerando cada esfera (eq. 11).
- Apresente o valor médio da viscosidade do óleo, calculado como a média ponderada dos valores obtidos com as esferas de diâmetros diferentes, e compare esse valor com o valor nominal esperado.
- Apresente o gráfico da velocidade em função de  $r^2$  e verifique, a partir dos seus resultados, que ele não é uma reta.
- Apresente a função ajustada pelo método dos mínimos quadrados, em particular os coeficientes  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$ , e compare o valor da viscosidade do óleo ( $\eta$ ) obtido com o valor nominal esperado. Determine também o fator  $\alpha$  da correção de Ladenburg e compare com o valor típico ( $\alpha=2,4$ ).
- A partir desses resultados, discuta se esse experimento permite verificar a adequação da correção de Ladenburg.

## Trabalho mecânico vs. energia térmica (antigo Equivalente Mecânico do Calor)

Neste experimento, vamos comparar as ordens de grandeza da energia produzida em duas situações muito diferentes na aparência. Por um lado, realizaremos um trabalho mecânico com uma força que vai deslocar um objeto mecânico e, por outro, obteremos energia com a transformação química de uma pequena quantidade de matéria. Quando ainda não se havia entendido que calor é energia de movimento dos átomos e moléculas, era necessário medir a relação entre energia mecânica, medida em joules, e energia térmica, medida em calorias, uma relação conhecida como *Equivalente Mecânico do Calor*, mas hoje essa ideia de equivalência não faz mais sentido. Além disso, a 9ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1948, banuiu a caloria do Sistema Internacional de unidades, e, hoje, a energia térmica também deve ser medida em joules, de modo que também não é necessário determinar a relação entre a caloria e o joule. A ideia de equivalente mecânico tem, porém, importância histórica e nos dará os elementos para comparar concretamente as ordens de grandeza típicas da energia em fenômenos associados ao deslocamento de objetos mecânicos extensos (por exemplo, um avião) com aqueles da matéria que realiza processos químicos (a queima de querosene na turbina do avião).

A caloria foi definida originalmente como a quantidade de energia necessária para aquecer 1 g de água, mas logo se verificou que essa quantidade de energia varia com a temperatura. Isso permitiu várias definições, tais como a energia necessária para aquecer a água de 14,5 a 15,5 °C, ou 1% da energia para aquecer a água de 0 a 100 °C, com valores entre 4,184 a 4,187 J. Por causa dessa ambiguidade, essa unidade foi abandonada na física, mas ela ainda é usada em outros ramos da ciência e tecnologia. Nosso interesse na caloria é que ela define uma grandeza que integra o cotidiano e que servirá para orientar a comparação que pretendemos estabelecer entre a energia de movimento de corpos extensos com a energia das transformações químicas.

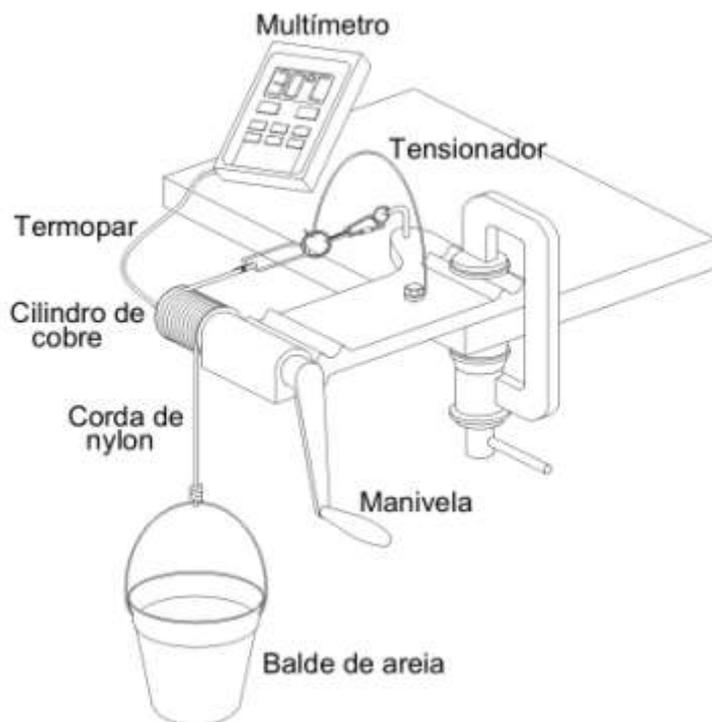
### Introdução

---

O princípio da conservação da energia estabelece que a *energia* térmica resultante da transformação *exclusivamente em calor* do trabalho mecânico de uma força deve ser *idêntica* à quantidade de trabalho realizado. Assim, o arranjo experimental consistirá em um dispositivo mecânico com um reservatório de calor ligado a um termômetro, de modo que possamos medir o aquecimento desse reservatório pelo acionamento controlado do dispositivo.

## Método experimental

A Figura 1 é um esquema do equipamento disponível no laboratório didático para o estudo desse fenômeno. Quando se roda a manivela, se realiza trabalho sobre o cilindro de cobre, por causa da fricção da corda de nylon enrolada nele e que está pressionada pela força peso de um saco de areia, que está preso na outra extremidade da corda. O truque do aparelho é escolher o peso da areia igual à força de atrito cinética entre o cilindro e a corda, o que se constata pelo fato da corda ficar frouxa do lado do tensionador da figura. Dessa forma, o torque que age sobre o cilindro será constante e mensurável, enquanto o operador mantiver o movimento e não permitir que a corda estique.



**Figura 1.** Desenho esquemático da montagem a ser utilizada para a comparação entre ordens de grandeza típicas dos movimentos macroscópicos com os das reações químicas e transformações termodinâmicas.

Com o movimento do cilindro, o atrito entre ele e a corda converte o trabalho realizado pela manivela em calor, que aumenta a temperatura do cilindro. A partir do aumento da temperatura do cilindro é possível determinar a energia térmica que foi para o cilindro. A razão entre o trabalho realizado pela

manivela e a energia térmica transferida ao cilindro é que era chamada de equivalente mecânico do calor.

Neste experimento, vamos medir o aquecimento do cilindro de cobre devido a uma quantidade controlada de energia mecânica e determinar a capacidade térmica do cilindro. A seguir, mediremos o aquecimento desse cilindro pela queima de um palito de fósforo e, do aumento de temperatura resultante e da capacidade térmica medida na etapa anterior, deduziremos a energia obtida da queima do palito.

Do procedimento experimental, poderemos comparar os tempos necessários ao aquecimento pela via do atrito e da queima, bem como a quantidade de matéria envolvida na reação de combustão do fósforo com aquela envolvida na produção da energia mecânica.

Das grandezas extensivas que determinaremos – capacidade térmica do cilindro de cobre e energia de combustão do palito de madeira – obteremos as grandezas intensivas: calor específico do cobre e calor de combustão por unidade de massa (poder calorífico) da lenha seca, que poderão ser comparados com valores tabelados. Finalmente, a partir da razão entre o calor específico do cobre e o da água –  $1,00 \text{ cal}/(\text{g } ^\circ\text{C})$  – determinaremos quantos joules equivalem a uma caloria, o antigo equivalente mecânico do calor e, hoje, simplesmente um fator de conversão de uma unidade em desuso na Física, a “caloria”, para a unidade adotada como padrão de energia.

### Fundamentos teóricos

---

O trabalho realizado por meio da manivela sobre o cilindro é igual a  $W = \int \tau d\theta$ , onde  $\tau$  é o torque que atua sobre o cilindro,  $\theta$  é o ângulo que mede a posição do cilindro e a integral deve ser efetuada sobre toda a rotação do cilindro. Se a manivela é virada com velocidade constante, o torque da força externa (que você faz sobre a manivela) é igual ao torque da força de atrito e, se a corda permanecer frouxa na parte que se liga à mesa, então o torque realizado pela força de atrito será igual ao torque devido ao peso, de modo que o torque do atrito (cujo deslocamento é a fonte de energia) pode ser calculado através da equação:

$$\tau = MgR \quad (7.1)$$

onde  $M$  é a massa pendurada na corda,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $R$  o raio do cilindro de cobre.

A cada volta completa, o cilindro roda de um ângulo  $2\pi$  radianos, de modo que o trabalho total do torque do atrito após  $N$  voltas do cilindro (ou da manivela) será:

$$W = \tau\theta = MgR (2\pi)N \quad (7.2)$$

O aumento de temperatura do cilindro é

$$Q = mc(T_f - T_i) = W \quad (7.3)$$

onde  $m$  é a massa do cilindro,  $c$  o calor específico do cobre,  $T_i$  a temperatura inicial e  $T_f$  a temperatura final.

Se substituirmos na equação acima o aumento observado da temperatura e o valor do trabalho mecânico da relação (8.2), podemos deduzir  $c$ ; se substituirmos o aumento de temperatura e o valor conhecido de  $c$ , podemos determinar o valor do calor transferido. O *Equivalente Mecânico do Calor (J)* era definido como a razão entre o trabalho realizado e o calor produzido:

$$J = \frac{W}{Q}$$

Por uma questão de precisão experimental, precisaremos corrigir a condução de calor do cilindro de cobre para o resto do sistema, seja para o meio ambiente, seja para a corda e o eixo da manivela. A quantidade de energia conduzida para fora do cilindro é difícil de calcular e de medir, mas podemos supor que ela só dependa da diferença de temperatura e considerar que o calor fluirá para fora ou para dentro do cilindro conforme o cilindro estiver mais quente ou mais frio, respectivamente, que os outros objetos. Se supusermos que o sinal da diferença de temperatura somente afete o sentido da transferência de calor e não o módulo do calor transferido, então poderemos compensar a perda de calor enquanto o cilindro está a uma temperatura maior que o entorno simplesmente começando a aquecê-lo a uma temperatura mais baixa que a ambiente, de modo que a temperatura média entre a inicial e a final seja aproximadamente igual à temperatura ambiente.

#### Procedimento Experimental

---

- 1) Determine a massa do saco de areia com uma balança adequada.
- 2) Meça a temperatura ambiente,  $T_a$ , e a temperatura do cilindro de cobre no início do experimento, que deve ser próxima à temperatura ambiente.
- 3) Gire a manivela 50 voltas e anote o aumento da temperatura do cilindro,  $\Delta T$ . Esta medição é preliminar, somente para determinar as condições ótimas do experimento, e não deve entrar no cálculo da capacidade térmica do cilindro.
- 4) Remova o cilindro de cobre e resfrie-o com água gelada até que fique abaixo da temperatura ambiente, mais ou menos à temperatura

$T_i = \left(T_a - \frac{\Delta T}{2} - 3\right) ^\circ\text{C}$  e recolque-o no eixo da manivela; não se esqueça de repor o termopar no lugar.

- 5) Assim que a temperatura do cilindro for aproximadamente  $T_i = T_a - \frac{\Delta T}{2}$ , gire a manivela 50 voltas e anote as temperaturas no início e no final do movimento da manivela. Repita o procedimento dos itens 4 e deste aqui pelo menos 5 vezes, para que possa estimar a incerteza da medição do aquecimento.
- 6) Determine a massa e o comprimento de um palito de fósforo; sugerimos que coloque 10 palitos na balança para melhor precisão.

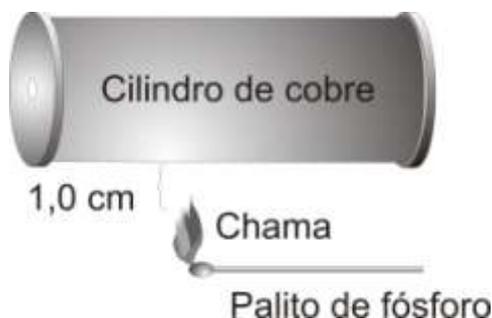


Figura 2. Esquema do aquecimento do cilindro de cobre pela chama do fósforo, que ilustra a distância entre a chama e o cilindro.

- 7) Utilizando um palito de fósforo, verifique o aumento da temperatura ao manter o topo da chama a uma distância de aproximadamente 1 cm do cilindro de cobre (veja figura 2) por um intervalo de tempo de cerca de 10 segundos; apague o palito antes de removê-lo de perto do cilindro.
- 8) Meça o tamanho do pedaço do palito que não queimou.

## Análise

---

- a) Calcule o aumento médio de temperatura do cilindro de cobre observado nas etapas 4 e 5 do procedimento experimental e determine a capacidade térmica  $C = mc$  do cilindro de cobre a partir das equações 7.2 e 7.3.
- b) Determine a massa da parte queimada do palito de fósforo, supondo que a massa se distribua uniformemente pelo palito.
- c) Determine a energia  $Q$  fornecida pelo palito de fósforo a partir da equação 7.3, usando seu valor calculado para  $C$  no item a; ignore a perda de calor para o ar.
- d) Determine o calor específico do cobre a partir de  $C$  do item a e da massa do cilindro de cobre.
- e) Determine o poder calorífico da lenha,  $q$ , a partir dos resultados dos itens b e c.
- f) Determine o valor de 1 cal em joules, sabendo que o calor específico do cobre é 0,094 vezes o da água, que é 1,00 cal/(g °C).

## Síntese

---

- Especifique os objetivos do trabalho prático.
- Faça uma descrição sucinta do experimento realizado, com suas palavras.
- Apresente os dados obtidos.
- Apresente os resultados para: a capacidade térmica do cilindro,  $C$ ; o calor gerado pela combustão do palito,  $Q$ ; o calor específico do cobre,  $c$ ; o poder calorífico da madeira,  $q$ , e o valor em joules obtido para uma caloria.
- Faça uma discussão. Compare a eficácia da chama em aquecer o cilindro com a de seu trabalho manual. A fim de ter mais um elemento de discussão, calcule o número de litros de diesel que têm um calor de combustão igual à energia cinética de um ônibus em movimento a 72 km/h e o número de litros de querosene de aviação necessários para ter um calor de combustão igual à energia cinética de um grande avião em velocidade de cruzeiro. Busque os dados que precisar na internet.
- Apresente uma conclusão geral do trabalho realizado.

## Medida de Momento de Inércia com um Pêndulo de Torção

Neste experimento, vamos determinar a dependência do período de um pêndulo de torção com os parâmetros envolvidos, em particular o comprimento do fio que sustenta o corpo de prova e seu momento de inércia. A partir desse resultado, pode-se desenvolver um método de medida do momento de inércia baseado no período de um pêndulo de torção, cuja viabilidade está condicionada à independência das propriedades do fio com a tração provocada pelo peso do corpo.

### Introdução

---

O momento de inércia pode ser entendido como o equivalente, no caso de uma rotação, daquilo que a massa representa no movimento de translação. Assim, quanto maior o momento de inércia, maior a resistência a mudanças na velocidade *angular* e, por isso, o momento de inércia é também chamado de *inércia rotacional*.

Neste experimento, determina-se o momento de inércia de anéis usando um pêndulo de torção, que consiste em um disco de massa  $m$  suspenso por um fio, que gira em torno de seu eixo de simetria, como pode ser visto na Figura 1.

Pode-se dizer que um fio resiste à torção de modo semelhante ao que uma mola resiste a mudanças de comprimento. O fio, quando é torcido de um ângulo pequeno  $\theta$ , produz um torque restaurador ( $\tau_F$ ) proporcional à torção,

$$\tau_F = -\kappa\theta \quad (8.1)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\kappa$  é inversamente proporcional ao comprimento  $L$ :

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{L} \quad (8.2)$$

onde  $\kappa_0$  é uma característica do fio, independente de seu comprimento, relacionada apenas com o material e o diâmetro do fio.

A equação de movimento para a rotação de um corpo em torno de um eixo *fixo* na direção  $Oz$ , em que  $\theta$  mede o ângulo de rotação em torno desse eixo, é:

$$\tau_z = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (8.3)$$

em que  $\tau_z$  é a componente na direção  $Oz$  do torque resultante que atua sobre o corpo,  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  é a aceleração angular e  $I$  o momento de inércia do corpo *em*

relação ao mesmo eixo  $Oz$ . No caso do pêndulo de torção do experimento, se pudermos considerar que o torque resultante é apenas devido ao fio ( $\tau_z = \tau_F$ ), obteremos:

$$-\kappa\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (8.4)$$

Esta é uma equação diferencial de um tipo bastante comum na Física e sua solução representa um movimento harmônico, no caso referente à variação do ângulo  $\theta(t)$  ao redor da posição de equilíbrio do pêndulo. A solução da Eq. 4 é

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.5)$$

com

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (8.6)$$

e  $\theta_m$  a amplitude máxima de oscilação. A constante  $\varphi$  (denominada fase ou ângulo de fase) é determinada pelas condições iniciais do movimento. Da Eq. 5 deduziremos o tempo ( $T$ ) em que o corpo retorna à posição inicial, isto é, o intervalo que faz o argumento do cosseno variar em  $2\pi$  radianos. Esse intervalo, chamado *período*, é obtido das Eqs. 5 e 6:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (8.7)$$

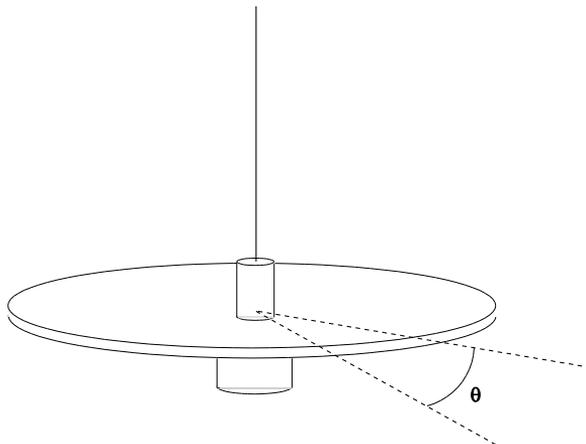


Figura 1: Esquema do pêndulo de torção, que consiste em um disco suspenso por um fio de aço. O ângulo de rotação  $\theta$  corresponde ao deslocamento angular de qualquer ponto fixo ao disco em torno do eixo de rotação que passa pelo fio.

Substituindo nessa equação a fórmula [2], que relaciona a constante do torque de restauração com o comprimento do fio e  $\kappa_0$ , estabelecemos a relação entre o período e a constante do material,  $\kappa_0$ ,

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{IL}{\kappa_0} \quad (8.8)$$

onde também ambos os membros foram elevados ao quadrado, para realçar o fato de que é o *quadrado* do período que é proporcional ao comprimento do fio.

Neste experimento, vamos mudar o momento de inércia do corpo simplesmente adicionando outro objeto sobre o que está preso ao fio. O momento de inércia de um corpo é a soma dos momentos de inércia de suas diversas partes. Assim, se em uma primeira etapa medimos o período de um corpo com momento de inércia  $I_1$ , obtemos

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_1 L}{\kappa_0} \quad (8.9)$$

e, quando acrescentamos um outro corpo com momento de inércia  $I_2$ , o período vai para

$$T_{1+2}^2 = 4\pi^2 \frac{(I_1+I_2)L}{\kappa_0} \quad (8.10)$$

Dividindo as duas últimas equações membro a membro, elimina-se a dependência com a constante  $\kappa_0$  do material, na hipótese que ela independa da tração no fio, e relaciona-se  $I_1$  com  $I_2$  e a razão entre os dois períodos. Assim, obtemos uma expressão que permite calcular um momento de inércia a partir do outro, se usamos o valor experimental da razão dos períodos.

### Procedimento Experimental

---

1. Meça as dimensões das várias peças que constituem o pêndulo de torção e anote as massas, já marcadas em cada uma delas.
2. Meça as dimensões e a massa do anel adicional.
3. Meça o *comprimento* do fio.
4. Com um comprimento fixo do fio ( $L$ ), mais ou menos na metade entre o maior e o menor tamanhos praticáveis no seu equipamento, meça o período do pêndulo sem o anel ( $T_1$ ) e depois repita o procedimento com o anel adicional ( $T_{1+2}$ ). Para cada um dos dois arranjos, cronometre 3 períodos e repita a medição 10 vezes, a fim de obter boas estimativas dos desvios-padrões.

Se você estiver substituindo uma experiência com síntese, pare por aqui e vá analisar os dados; consulte o roteiro para a respectiva síntese. Caso contrário, se

you are **substituting an experience with a report**, continue with the following operations.

5. Remove the ring and position the disk on the string, without the ring, so that the length of the string ( $L$ ) is the *largest* possible (without exaggeration). Measure  $L$  and make a unique timing of 3 periods.
6. Without moving the disk on the string, place the ring and make a unique timing of 3 periods.
7. Remove the ring, reposition the disk about 10 cm above, measure  $L$  and time 3 periods; increase the ring, without moving the disk, and make a unique timing of 3 periods.
8. Repeat the procedure of the previous item until the length of the string ( $L$ ) is the *smallest* possible (without exaggeration).

#### Síntese (para quem está repondo uma aula)

---

- a) Specify the objectives of the practical work.
- b) Make a concise description of the experiment performed, with its words.
- c) Determine the theoretical relationship between the moment of inertia of the ring ( $I_2$ ) and the moment of inertia of the base of the pendulum ( $I_1$ ) and the ratio of the periods and explain the calculation performed.
- d) Present the data obtained by means of tables.
- e) Determine the value and the uncertainty of the moment of inertia of the pendulum of torsion *starting from its dimensions and masses*,  $I_{1t}$ . Make a calculation analogous for the moment of inertia of the ring,  $I_{2t}$ .
- f) Determine the value and the uncertainty of the moment of inertia of the ring,  $I_{2e}$ , starting from the ratio of periods measured experimentally and the value of the moment of inertia of the base of the pendulum calculated starting from the dimensions ( $I_{1t}$ ).
- g) Compare  $I_{2t}$  with  $I_{2e}$ .
- h) Present a general conclusion of the work performed.

#### Relatório (para quem está repondo duas aulas)

---

Follow all the steps of the synthesis and also the following:

- i) Make a graph of the period squared as a function of the length for the two bodies on the string. For the standard deviation of  $T^2$  use 
$$\sigma = \sqrt{4T^2(\sigma_T)^2 + T^4 \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$
 and include the error bars in the graph.

- j) Ajuste, pelo Método dos Mínimos Quadrados, as retas previstas pela Eq. 8 para os períodos do pêndulo sem o anel e com o anel adicional. Represente as retas ajustadas no gráfico do item anterior.
- k) Com os valores das inclinações das retas obtidos na etapa precedente e dos momentos de inércia calculados a partir das dimensões e massas ( $I_{1t}$  e  $I_{2t}$  do passo  $e$  acima), calcule  $\kappa_{0,1}$  e  $\kappa_{0,1+2}$  usando a expressão 8.
- l) Faça uma discussão com os seguintes pontos:
- Os dados experimentais confirmam que o quadrado do período depende linearmente do comprimento do fio?
  - Compare os valores  $\kappa_{0,1}$  e  $\kappa_{0,1+2}$  tendo em conta as incertezas experimentais. Seu resultado experimental indica que  $\kappa_0$  é independente da tração no fio, ou não?
  - Se houvesse tempo para refazer esta experiência, qual grandeza deveria ser mais bem determinada para que a precisão dos resultados fosse melhor: o período de oscilação  $T$  ou o comprimento  $L$  do fio? (Dica: procure entender a fórmula do passo  $i$  acima). Que mudanças no procedimento experimental poderiam ser efetuadas para atingir esse objetivo?

## Rolamento em Plano Inclinado

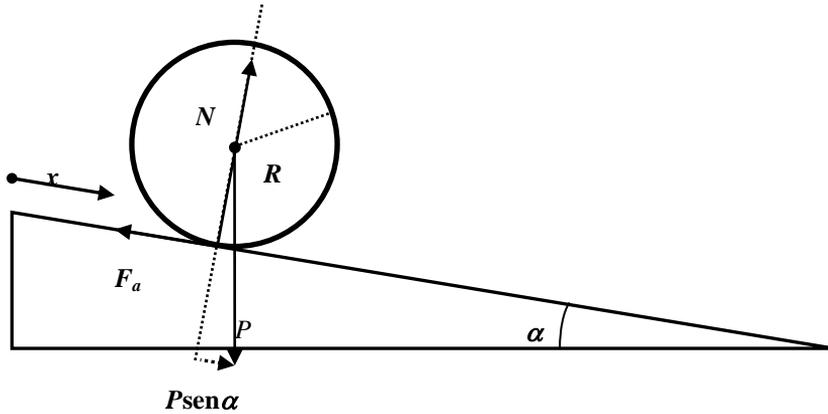
Determinar os tempos de queda de objetos cilíndricos rolando sem escorregamento em um plano inclinado e relacioná-los com a distribuição de massa dos objetos.

### Introdução

---

Considere um objeto cilíndrico, cuja massa está distribuída simetricamente em torno do eixo, de modo que seu centro de massa está no eixo do cilindro. Neste experimento, esse objeto é colocado no plano inclinado para se deslocar numa direção perpendicular ao eixo. O torque da força-peso em relação ao centro de massa é nulo, bem como o da força normal à superfície. Assim, na ausência de atrito entre o cilindro e o plano, o corpo deslizaria sem que nenhum torque externo atuasse sobre ele e sua velocidade angular de rotação em torno do Centro de Massa (CM) seria constante; se o cilindro fosse abandonado parado no topo do plano, ele deslizaria escorregando pelo plano! Normalmente, como no nosso experimento, há atrito, que produz um torque em relação ao CM e o cilindro *rola* plano abaixo. Assim, a dinâmica do movimento do cilindro inclui sua rotação e, consequentemente, a aceleração do objeto não depende apenas da massa do cilindro, mas também da maneira com que ela se distribui no cilindro.

Em certas condições, o corpo rola pelo plano *sem deslizar*. Nesse caso, a linha de contato entre o cilindro e o plano forma o **eixo instantâneo de rotação**, isto é, são os pontos do cilindro encostados ao plano que têm velocidade nula. Esse conjunto de pontos do corpo que está parado em relação ao plano, porém, *muda* de posição continuamente em relação ao plano, por isso esse nome “instantâneo”. É preciso lembrar o que significa “eixo de rotação” para entender que ele não precisa ser fixo no espaço, somente tem que ser capaz de simplificar a descrição da rotação, de modo que a velocidade  $v$  de cada ponto do corpo a uma distância  $r$  do eixo siga a lei simples  $v = \omega r$  com uma mesma velocidade angular  $\omega$  no **instante** considerado, independente da variação de  $\omega$  com o tempo. Além disso, “parado” não significa sem aceleração e os pontos que constituem o eixo instantâneo de rotação têm aceleração na direção perpendicular ao plano, de modo que aos poucos o antigo eixo se afasta do plano e outra linha do cilindro encosta no plano, para formar o novo eixo instantâneo de rotação.



No entanto, ao invés de montar a equação de movimento usando o eixo instantâneo de rotação, vamos seguir o procedimento mais geral, de separar o movimento de translação do CM da rotação em torno do CM. Assim, começamos com o cálculo do torque  $\mathfrak{T}$  devido à força de atrito em relação ao CM e sua relação com a aceleração angular  $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$  do cilindro:

$$\mathfrak{T} = F_a R = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (9.1)$$

onde  $F_a$  é a força de atrito e  $R$  e  $I$  são o raio e o momento de inércia do cilindro, respectivamente. A equação de movimento de translação do CM é:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \operatorname{sen} \alpha - F_a \quad (9.2)$$

onde  $M$  é a massa total do cilindro,  $\alpha$  é o ângulo do plano em relação à horizontal,  $g$  a aceleração da gravidade no local e  $x$  a posição do CM no plano.

Com as definições acima, a condição de rolamento sem deslizamento pode ser expressa como:

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \quad (9.3)$$

Note que, em experimentos reais, esta condição pode não ser obedecida, o que constitui uma possível fonte de erro sistemático das medidas em questão. Quando ocorre deslizamento, entra em ação o atrito cinético e a força tem um valor máximo, determinado pelo coeficiente de atrito dinâmico.

O momento de inércia deve ser calculado da mesma forma usada na experiência sobre pêndulo físico, que, neste caso de um cilindro oco de massa  $M$  com raio externo  $R$ , raio interno  $r$  e densidade constante, dá:

$$I = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2) \quad (9.4)$$

Quando aplicada a um cilindro maciço,  $r = 0$ , dá o resultado que conhecemos para um disco e, para uma casca cilíndrica,  $r = R$ , o do anel fino.

Das fórmulas (4.1) a (4.4), obtém-se a seguinte equação diferencial para o movimento de translação de um cilindro oco:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{K} \quad (9.5)$$

onde  $K$  é um parâmetro adimensional dependente da distribuição da massa  $M$  no volume do objeto. Para um cilindro maciço homogêneo  $K = 3/2$ , enquanto que para uma massa concentrada numa “casca” de raio  $R$  (isto é, para  $r \approx R$ ),  $K=2$  (verifique estes resultados).

A solução da equação (4.5) é:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2K} t^2 \quad (9.6)$$

Usando  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$  para as condições iniciais, o tempo  $t$  para percorrer a distância  $x$  é dado por:

$$t = \sqrt{\frac{2Kx}{g \operatorname{sen} \alpha}} \quad (9.7)$$

### Procedimento Experimental

---

- 1) Disponha uma tábua sobre a mesa com um calço de um lado, formando um plano inclinado de um ângulo de aproximadamente 15 mrad com relação ao plano horizontal.
- 2) Solte simultaneamente dois cilindros metálicos, um de Alumínio e outro de Latão de mesma forma exterior e com aproximadamente a *mesma* massa. Os cilindros chegam ao fim do percurso juntos ou significativamente afastados? O que pode ser concluído qualitativamente desse resultado?
- 3) Meça a altura do plano inclinado para determinar o ângulo de inclinação pela sua tangente; repita a medição da altura 5 vezes, em pontos diferentes da borda do plano, a fim de estimar a incerteza do ângulo. Meça cerca de 10 vezes o tempo de queda no plano inclinado para cada um dos dois cilindros.
- 4) Repita o procedimento do item 3, mas com o calço do lado oposto da tábua. Como a mesa pode não ser perfeitamente horizontal (com um pequeno ângulo de desnível  $\beta$ ), deve ser feita uma “média” com os resultados do item 3, de forma a reduzir o erro sistemático. Use a fórmula:  $t = \sqrt{\frac{2t_1^2 t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}}$ , onde  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos de queda com inclinação  $\alpha + \beta$  e  $\alpha - \beta$ , correspondentes aos itens 3 e 4. (Deduz a fórmula).

- 5) Meça o tempo para diferentes percursos na tábua, usando o cilindro maciço. Para isso, marque 3 linhas adicionais, a 70; 280 e 630 mm da linha de lançamento e cronometre o tempo de cada um dos 4 percursos, seguindo o mesmo procedimento de repetir 10 vezes a cronometragem para cada percurso.
- 6) Faça um gráfico de  $t^2$  em função de  $x$  e verifique se seus pontos estão alinhados; neste momento, não se preocupe se a reta passa pelo zero ou não, nem se ela se ajusta muito bem aos dados; isso ficará para a análise quantitativa.

### Relatório

---

Neste relatório, a ênfase está na descrição do experimento realizado e na apresentação dos dados obtidos. Vamos também aplicar o método dos mínimos quadrados aos dados de deslocamento em função do tempo.

- 1) Especifique os objetivos do trabalho prático.
- 2) Faça uma breve introdução teórica, que inclua a dedução da equação (5) e indique quais são as condições experimentais sob as quais ela é válida.
- 3) Demonstre que  $K = 3/2$  se o corpo for um cilindro maciço homogêneo e  $K = 2$  se for uma casca cilíndrica de raio  $R$ .
- 4) Deduza a fórmula do item 4 do procedimento experimental.
- 5) Apresente os materiais usados e descreva *com suas palavras* o experimento realizado.
- 6) Apresente os dados experimentais, usando gráficos e tabelas, devidamente numerados e legendados.
- 7) Determine  $K$  para os dois cilindros a partir dos tempos médios de percurso medidos no item 4 do procedimento experimental. Use a fórmula (7) e não deixe de calcular o desvio-padrão de  $K$ , propagando as incertezas do tempo e do ângulo de inclinação do plano; explique porque não é necessário incluir a incerteza no tamanho da pista que o cilindro rola.
- 8) Com o método dos mínimos quadrados, ajuste a função  $x = v_0 t + \gamma t^2$ , onde  $x$  é a posição do cilindro a partir da linha de lançamento, com os dados do item 5 do procedimento experimental. Despreze a incerteza na medida direta da posição e use  $\sigma_x = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3} t \sigma_t$ , que é o resultado da transformação da incerteza no tempo em incerteza na posição, calculado com a hipótese de que  $v_0 \sim 0$  e usando o valor esperado para  $\gamma$ .
- 9) Determine  $K$  e  $x_0$  a partir de  $\gamma$ , usando a expressão (6).

- 10) Confronte os resultados obtidos pelos dois métodos experimentais, entre si e com as expectativas teóricas.
- 11) Discuta se é possível concluir algo de quantitativo com relação à distribuição de massa do cilindro de latão.
- 12) Apresente sugestões de como melhorar o experimento.
- 13) Apresente uma discussão e conclusões gerais do trabalho realizado.

# I - LEIS DE CONSERVAÇÃO

## Introdução

---

O texto a seguir tem por objetivo apoiar as experiências sobre as leis de conservação da mecânica. Em diferentes arranjos experimentais deverá ser investigada a conservação (ou não) da energia, da quantidade de movimento (momento linear) e do momento angular (quantidade de movimento angular). A metodologia adotada nas experiências será essencialmente a mesma de qualquer experiência de cinemática: Medem-se as posições e tempos do(s) corpo(s) em movimento e se calculam as grandezas de interesse em função do tempo, no caso, as diferentes formas de energia, a energia total e as quantidades de movimento linear e angular. As energias do sistema deverão, sempre que possível, ser graficadas num mesmo sistema de eixos ( $E \times t$ ). Quando de interesse, as grandezas vetoriais momento linear e momento angular podem ser analisadas decompondo-as num sistema de eixos e tratando-as algebricamente ou desenhando-as como flechas em escala num diagrama, sempre tendo como pano de fundo as leis de conservação da mecânica.

## As leis de conservação na mecânica

---

A descoberta das leis da dinâmica, ou das leis do movimento, foi um momento relevante na história da ciência. Antes de Newton, o movimento de corpos tais como planetas era um mistério - podia apenas ser descrito sem entender exatamente o porquê. Com Newton, veio o entendimento. Até os pequenos desvios das leis de Kepler para o movimento dos planetas devido às perturbações entre eles, passaram a ser calculados. Note que as leis de Kepler apenas descrevem o movimento, enquanto que as Leis de Newton permitiram a previsão do movimento a partir de princípios fundamentais. Também o movimento de pêndulos, osciladores com molas e pesos, e outros dispositivos podiam ser analisados completamente após as leis de Newton terem sido enunciadas.

O Princípio da Inércia enunciado por Galileu foi um grande avanço na compreensão do movimento dos corpos: Um corpo não perturbado permanece em movimento retilíneo com velocidade constante caso esteja em movimento ou permanece parado se estiver parado. Todavia este não parece ser um caso comum na natureza. Se movermos um objeto sobre uma mesa, o movimento em geral cessa, assim que pararmos de empurrá-lo. Isto ocorre simplesmente porque, ao largar o objeto, ele de fato não foi deixado de ser perturbado, mas ainda se encontra sob ação da mesa, cujo atrito promove o freamento. O Princípio da

Inércia é, aparentemente, contrário à nossa experiência diária e certamente necessitou um bocado de imaginação para ser enunciado.

Inicia-se o estudo da mecânica pela cinemática, ou seja, a descrição do movimento. Com a dinâmica estudam-se as causas do movimento. Com Newton, a dinâmica pode ser totalmente resumida em três leis:

1ª lei: É na verdade uma reedição do princípio da inércia: Na ausência de forças a velocidade de um corpo, em qualquer sistema de referência inercial, não se altera.

$$2^{\text{a}} \text{ lei: } \vec{F}_{\text{res}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

3ª lei: À ação num corpo corresponde uma reação de módulo igual e de sentido contrária no corpo que produz a ação.

Note que velocidade é uma grandeza vetorial! Não alterar a velocidade significa que não se alteram o módulo, a direção nem o sentido.

As três leis de Newton podem ser usadas para descrever os movimentos de todos os corpos desde que se conheçam as leis das forças que neles atuam. O cálculo nem sempre é simples. No caso do movimento de um ou dois corpos, pode-se até obter uma solução analítica (é o que fizemos até agora no curso de física). O cálculo de um sistema planetário é muito mais complexo. A descrição do movimento de cada molécula num volume gasoso é praticamente impossível. Ocorre que existem grandezas, que podem ser derivadas dessas três leis, cuja abrangência e utilidade excedem a da própria mecânica. Três grandezas serão estudadas a seguir:

- A energia
- A quantidade de movimento linear
- O momento angular

## Energia

Energia é um conceito extremamente importante em física. Energia não é uma substância física, não é um fluido. Energia é uma grandeza que pode ser calculada e cuja utilidade reside no fato de se conservar. Está presente em todo lugar e em muitas formas diferentes. É comum definir energia como a

capacidade de realizar trabalho, enquanto que trabalho é uma forma transferência de energia de um sistema para outro. Essa definição circular é imprecisa e deve ser evitada. Também é comum se referir a um objeto como “possuidor” de uma certa quantidade de energia e então calcular quanta energia foi transferida desse objeto para outro. A energia de um objeto depende do referencial adotado e por isso não é uma característica do objeto. Pelo contrário, energia é uma grandeza calculada, baseada em medidas realizadas num determinado sistema de referência. Dessa forma, interessam apenas as transformações de energia de uma forma para outra, dado que seu valor absoluto depende do sistema de referência. Apesar dessa “indefinição” do valor da energia de um objeto, o conceito de energia em física é muito importante uma vez que se verificou que, num sistema isolado, a energia se conserva, qualquer que seja seu valor.

A energia de um sistema isolado é constante.

Existem várias formas de energia e sua multitude é justamente um dos complicadores para sua identificação. Entre muitas de suas formas, temos a energia cinética, a energia potencial, energia térmica, energia luminosa, etc.

Num sistema isolado, a energia pode ser convertida de uma forma em outra, mas não pode ser criada nem destruída. Na frase acima a palavra chave é *isolado*. Na prática, nenhum sistema está totalmente isolado, mas em geral é possível estabelecer condições em que se controlam as formas de energia e as possíveis transformações. A conservação da energia é um postulado, baseado na observação, e não pode ser provado. A conservação da energia é um conceito tão bem estabelecido na física, que quando acontece de falhar, inventa-se nova forma de energia para explicar a diferença. A energia térmica e a energia do campo eletromagnético foram inventadas justamente para satisfazer o princípio da conservação da energia. Outro exemplo ocorreu em 1930 quando Wolfgang Pauli postulou a existência do neutrino, observado apenas em 1953, para satisfazer a conservação da energia e do momento linear no decaimento  $\beta$ .

### As várias formas de energia

Energia cinética (K). É a forma de energia associada ao movimento de um objeto. A energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{I.1}$$

## **Energia térmica**

É um tipo de energia interna dos corpos devido ao movimento aleatório de seus átomos e moléculas. Pode ser transferida de um corpo a outro, apenas por diferenças de temperatura. Note que a relação entre temperatura e energia do corpo pode ser muito complicada, quando o corpo não for gasoso. Calor sim é a energia transferida.

Energia térmica é uma energia interna.

A energia térmica pode ser gerada a partir do atrito entre dois corpos em que a energia de movimento (cinética) é convertida em calor. Neste caso, por depender da forma em que ocorreu o movimento, a energia térmica depende da trajetória do corpo. Em mecânica, a energia térmica é de recuperação difícil. Em geral a energia térmica, resultante de atrito, é dada como dissipada, isto é, “perdida” para outra forma de energia não aproveitável mecanicamente.

## **Energia potencial**

É uma forma de energia que depende apenas da posição do corpo em um campo de força. A energia potencial está sempre associada a um tipo de força, denominada força conservativa, que por sua vez também depende apenas da posição do corpo.

Energia potencial é uma energia de posição

A energia potencial não depende da trajetória ou da velocidade do corpo. Força conservativa é um tipo especial de força, que permite armazenar energia mecânica de um sistema na forma de energia potencial, dependente apenas da configuração do sistema (leia-se posição de cada componente do sistema em um dado referencial). A força gravitacional, a força entre cargas elétricas e a força elástica de uma mola são exemplos de forças conservativas.

Não há uma função padronizada para o cálculo da energia potencial de um sistema, que deve ser calculada a partir da definição do trabalho da força conservativa correspondente: a variação da energia potencial de um sistema é igual ao negativo do trabalho realizado pela força,

$$\Delta U = -\Delta W \quad (\text{I.2})$$

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F}(x) d\vec{x} \quad (\text{I.3})$$

Note que  $U_a$  pode ser escolhido arbitrariamente e é muito comum usar  $U_a=0$  J. Dessa forma, a energia potencial elástica de uma mola, cuja força é dada por  $\vec{F} = -k\vec{x}$ , é dada por:  $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$ , onde  $x$  é a distância da posição de *equilíbrio* ( $F = 0$ ). A energia potencial de um corpo submetido a um campo de força uniforme (força gravitacional na superfície da Terra) é  $U = mgh$ , onde  $h$  é a altura medida a partir de um referencial qualquer.

### A conservação da energia mecânica

Partindo da 2ª Lei de Newton, num sistema em que  $\vec{F}_{res} = \vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ , o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  é dado por:

$$\Delta W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}' = \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{x}' \quad (\text{I.4})$$

que resulta em:

$$\Delta W = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = \Delta K \quad (\text{I.5})$$

O trabalho realizado é igual a variação de energia cinética. Se a força for conservativa,  $\Delta U = -\Delta W$ , donde se conclui que  $\Delta K = -\Delta U$ , ou seja:

$$E = K_a + U_a = K_b + U_b \quad (\text{I.6})$$

que demonstra a conservação da energia mecânica para um sistema isolado com forças conservativas.

### **A conservação do momento linear**

Partimos da segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (\text{I.7})$$

onde  $\sum \vec{F}$  é a resultante (soma) de todas as forças externas aplicadas. Na ausência de forças externas, ou seja, quando  $\sum \vec{F} = 0$ , temos que:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \quad (\text{I.8})$$

De onde se conclui que

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{constante} \quad (\text{I.9})$$

O produto  $\vec{p} = m\vec{v}$  é denominado momento linear e a equação (I.9) enuncia sua conservação na ausência de forças externas.

### **A conservação do momento angular**

A segunda lei de Newton pode ser reescrita em coordenadas angulares:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{I.10})$$

bastando lembrar as definições do torque ( $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ) e do momento angular ( $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ).

Novamente, na ausência de torques externos o momento angular se conserva.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante}$$

Assim como a energia, o momento linear e o momento angular dependem do referencial. Todavia, uma vez que a resultante das forças (ou torques) externos seja nula, garante-se a conservação dos momentos.

## II - EXPRESSÃO DE VALORES DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS

### Introdução

O valor de uma grandeza submetida a medição costuma ser determinado por meio de um procedimento que, em geral, envolve algum(ns) instrumento(s) de medição. O próprio processo de medida, assim como o instrumento usado, tem limites de *precisão* e *exatidão*, ou seja, toda medida realizada tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido. A seleção do processo de medida, do instrumento usado e a reprodutibilidade do resultado obtido têm que ser expressas de alguma forma. Em alguns aparelhos, por exemplo, a incerteza do instrumento já vem marcada, caso contrário, a metade da menor divisão da escala é um bom começo. Note que nada sabemos ainda sobre a reprodutibilidade do processo de medida.

A incerteza é importante na hora de compararmos resultados. Na tabela abaixo, temos os resultados de duas medidas de uma mesma grandeza com diferentes aparelhos e um padrão.

medida	viscosidade ( $\text{g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$ )
A	$9,8 \pm 0,2$
B	$12,3 \pm 4,0$
padrão	9,30

Na tabela, o valor  $\sigma$  após o símbolo “ $\pm$ ” indica em geral o desvio-padrão, que, junto com o valor médio  $x$ , define um intervalo que tem ~68% de probabilidade de conter o valor da grandeza:

$$P(x - \sigma \leq x_0 \leq x + \sigma) = 68\%.$$

Esse intervalo  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  é chamado *intervalo de confiança*<sup>9</sup> e o valor da probabilidade, *de nível de confiança*<sup>9</sup>. O conceito associado ao valor que segue o símbolo “ $\pm$ ” é o de *incerteza*<sup>10</sup>. No caso acima, apesar da medida A estar

<sup>9</sup> Em física e engenharia é comum definir o intervalo de confiança de um desvio padrão, ao qual se associa 68% de probabilidade de conter o valor da grandeza. Em outras áreas, tais como epidemiologia, saúde e ciências médicas, dois ou até três desvios padrão, que correspondem a níveis de confiança mais elevado, são bastante comuns.

<sup>10</sup> Deve-se evitar o termo *erro* para a incerteza. Se uma medida tem um erro de natureza não aleatória, este deve ser corrigido!

aparentemente mais próxima do padrão, sua incerteza, expressa pelo intervalo de confiança, indica um provável erro de medida ou de avaliação de incerteza, enquanto o valor da medida B, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor do padrão.

### Algarismos significativos

Em medidas físicas é fácil encontrar uma dispersão de valores muito grande. O raio de um átomo e o raio de uma galáxia são exemplos entre tantos outros. Para expressar esses valores adequadamente, é conveniente o uso da notação científica. Escreve-se o valor com apenas um dígito antes da vírgula, completam-se com algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e se multiplica tudo pela potência de dez, adequada. Por exemplo, o comprimento de um fio vale 14269513 mm ou é da ordem de  $1,43 \times 10^7$  mm. Note que se usaram apenas dois algarismos após a vírgula, sendo que o último foi arredondado para “cima” uma vez que 1,4269... está mais próximo de 1,43 que de 1,42. A regra de arredondamento aqui proposta é aumentar em uma unidade o número do último dígito quando o da próxima casa for  $\geq 5$ , mantendo-o, no caso contrário<sup>11</sup>. Note que ao truncar ou arredondar as casas decimais, podemos perder informação, o que pode ser evitado usando quantos algarismos forem necessários depois da vírgula; por exemplo  $1,4269513 \times 10^7$  mm reproduz o valor 1426951 com toda sua precisão.

Denomina-se *algarismo significativo* cada um dos algarismos que compõem o valor de uma grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda usados para acerto de unidades. Mas, atenção: ZEROS À DIREITA SÃO SIGNIFICATIVOS. Na tabela a seguir, um mesmo valor do raio de uma roda é escrito com diferentes números de algarismos significativos.

raio (mm)	Algarismos significativos
57,896	5
$5,79 \times 10^1$	3
$5,789600 \times 10^1$	7
$0,6 \times 10^2$	1

<sup>11</sup> Outra regra de arredondamento difere apenas no que se faz quando o dígito a ser suprimido for o 5: arredonda-se o anterior para cima se ele for ímpar e mantém-se, se par. A regra proposta no texto é comum nas calculadoras e planilhas de computadores.

A escolha de quantos significativos usar para representar o valor da grandeza depende da própria grandeza, do processo de medida e do instrumento utilizado. Quando se trata da representação de um valor experimental, ou qualquer outro, sujeito a incerteza na determinação, o número de significativos é determinado pela sua incerteza.

**O NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS DA REPRESENTAÇÃO DE UM VALOR EXPERIMENTAL É DETERMINADO PELA SUA INCERTEZA**

O exemplo seguir ilustra essa questão. Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro na Figura II.1.

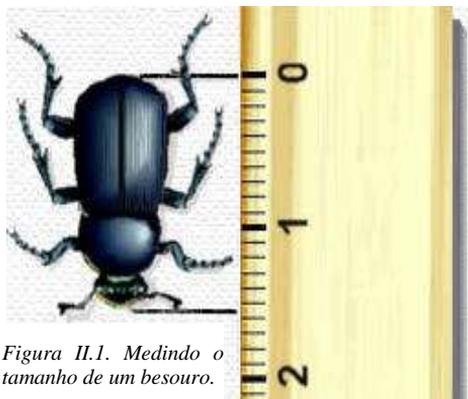


Figura II.1. Medindo o tamanho de um besouro.

Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro, qual das alternativas abaixo expressa melhor o seu tamanho?

- a) Entre 0 e 1 cm
- b) Entre 1 e 2 cm
- c) Entre 1,5 e 1,6 cm
- d) Entre 1,54 e 1,56 cm
- e) Entre 1,546 e 1,547 cm

Acertou quem optou pela alternativa d). Isso porque, na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito (duvidoso). Uma vez que a régua foi marcada em milímetros, você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa a medida. Você pode não precisar se vale 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56, em consequência da *incerteza* na medida.

Outro exemplo: Qual o diâmetro da moeda na Figura II.2?

Figura II.2.  
Medindo o  
diâmetro de uma  
moeda.



- a) Entre 0 e 2 cm
- b) Entre 1 e 2 cm
- c) Entre 1,9 e 2,0 cm
- d) Entre 1,92 e 1,94 cm
- e) Entre 1,935 e 1,945 cm

No exemplo acima, podemos afirmar que a metade da menor divisão é uma estimativa da nossa incerteza: portanto o diâmetro da moeda pode ser expresso como:

$$1,92 \pm 0,05 \text{ cm}$$

$$1,92(5) \text{ cm}$$

### **EXPRESSÃO DA INCERTEZA**

Como devemos expressar a incerteza de uma medida? Que grandeza usamos para expressá-la? **Quantos significativos** deve ter o valor da incerteza de uma medida?

Nesta disciplina, sempre usaremos um desvio-padrão da média para expressar a incerteza da média, que é a prática na Física e corresponde a um intervalo de confiança de probabilidade relativamente baixa. Em relação ao número de significativos, adotaremos a seguinte convenção<sup>12</sup>:

- Se o primeiro dígito significativo do desvio-padrão for menor que 3, usaremos DOIS significativos.

---

<sup>12</sup> Conforme Vuolo (1992) e Inmetro (1998).

- Caso o primeiro dígito significativo do desvio-padrão for maior ou igual a 3, usamos UM algarismo significativo, exceto se ele foi determinado a partir de muitos dados, quando usam-se dois significativos.

*Atenção: quando a incerteza resulta de uma estimativa, de um chute ou de convenções aproximadas, como a metade da menor divisão da escala de um instrumento, sugerimos usar apenas UM dígito significativo. Não tem sentido, por exemplo, expressar a incerteza de uma régua milimetrada com DOIS significativos (0,50 mm), basta escrever 0,5 mm.*

### **EXPRESSÃO DA GRANDEZA**

- Usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza como para sua incerteza.
- O número de algarismos significativos da incerteza é dado pela regra acima.
- O número de dígitos depois da vírgula na incerteza tem que ser o mesmo que o do valor da medida.
- A notação científica pode e deve ser usada para melhor legibilidade.

Veja alguns exemplos abaixo. Note a correspondência entre o número de casas decimais do desvio e do mensurando.

notação errada	notação correta
$5,30 \pm 0,0572$	$5,30 \pm 0,06$
$124,5 \pm 11$	$125 \pm 11$
$(45 \pm 2,6) \times 10^1$	$(45,0 \pm 2,6) \times 10^1$
$0,0000200 \pm 0,0000005$	$(200 \pm 5) \times 10^{-7}$

\* A última linha expressa uma notação inconveniente, embora correta.

## Conceitos básicos para expressão de incertezas

O texto a seguir é uma adaptação do Guia para Expressão da Incerteza de Medição publicada pelo INMETRO (1998). Infelizmente, normas metrológicas são um assunto um tanto burocrático, mas também é parte da linguagem científica que precisamos dominar. Não houve de modo algum a pretensão de exaurir o assunto. Ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, recomendamos fortemente consultar a referência citada.

### Medição

---

O objetivo de uma **medição** é determinar o **valor** do **mensurando**, isto é, o valor da **grandeza específica** a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** e do **procedimento de medição**.

- **Medição:** conjunto de operações que têm por objetivo determinar um valor de uma grandeza.
- **Valor (de uma grandeza):** expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número. *Exemplo: comprimento de uma barra: 5,34m*
- **Mensurando:** grandeza específica submetida à medição. *Exemplo: temperatura de fusão da glicerina.*
- **Grandeza (mensurável):** atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo “grandeza” pode se referir a uma grandeza em sentido geral (*comprimento, tempo, massa...*) ou **grandeza específica** (*comprimento de uma barra, resistência elétrica de um fio*). Os símbolos das grandezas estão definidos na norma ISO 31.
- **Método de medição:** seqüência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições. *Exemplos: método de substituição, método diferencial, método de “zero”...*
- **Procedimento de medição:** conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. *Um procedimento (de medição) deve ser descrito em um documento com detalhes suficientes para permitir que outro experimntador execute a medição sem informações adicionais*

## Resultado de uma medição

---

Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando e, assim, só é completa quando acompanhada pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries (ou um conjunto) de observações obtidas sob **condições de repetitividade**.

- **Resultado de uma medição:** valor atribuído a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado se refere à *indicação*, se é um *resultado corrigido* ou *não corrigido* e se corresponde ao *valor médio de várias medições*. A expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza da medição.
- **Estimativa:** valor de uma estatística (*uma fórmula em que entram os dados experimentais e sai o resultado que representa a grandeza*) usada para estimar um parâmetro (*a média, por exemplo*) da totalidade de itens (*em geral infinito*), obtido como resultado de uma operação sobre uma amostra (*em geral um conjunto limitado de dados*) supondo um determinado modelo estatístico das funções de probabilidade (*distribuição normal, por exemplo*).
- **Incerteza (de medição):** parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor de um mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, contribuem para a dispersão.
- **Repetitividade (de resultados de medições):** grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição.

*Condições de repetitividade* incluem:

- mesmo procedimento de medição
- mesmo observador
- mesmo instrumento de medição sob as mesmas condições
- mesmo local
- repetição em curto período de tempo

## Erros e incertezas

---

Deve-se atentar e distinguir com cuidado os termos “*erro*” e “*incerteza*”. Esses termos não são sinônimos, ao contrário, representam conceitos completamente diferentes. Não devem ser confundidos nem mal empregados.

### Erro

---

Uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** no resultado da medição. O erro costuma ser classificado em dois componentes: **erro aleatório** e **erro sistemático**. O erro aleatório tem origem em *efeitos* aleatórios, que causam variações imprevisíveis, incontroláveis e impossíveis de medir. Esses efeitos são a causa das variações em observações repetidas do mensurando. O erro aleatório não pode ser compensado, mas pode, na média, ser reduzido pelo aumento no número de observações. Apesar de freqüentemente citado, o desvio padrão da média não é o erro aleatório da média. Representa, sim, uma medida da incerteza da média devido aos efeitos aleatórios. O erro sistemático, em geral, não pode ser eliminado, mas pode eventualmente ser reduzido ou, caso seja identificado, deve ser corrigido.

### Estatísticas

---

Quando se trabalham com vários resultados em condições de repetitividade de uma medição, usam-se algumas estatísticas para resumir e consolidar as informações obtidas. Vamos discutir esse assunto por meio de um exemplo: ao tentar determinar o tempo de queda de um corpo, um aluno mediu uma única vez o evento.

Tendo a incerteza do aparelho utilizado, poderíamos ter uma idéia do acerto do aluno. Mas a incerteza cobre apenas o erro do aparelho e não a do aluno ou mesmo do procedimento experimental. O problema que se coloca é: Como determinar a incerteza de uma medida?

## COMO DETERMINAR A INCERTEZA DE UMA MEDIDA?

Uma abordagem alternativa para este problema seria medir várias vezes o mesmo tempo e calcular a *média*. A variabilidade de cada medida é dada pelo

*desvio padrão* e a variabilidade da média (caso se obtenham várias médias) será dada pelo *desvio padrão da média*<sup>13</sup>.

O problema é que, para o valor mais provável a partir de médias, determinar desvios-padrão e desvio-padrão de médias exige que se façam INFINITAS medidas e definitivamente não temos tempo para isso! Vamos, portanto ESTIMAR o valor mais provável, o desvio padrão e o desvio padrão da média para um conjunto pequeno de medidas. O desenvolvimento teórico e a justificativa para esse procedimento podem ser encontrados nos textos básicos de estatística, como por exemplo, Helene e Vanin (1981).

A média, o desvio padrão e o desvio padrão da média, para um conjunto finito com  $n$  dados podem ser estimados aplicando as equações a seguir.

**Média de uma amostra com  $n$  valores:**

$$m = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (\text{II.1})$$

**Desvio padrão de uma amostra:**

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - m)^2} \quad (\text{II.2})$$

---

<sup>13</sup> É comum encontrar a afirmação de que se fazem muitas medidas de uma mesma grandeza para melhorar um resultado. Isto nem sempre é verdade. A incerteza de um processo de medida é uma característica do processo expresso pelo desvio padrão, que independe do número de medidas (para  $n$  grande, tipicamente  $n > 10$ ). É verdade que ao realizar muitas medidas pode-se obter um valor médio mais próximo do valor mais provável, uma vez que o desvio padrão da média (que expressa a incerteza da média) varia com  $1/\sqrt{n}$ . Entretanto, raramente se usa essa abordagem em medidas diretas (não estocásticas). Na prática, quando se deseja uma medida com incerteza menor, procura-se simplesmente um procedimento ou um instrumento melhor (um micrômetro no lugar de um paquímetro, por exemplo). A verdadeira razão de se repetir uma medida várias vezes é para estimar seu desvio padrão.

### Desvio padrão da média com $n$ valores:

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum (x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{II.3})$$

Uma maneira gráfica de analisar estatisticamente esses dados é através de um histograma ou gráfico de barras. Neste tipo de gráfico, para uma visualização mais direta, a abscissa é dividida em intervalos iguais, que se chamam canais.

Há 3 grandezas que podem ser graficadas em histogramas: a *freqüência absoluta*,  $f_a$ , a *freqüência relativa*,  $f_r$ , e a *densidade de probabilidade*,  $dp$ . A freqüência absoluta é o gráfico onde a ordenada representa a quantidade absoluta de termos dentro de um canal. Freqüência relativa tem na ordenada a fração da quantidade de termos dentro de um canal. No gráfico de densidade de probabilidade  $dP = fr/\Delta x$ , grafica-se na ordenada o resultado da divisão de  $f_r$

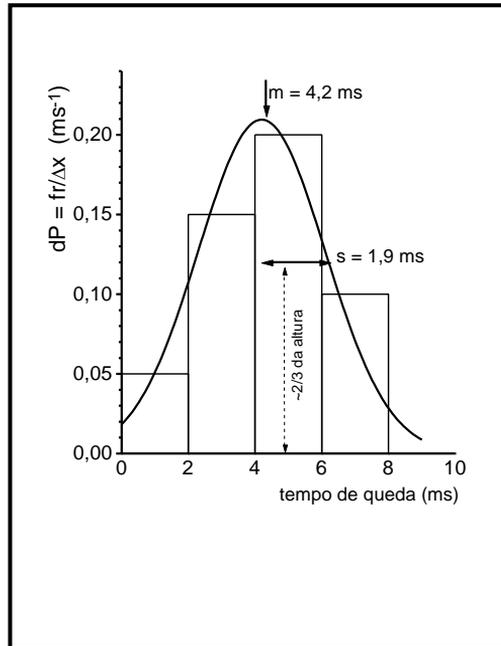


Fig. II.3. Histograma dos tempos de queda de um corpo.

pele tamanho da cela,  $\Delta x$ . Neste caso a área do gráfico é a probabilidade de ocorrer o valor contido na cela ou intervalo (daí o nome *densidade de probabilidade*). Este último tem a vantagem de independer do tamanho da cela,

valendo até mesmo para histogramas com canais de tamanho variável, pois a área total é sempre unitária! Veja o exemplo a seguir:

Tabela II.1: Tempos de queda de um corpo, em ms.

4.93	0.77	7.01
2.21	6.00	5.17
4.12	5.40	2.56
3.83		

Tabela II.2: Análise estatística dos tempos.

Cela	Intervalo	$f_a$	$f_r=f_a/n$	$dp=f_r/\Delta x$
1	0,00  — 2,00	1	0,10	0,05
2	2,00  — 4,00	3	0,30	0,15
3	4,00  — 6,00	4	0,40	0,20
4	6,00  — 8,00	2	0,20	0,10

Note que  $n = 10$  é a quantidade de dados e o intervalo é representado por um símbolo que, no caso, exclui o valor máximo da cela.

O histograma dos dados na Tabela II.1 está na Figura II.3 acima. Note que a escala do eixo  $y$  está em unidades de densidade de probabilidade, que tem unidades de  $\text{ms}^{-1}$ . Para valores aleatórios distribuídos de acordo com a lei Normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , o histograma de  $dP$  pode ser modelado por uma curva contínua, também denominada Gaussiana, dada por:

$$dP = \left( \frac{f_r}{\Delta x} \right) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-0,5*(x-m)^2}{s^2}\right) \quad (\text{II.4})$$

onde  $m$  é a estimativa da média e  $s$  é a estimativa do desvio padrão. Neste histograma, ajustamos uma curva e estimamos sua tendência central,  $m$ , ou seja, a média, e sua largura,  $s$ , o desvio padrão.

O desvio padrão pode ser estimado graficamente, calculando o valor de  $x$  para o qual  $|x-m| = s$ . Neste caso, a equação (II.4) vale:

$$dP(|x-m|=s) = Y_o \exp\left(\frac{-0,5*(s)^2}{s^2}\right) \quad (\text{II.5})$$

onde  $Y_o$  é a altura do máximo da curva. Daí resulta que o desvio padrão pode ser estimado graficamente como a metade da largura total de uma gaussiana medida aproximadamente a 2/3 da altura, pois

$$dP_s = Y_o \exp(-0.5) = 0.61 Y_o \approx \frac{2}{3} Y_o \quad (\text{III.6})$$

Note também que a área do histograma da Figura II.1. é unitária, assim como a área da gaussiana.

### III - PROPAGAÇÃO DE ERROS E INCERTEZAS

#### Introdução

Um *processo de medida* tem sempre por objetivo determinar o *valor médio verdadeiro*,  $y_{mv}$ , de uma *grandeza*, cujo *valor verdadeiro* é  $y_v$ . Acontece que, em geral, o valor verdadeiro nos é desconhecido, e para se obter o valor médio verdadeiro são necessárias infinitas medidas!

Dessa forma, para um conjunto de medidas,  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ , o valor médio verdadeiro é dado por:

$$y_{mv} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (\text{III.1})$$

Como em geral  $y_{mv}$  é um valor inacessível, usam-se *estimativas*: a média dada pela equação II.1, a estimativa do desvio padrão (eq. II.2) e do desvio padrão da média (eq. II.3).

Apenas lembrando alguns termos novos que usaremos com frequência:

**MENSURANDO:** Grandeza a ser determinada num processo de medição.

**VALOR VERDADEIRO:** Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medida perfeito.

**INCERTEZA:** Parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuídos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

**ERRO:** É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exatidão (acurácia).

**ERRO SISTEMÁTICO:** Erro constante característico do processo ou instrumento.

**ERRO PADRÃO:** Desvio padrão dos valores médios em relação ao valor verdadeiro.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser ‘corrigido’, enquanto a incerteza é um intervalo de confiança das medidas. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

### **Exemplo 1. Medida da tensão de uma pilha:**

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de  $1\sigma = 0,25\%$  do valor indicado. A incerteza do processo de medida deve, portanto ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. Os resultados obtidos nas medições estão na Tabela III.1.a.

**Tabela III.1.a. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)**

n	U (volt)	incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004
4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Antes, um comentário: a tabela III.1.a acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo, tabela III.1b.

**Tabela III.1b. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)**

n	U ± 0,004 (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Vamos aos cálculos. Note que, em cálculos intermediários, usamos um dígito significativo a mais, para apenas no final expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior.

**Valor médio:** 
$$\bar{U} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i = 1,5763 \text{ V}$$

**Desvio padrão das medidas:** 
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^6 (V_i - 1,5763)^2} = 0,0066 \text{ V}$$

**Desvio padrão do valor médio:**

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,0066}{\sqrt{6}} = 0,0027 \text{ V}$$

**Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida)**

$$L_r = \left( \frac{0,25}{100} \right) 1,5763 = 0,0039 \text{ V}$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do processo de medição) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medidas, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Uma única medida, por exemplo a primeira medida na Tabela 2.1b, pode ser expressa como:

$$U_1 = (1,572 \pm 0,007)V$$

A incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal citada na tabela 2.1. Tivemos que fazer uma série de medidas para determinar o NOSSO desvio padrão.

Uma vez que realizamos uma série de 6 medidas, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e seu desvio padrão (o desvio padrão da média). Portanto nosso resultado ficaria assim:

$$\bar{U} = (1,5763 \pm 0,0027)V$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um erro de calibração. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com voltímetros diferentes? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar a incerteza de calibração do mesmo, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse. (*Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho vagabundo?*). Podemos supor, então, que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal. Dessa forma, é possível que instrumentos diferentes indiquem valores diferentes para uma mesma medida, nesse nosso caso, com um desvio padrão de 0,004V. Caso tenhamos em nosso laboratório mais que um voltímetro do mesmo modelo, temos que incorporar esse “desvio padrão de calibração” em nosso

resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada erro padrão, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão de calibração do instrumento:

**Erro padrão:**

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + L_r^2} = 0,0048\text{V}$$

Finalizando, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$$\bar{U}_p = (1,576 \pm 0,005)\text{V}$$

Afinal, qual o valor que devemos usar? Depende. Para comparar séries de medidas no mesmo instrumento, podemos usar a média  $\bar{U}$  e o desvio padrão da média. Para comparar medidas entre si, basta o desvio padrão. Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.

## PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

---

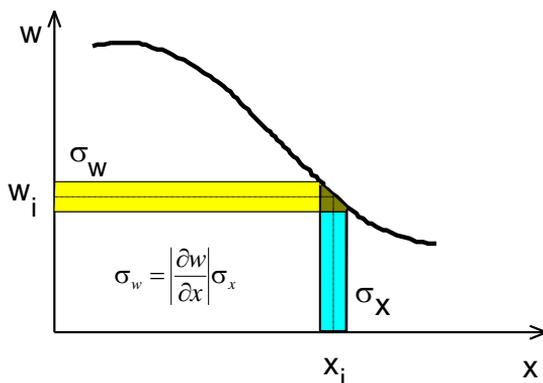
Muitas vezes usaremos o valor do mensurando numa equação para determinar outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o mensurando temos a incerteza do processo de medida, enquanto, que para grandezas determinadas através de fórmulas, temos a incerteza propagada.

### Cálculo da propagação de incertezas

---

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função  $w = w(x, y, z)$  onde  $x, y, z$  são grandezas experimentais com incertezas dadas por  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  e independentes entre si, quanto vale  $\sigma_w$ ? A independência entre  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar, suponha  $w$  apenas função de  $x$ . No gráfico abaixo está representando  $w(x)$ .



A incerteza de  $w$ , neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção da incerteza de  $x$ . Para pequenos intervalos no eixo  $x$ , temos em primeira ordem:

$$\sigma_w = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \sigma_x \quad (\text{III.2})$$

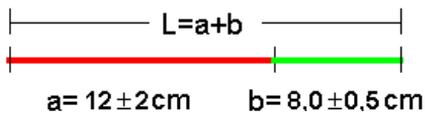
Para mais de uma variável, sendo estas independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

$$\sigma_w^2 = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (\text{III.3})$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

#### A) Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos:



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação (III.3):

$$\begin{aligned} \sigma_L^2 &= \left( \frac{\partial L}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial L}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 \\ &= 1 \cdot \sigma_a^2 + 1 \cdot \sigma_b^2 \end{aligned}$$

que resulta:

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

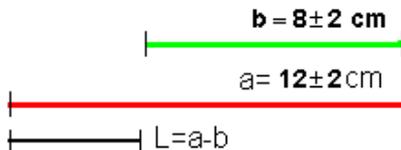
$$\sigma_L = 2,06 \text{ cm}$$

Logo

$$\mathbf{L = (20,0 \pm 2,1) \text{ cm}}$$

### B) Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente usando a equação (2.3):

$$\begin{aligned}\sigma_L^2 &= \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \\ &= 1 \cdot \sigma_a^2 + 1 \cdot \sigma_b^2\end{aligned}$$

resulta:  $\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$$\sigma_L = 2,8 \text{ cm}$$

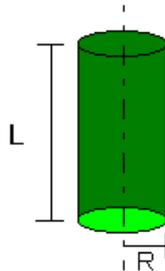
Logo

$$L = (4,0 \pm 2,8) \text{ cm}$$

Note que, na **soma**, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas, na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

### C) Multiplicação de grandezas experimentais: volume de um cilindro

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



$$V = \pi R^2 L$$

$$R = 2,0 \pm 0,5 \text{ cm}$$

$$L = 10,0 \pm 0,5 \text{ cm}$$

Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto:  $\pi$ ,  $R$  e  $L$ .

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \\ &= (R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)^2 \sigma_L^2\end{aligned}$$

dividindo por  $V^2$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_V^2}{V^2} &= \frac{(R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)^2 \sigma_L^2}{(\pi R^2 L)^2} \\ \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2\end{aligned}$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidos na figura:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \quad \text{(i)}$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2,0} \quad \text{(ii)}$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right) = \frac{0,5}{10,0} \quad (\text{iii})$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,05^2} = 0,5025$$

MUITO IMPORTANTE: Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa  $\sigma_V/V$ . NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (V) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA. Multiplicando  $\sigma_V$  por V e ajustando o número de significativos...

$$\sigma_V = 0,5025 \times V = 0,5025 \times 125,7 = 63$$

O resultado do volume do cilindro vale:

$$V = (126 \pm 63) \text{ cm}^3$$

ou ainda

$$V = (13 \pm 6) \times 10 \text{ cm}^3$$

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações pode ser resumido como segue:

**Na soma ou subtração**, a incerteza absoluta do resultado é a soma em quadratura das incertezas absolutas.

**Na multiplicação ou divisão**, a incerteza relativa do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta).

NOTA: por *soma em quadratura* entende-se a raiz quadrada da soma dos quadrados...

No Quadro 2.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Uma importante regra prática pode ser obtida se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Logo:

**Qualquer termo menor que 1/3 do maior termo na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e em geral, pode ser desprezado (critériosamente!).**

Exemplificando: Volte para o exemplo A, a soma de dois segmentos: Lá calculamos o resultado de :

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

observe que  $0,5^2 \ll 2^2$ , ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria  $\sigma_L = 2 \text{ cm}$ , não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Algebricamente: sejam  $x_1$  e  $x_2$  os termos de uma soma em quadratura com  $x_2 = k x_1$ . A soma em quadratura resulta:

$$S = \sqrt{x_1^2(1+k^2)} \quad (\text{III.4})$$

Seja agora

$$S' = \sqrt{x_2^2} \quad (\text{III.5})$$

em que se desprezou  $x_1$  uma vez que  $k > 1$ . Note que  $S > S'$ , uma vez que  $x_2 > x_1$ . Queremos saber, o menor valor de  $k$  de forma que  $S'$  e  $S$  não difiram em mais que 5%. Queremos que

$$S - S' < 0.05 * S \quad \text{ou} \quad \frac{S'}{S} > 0.95 \quad (\text{III.6})$$

Com alguma manipulação algébrica se obtém

$$k > 3.0 \quad (\text{III.7})$$

Isto pode simplificar muito as contas, pois, numa soma em quadratura podemos simplesmente desprezar termos menores que 1/3 do maior. Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que são os termos da soma em quadratura que devem ser comparados, não as incertezas.

### Representação de incertezas em um gráfico. Barras de erro.

Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Exemplo: Representar dados da Tabela III.2. em um gráfico.

Tabela III.2. Espaços e velocidades de um corpo

n	s $\pm$ 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84 $\pm$ 0,55
2	6,90	2,76 $\pm$ 0,82
3	11,10	3,99 $\pm$ 1,20
4	20,60	9,88 $\pm$ 2,96

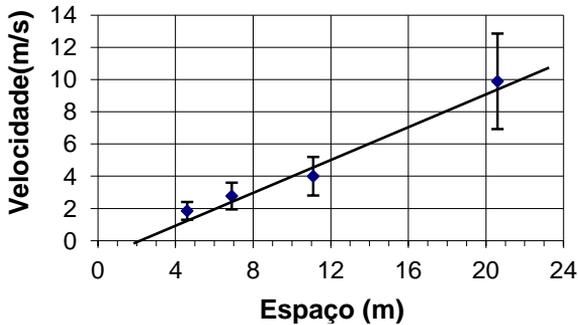


Figura III.1 Velocidades e posições de um corpo.

Note que a incerteza do espaço **não** foi colocada no gráfico, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para $\sigma_w$
----------------------	----------------------------

- A origem (0,0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental, caso contrário trace a melhor reta ignorando a origem.
- A reta deve estar contida na maioria das barras de incertezas.

<b><math>w = x \pm y</math></b> soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
<b><math>w = axy</math></b> multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
<b><math>w = a (y / x)</math></b> divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
<b><math>w = x^m</math></b> potência simples	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right  = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
<b><math>w = ax</math></b> multiplicação por constante	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right  = \left \frac{\sigma_x}{x}\right  \quad \text{ou} \quad \sigma_w =  a  \sigma_x$
<b><math>w = ax + b</math></b>	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right  = \left \frac{\sigma_x}{x}\right  \quad \text{ou} \quad \sigma_w =  a  \sigma_x$
<b><math>w = ax^p y^q</math></b>	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$

<p><b>w = a sen(bx)</b>  <b>função</b>  <b>qualquer</b>  <u><b>aplicar a</b></u>  <u><b>definição</b></u></p>	$\sigma_w =  ab \cos(bx)  \sigma_x \quad b\sigma_x \text{ em radianos}$
---	---

***RESUMO DE FÓRMULAS PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS***

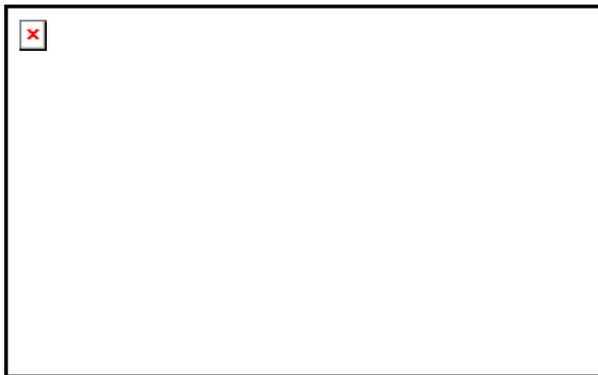
## IV - LINEARIZAÇÃO DE CURVAS

### Introdução

---

Numa experiência costumamos comparar os valores das medições com algum modelo físico, provavelmente expresso na forma de uma equação algébrica. Todavia, muitos fenômenos não são lineares, isto é, o comportamento da grandeza observada não pode ser descrito por uma reta. Nestes casos, modelar o comportamento do sistema ou ajustar uma função qualquer aos pontos experimentais requer o uso de métodos numéricos avançados nem sempre disponíveis de forma imediata. Num primeiro momento, pode-se optar pela linearização da função em jogo. A linearização de uma função nada mais é que a transformação de uma função curvilínea (não linear) numa reta, ou seja, a conversão dos dados experimentais, por meio de uma mudança de variáveis, para uma relação linear e determinar-lhe os coeficientes. Invertendo o procedimento de linearização, pode-se então determinar os parâmetros da função não linear procurada.

**Exemplo:** Para determinar a aceleração da gravidade usamos os dados de posição de um corpo em queda livre, cuja dependência com o tempo não é linear. Inicialmente preparamos uma tabela com os tempos e espaços e construímos o gráfico a seguir:



*Figura IV.1. Espaços em função do tempo para um corpo em queda livre.*

Neste tipo de gráfico, onde  $s = s_0 + v_0.t + (a/2)t^2$ , não é imediato determinar a aceleração do corpo.

Mesmo supondo  $v_0 = 0$  e  $s_0 = 0$  (com o eixo  $y$  no sentido da aceleração) a expressão se converte em:

$$s = at^2/2 \tag{IV.1}$$

que ainda é uma função não linear em  $t$ . Se, ao invés de graficar “ $s \times t$ ” como na figura 3.2, graficarmos, “ $s \times t^2/2$ ” teremos uma reta:

$$s = ax \tag{IV.2}$$

Onde  $a$  é o coeficiente angular da reta e  $x=t^2/2$ , conforme pode ser visto na figura IV.2. Logo:

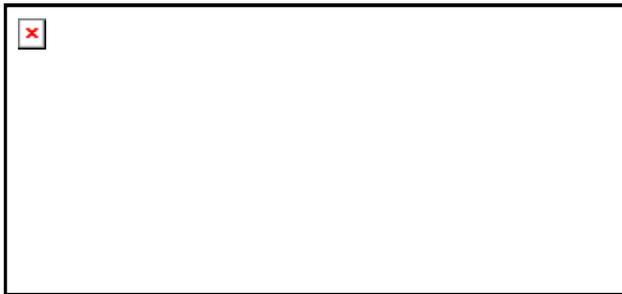


Figura IV.2.  $s(t^2/2)$  para um corpo em queda livre.

Pode ocorrer que as grandezas medidas sejam afetadas por um desvio constante. No exemplo acima, poderia ter ocorrido que o tempo e/ou espaço inicial fossem diferentes de zero. Esses desvios (inicialmente lineares), em geral, introduzem desvios não lineares nas novas variáveis “linearizadas” e podem invalidar suas conclusões. Dada sua natureza, esses desvios costumam afetar mais os valores

“pequenos” que os “grandes” e podem ser identificados na forma de desvio sistemático dos pontos experimentais da curva (linear) graficada.

Existem diversos outros métodos de linearização: Ainda se usa muito graficar o logaritmo das grandezas, o que reduz potências em coeficientes angulares e coeficientes multiplicativos em lineares. Os papéis dilog e mono-log, são uma forma prática de executar transformações log sem necessidade de cálculos. Outro método, que na prática reduz o grau da função, é graficar a derivada da função. Não há uma regra geral para linearização de funções. Prática e criatividade são alguns dos requisitos.

### **Funções tipo $y=ae^{bx}$**

---

Funções exponenciais podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos, que resulta:

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) \quad (\text{IV.3})$$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx \quad (\text{IV.4})$$

Definindo  $Y = \ln(y)$  e  $\alpha = \ln(a)$ , temos:

$$Y = \alpha + bx \quad (\text{IV.5})$$

Que é uma reta com coeficiente linear  $\alpha$  e coeficiente angular  $b$ .

### **O papel gráfico logarítmico**

---

Antes do uso generalizado de calculadoras, não era simples determinar o logaritmo de um número. Podia-se usar (e ainda se usa) o papel mono-logaritmo, cuja escala vertical,  $Y$ , é desenhada de tal forma que a distância linear até a

origem (eixo x) é o logaritmo decimal do número indicado na escala. Dessa forma o papel "grafica automaticamente" o log do número indicado.

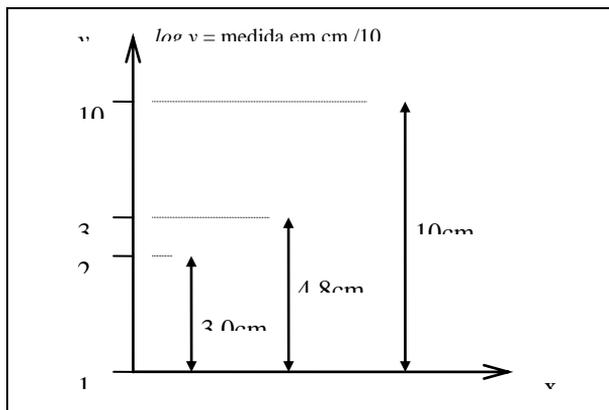


Figura IV.3. Escala mono-log. Neste caso, a escala, também denominada ciclo, é de 10cm para cada ordem de grandeza (fator 10). Outras escalas e vários ciclos são possíveis. (um exemplo: dado que  $\log(3) = 0.477$ , temos que  $10.\log(3) = 4.8\text{cm}$ .)

O papel dilogarítmico (dilog) repete o eixo log também para o eixo das abscissas (eixo x) e é útil para linearizar potências simples, tais como que será discutido a seguir.

### Funções tipo $y=ax^b$

Potências simples tipo  $ax^b$ , também podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos:

$$\log(y) = \log(a) + b \log(x) \tag{IV.6}$$

novamente, uma reta com coeficiente angular b e coeficiente linear  $\log(a)$ .

## V - INTERPOLAÇÃO DE VALORES EM TABELAS

Ao consultar uma tabela, dessas publicadas em livros especializados, é muito difícil encontrar exatamente o valor procurado. Se por exemplo estivermos procurando o índice de refração de um determinado material em função da temperatura, em geral ocorre que a temperatura desejada está entre dois valores tabelados. A solução é interpolar a partir dos valores tabelados. Existem vários métodos de interpolação de dados em tabelas: Pode-se usar polinômios, funções logarítmicas, exponenciais, etc. Esses métodos podem ser encontrados em livros básicos de métodos numéricos.

Ocorre que muitas dessas tabelas são compiladas de forma que uma simples interpolação linear seja suficientemente precisa, ou seja, o erro da interpolação linear é menor que a incerteza dos valores tabelados. Veja o exemplo a baixo:

**Tabela V.1. Pressão de vapor da água líquida.**

Temperatura (°C)	Pressão (Torr)
60	149,4
80	355,1
100	760
120	1489

Para determinar a pressão de vapor a 90°C pode-se interpolar linearmente a tabela entre os valores de 80 e 100°C. A interpolação linear pode ser entendida como o ajuste de uma reta a DOIS pontos da tabela e a determinação de um valor intermediário não tabelado. A figura V.1 exemplifica o procedimento graficamente.

Sejam os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  dois pontos quaisquer consecutivos na tabela. Ajustando-lhes uma reta, pode-se escrever, para um ponto  $(x_i, y_i)$  intermediário.

$$\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \quad (\text{V.1})$$

Isolando  $y_i$  temos:

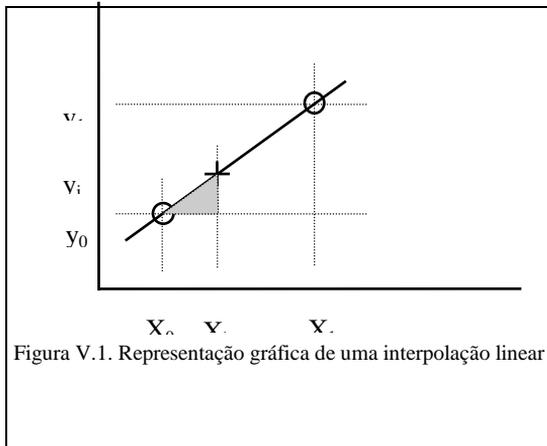
$$y_i = y_0 + (x_i - x_0) \cdot \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \quad (\text{V.2})$$

que aplicada ao exemplo resulta:

$$y_{90} = 355 + (90 - 80) \cdot \left(\frac{760 - 355}{100 - 80}\right) \quad (\text{V.3})$$

que fornece o valor procurado:

$$P_{90} = 558 \text{ Torr.}$$



## VI – O Método dos Mínimos Quadrados

Frequentemente, as leis físicas permitem prever o valor de uma grandeza  $y$  a partir de uma variável independente  $x$ . Um caso particular, mas bastante comum, é aquele em que  $y$  depende de  $x$  através de funções  $f(x)$  e  $g(x)$  na forma linear

$$y = a_0 f(x) + b_0 g(x) \quad (\text{VI.1})$$

onde  $a_0$  e  $b_0$  são constantes (isto é, independentes de  $x$ ), cujos valores são relacionados ao sistema específico em estudo.

A equação horária do movimento de um corpo lançado para cima em um plano inclinado por um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, a partir da origem, é

$$y = -\frac{g \text{sen} \theta}{2} t^2 + v_0 t$$

quando as forças de atrito puderem ser ignoradas. Neste caso,  $a_0 = -\frac{g \text{sen} \theta}{2}$ ,  $b_0 = v_0$ ,  $f(t) = t^2$  e  $g(t) = t$ .

Uma maneira de estimar  $a_0$  e  $b_0$  é variar o valor de  $x$  e medir os correspondentes valores de  $y$ . Se medimos apenas 2 pares, ou seja,  $(x_1, y_1, \sigma_1)$  e  $(x_2, y_2, \sigma_2)$ , onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são os desvios-padrões de  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente, é possível resolver o sistema de duas equações a duas incógnitas que se obtém; a solução será um par de valores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  que não são os parâmetros da equação (VI.1), mas sim suas estimativas, cujas incertezas decorrentes das incertezas nos valores  $y_1$  e  $y_2$  devem ser calculadas pelas fórmulas de propagação adequadas. Essa maneira, entretanto, é insuficiente quando as incertezas de medida são significativas e não podem ser diminuídas. Além disso, esse procedimento não permite de maneira nenhuma testar se a relação VI.1 é adequada para a descrição do fenômeno.

A prática em Física consiste em determinar  $N$  valores da grandeza  $y$  para diferentes valores de  $x$ , ou seja, determinar um conjunto de dados

$$\{(x_i, y_i, \sigma_i), i = 1..N\}$$

em que o índice  $i$  simplesmente identifica cada dado do conjunto de  $N$  pontos experimentais e incluímos os desvios-padrões dos dados,  $\sigma_i$ . O interesse em repetir a medição de  $y$  um número maior de vezes decorre da diminuição dos desvios-padrões de  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , por conta da redução da flutuação estatística quando são calculados a partir de mais medições, do mesmo jeito que o desvio-padrão da média diminui com o número de dados,  $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ , como já aprendemos na

primeira experiência – na verdade, a média e o desvio-padrão da média constituem a estimativa de mínimos quadrados da medição direta de uma grandeza aleatória, caso em que a fórmula VI.1 fica  $y = a_0$ . A fim de testar se a relação (VI.1) é válida, procura-se escolher valores de  $x$  distribuídos por toda a região de interesse da variável independente.

No exemplo do corpo que é lançado da base da rampa para cima com velocidade  $v_0$ , deve-se observar a posição do corpo desde o início até o final do movimento e não apenas concentrar as medições nos primeiros ou nos últimos instantes do movimento.

Para explicar o método que vamos usar, relacionamos o dado experimental com a função (VI.1):

$$y_i = a_0 f(x_i) + b_0 g(x_i) + \epsilon_i \quad (\text{VI.2})$$

onde  $\epsilon_i$  é o erro da medida experimental. O método que vamos apresentar baseia-se na impossibilidade de determinar esse erro experimental – se fosse possível conhecê-lo, subtrairíamos o erro de medida e nunca precisaríamos repetir uma medição, porque o resultado final, depois da subtração, seria exato. Embora não se possa conhecer o erro, supõe-se que se possa conhecer seu *valor médio*, bem como sua *média quadrática*, que são as duas hipóteses necessárias para aplicar o método dos mínimos quadrados:

- i.  $\langle \epsilon_i \rangle = 0$ , que corresponde à hipótese que os instrumentos não dão leituras erradas sempre para o mesmo lado, ou seja, as medições são não-tendenciosas.
- ii.  $\langle \epsilon_i^2 \rangle = \sigma_i^2$ , que é a medida de dispersão dos dados experimentais e pode ser estimado como vimos fazendo desde o primeiro experimento.

O método consiste em minimizar a soma dos quadrados dos resíduos ponderados pelos desvios-padrões dos dados, mais exatamente, minimizar a função  $Q(a, b)$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (af(x_i) + bg(x_i))]^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{VI.3})$$

Note que, nessa expressão,  $a$  e  $b$  são variáveis, o que é estranho, mas inevitável, uma vez que a natureza não nos permite conhecer os seus valores verdadeiros,  $a_0$  e  $b_0$  – temos que admitir a possibilidade de que assumam quaisquer valores. Note também que a idéia intuitiva de minimizar a soma dos erros não funciona, por causa da propriedade (i) acima – o erro médio é zero. Assim, as estimativas dos parâmetros são os valores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  que minimizam essa função  $Q$ .

Como  $Q(a, b)$  é um polinômio do 2º grau em  $a$  e  $b$ , pode-se desenvolver o polinômio que corresponde a essa parábola bidimensional e encontrar seu mínimo usando técnicas de álgebra linear (veja, por exemplo, o livro de Barone [1]). A maneira que vamos indicar aqui é calcular as derivadas parciais de  $Q(a, b)$  em relação a  $a$  e  $b$ , que devem se anular para um par de valores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , que são as estimativas das grandezas físicas  $a_0$  e  $b_0$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial a}\Big|_{\hat{a}, \hat{b}} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b}\Big|_{\hat{a}, \hat{b}} &= 0\end{aligned}$$

As duas equações do sistema linear acima (a derivada de um polinômio do 2º grau é um polinômio do 1º grau) em função das duas incógnitas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são escritas de preferência em forma de matriz,

$$\begin{pmatrix} \sum \frac{y_i f(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{y_i g(x_i)}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{(f(x_i))^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f(x_i)g(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f(x_i)g(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{(g(x_i))^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.4})$$

onde todas as somatórias se estendem desde  $i = 1$  até  $i = N$ . Essa fórmula matricial pode ser escrita em forma compacta como

$$\vec{D} = \mathbf{M}\vec{A} \quad (\text{VI.5})$$

A solução do sistema linear pode ser obtida por qualquer método. Aqui, definimos a matriz  $\mathbf{V}$  que é igual à inversa da matriz  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{VI.6})$$

de modo que simbolizamos a solução de (VI.4) por

$$\vec{A} = \mathbf{V}\vec{D} \quad (\text{VI.7})$$

Os desvios-padrões das estimativas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são calculados a partir dos elementos da matriz  $\mathbf{V}$  [3-5], que, por isso, é chamada matriz das variâncias:

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{v_{11}} \text{ e } \sigma_{\hat{b}} = \sqrt{v_{22}} \quad (\text{VI.8})$$

O método dos mínimos quadrados é devido a Gauss e Legendre, no final do século XVIII ou início do XIX, que o aplicaram na redução de dados de observações astronômicas; a prioridade de descoberta do método é uma questão interessante, veja, por exemplo, Stiegler [2], que sugere que Gauss descobriu o método antes de Legendre, que, porém, o apresentou em uma publicação que

despertou o interesse dos astrônomos da época, o que Gauss teria tentado vários anos antes, mas não conseguiu.

A qualidade do ajuste pode ser avaliada pelo valor da função  $Q$  da equação (VI.3) calculada com as estimativas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  dos parâmetros,  $Q(\hat{a}, \hat{b})$ , cuja distribuição de probabilidade pode ser calculada quando os dados têm distribuição normal. Se conhecêssemos os valores exatos  $a_0$  e  $b_0$ , poderíamos escrever

$$Q(a_0, b_0) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (a_0 f(x_i) + b_0 g(x_i))]^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2}$$

onde usamos a relação VI.2 para identificar os erros  $\epsilon_i$ . Calculando o valor médio dos dois membros da equação, obtemos

$$\langle Q(a_0, b_0) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\langle \epsilon_i^2 \rangle}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = N \quad (\text{VI.9})$$

Essa relação não é muito útil, uma vez que não conhecemos  $a_0$  nem  $b_0$ . No entanto, se usamos as estimativas conhecidas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  no lugar de  $a_0$  e  $b_0$ , obtemos

$$Q(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (\hat{a}f(x_i) + \hat{b}g(x_i))]^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon'_i{}^2}{\sigma_i^2} \quad \text{VI.10}$$

onde definimos o resíduo do ajuste no ponto  $x_i$ ,  $\epsilon'_i$ , como

$$\epsilon'_i = y_i - (\hat{a}f(x_i) + \hat{b}g(x_i)) \quad (\text{VI.11})$$

É possível calcular o valor médio da expressão (VI.10) [5], obtendo-se uma expressão bastante parecida com a equação VI.9:

$$\langle Q(\hat{a}, \hat{b}) \rangle = N - 2 \quad (\text{VI.12})$$

Como  $Q$  é uma função definida positiva ou nula, o fato de seu valor médio ser nulo para  $N = 2$  significa que ele vale zero sempre. Isso porque, nesse caso de  $N = 2$ , as estimativas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são a solução do sistema linear, de modo que os resíduos  $\epsilon'_1$  e  $\epsilon'_2$  para os únicos dois dados são nulos e, portanto, sua soma quadrática é nula.

Quando fazemos *um* ajuste, porém, temos *um* único valor  $Q(\hat{a}, \hat{b})$ , de modo que, se  $N > 2$ , ele pode assumir qualquer valor no intervalo  $[0, \infty[$ . Quando os dados têm uma distribuição gaussiana, a função de probabilidade dos diferentes valores pode ser calculada e demonstra-se que  $Q(\hat{a}, \hat{b})$  tem a função de probabilidade da variável  $\chi^2_{N-2}$  (diz-se qui-quadrado com  $N-2$  graus de liberdade), de forma que

se pode realizar um teste de hipótese rigoroso, dentro do quadro teórico da teoria estatística. Aqui, vamos nos limitar a uma interpretação qualitativa dessa grandeza.

Valores de  $Q(\hat{a}, \hat{b})$  muito menores que  $N-2$  são devidos a desvios-padrões superestimados. Já valores muito maiores que  $N-2$  sugerem que o modelo seja inadequado, quando devemos buscar outra função para relacionar  $y$  com  $x$  no lugar da (VI.1), ou, então, os desvios-padrões estão muito subestimados. Se desenvolvermos as expressões algébricas da equação (VI.8), que determinam os desvios padrões de  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , veremos que, quando se subestimam (superestimam) os desvios padrões dos dados, os desvios dos resultados também estarão subestimados (superestimados).

Na equação (VI.12), o número 2 do membro direito,  $N-2$ , está associado aos 2 parâmetros  $a_0$  e  $b_0$  da relação entre  $y$  e  $x$ . Caso a relação que substitua (VI.1) tenha  $m$  parâmetros, esse número 2 será substituído por  $m$ . Por exemplo, se forem três os parâmetros:  $a_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$ , então a relação (VI.10) fica

$$\langle Q(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \rangle = N - m = N - 3 \quad (\text{VI.13})$$

Uma introdução ao método dos mínimos quadrados do ponto de vista do tratamento estatístico dos dados em física experimental pode ser encontrada no livro de Helene e Vanin [3] ou em Vuolo [4] e uma apresentação mais profunda em Helene [5].

### **Referências**

- [1] *Álgebra Linear*. Mário Barone Jr., 3ª edição, São Paulo, IME-USP (2002).
- [2] *Gauss and the Invention of Least Squares*. Stephen M. Stigler. Annals of Statistics, **9** (1981) 465- 474 - doi:10.1214/aos/1176345451
- [3] *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*. O. Helene e V.R. Vanin. Ed. Edgard Blucher, SP, 2ª edição (1991)
- [4] *Fundamentos da teoria de erros*. José Henrique Vuolo. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP, 2ª edição (1992)
- [5] *Método Dos Mínimos Quadrados Com Formalismo Matricial*. Otaviano Helene. Ed. Livraria da Física (2006).

## Referências e fontes bibliográficas

- R.P. Feynman., R.B. Leighton and M. Sands, *Lectures on Physics*, Vol 1. 1971.
- A.Hudson, R. Nelson, *University Physics*, 2nd Ed. Saunders College Publ. 1990.
- Diretório Central dos Estudantes. *Normatização de trabalhos acadêmicos & referências bibliográficas*. 2a. Ed. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. - (1998). 52p.
- Fernandes, Normando C. O laboratório de projetos: inúmeras variações sobre o mesmo tema. *Preprint IFUSP/ P-564*. (1986).
- Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil*. INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p.
- Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.
- INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição*. ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p.
- *Referências Bibliográficas de Multimeios e Documentos Eletrônicos*. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Projeto Disque-Biblio, (1998) 19p.
- Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução à interpretação gráfica de dados, gráficos e equações*. 25p. IFUSP (sem data).
- Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.
- Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição in Manuais Didáticos de Física*. 18p