# 10 exercícios de MAP2321 — Preparação

**1.** Resolva a seguinte equação diferencial ordinária usando exponencial de matrizes:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 4x &= \sin(3t) && (1) \\ \dot{x}(0) &= 1 && (2) \\ x(0) &= 0 && (3) \end{aligned}$$

**2.** Ache a exponencial da matriz $A$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2t \end{pmatrix}$$

**3.** Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

achar o Gramiano de controlabilidade do par $(A, B)$.

**4.** Suponha que num sistema de controle no espaço de estados o tempo seja discreto, isto é $T = \mathbb{N}$, e a evolução no espaço de estados seja dada pela equação:

$$\begin{aligned} x_n &= Ax_{n-1} + Bu_{n-1} \\ x_0 &= a \end{aligned}$$

Com $x \in \mathbb{R}^n$ e $u_n$ uma sequência em $\mathbb{R}^m$. Ache a função transição de estados

$$\varphi(n, 0, a, u_i)$$

**5.** Usando o teorema de Cayley-Hamilton escreva a matriz $A^5$ como combinação linear de $\{I, A, A^2\}$ para o caso em que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**6.** Dadas as matrizes de um sistema linear:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que o par $(A, B)$ não é controlável. Identifique o sub-espaço de $\mathbb{R}^n$ que não pode ser atingido a partir do zero.

**7.** Fazer os exercícios 3.2 até 3.6 da página 67 do livro do António Leitão.

**8.** A matriz
$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(t)+1 \\ 2\sin(t) & \frac{\cos(2t)}{2} \end{pmatrix}.$$
Será que ela pode ser a exponencial $\exp(tA)$ de alguma matriz $A$?
**9.** Seja $(A, B)$ uma par de matrizes onde $A$ é uma matriz quadrada $n \times n$ e $B$ uma matriz $n \times m$. Seja $T > 0$ e $Q_T$ o gramiano de controlabilidade do par $(A, B)$. Mostre que se $x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} \ker B^t {A^t}^k$ então $x \in \ker Q_T$.
**10.** Mostre que se $0 < S < T$, então $\mathcal{A}(0, S) \subset \mathcal{A}(0, T)$.