Mecânica Quântica I - 4302403

7ª lista

1) Usando a representação matricial dos operadores de spin 1/2:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mostre que os operadores de spin obedecem à algebra do momento angular, ou seja, mostre que: a) $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$. Mostre também que: b) $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbf{1}$ e, portanto, que c) $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\mathbf{1}$. Tendo obtido S^2 mostre explicitamente que d) $[S^2, S_i] = 0$.

2) Mostre que os autovalores de S_y são também $\pm\hbar/2$, e que seus autovetores podem ser dados por:

$$|S_y, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |S_y, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

3) Um elétron se encontra num estado de spin dado por:

$$|\chi\rangle = A\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a constante de normalização A. (Resp.: A=1/5)
b) Ache os valores esperados de S_x, S_y e S_z. (Resp.: $\langle S_x\rangle = 0$, $\langle S_y\rangle = -12\hbar/25$, $\langle S_z\rangle = -7\hbar/50$)
c) Qual a probabilidade de numa medida de S_y encontrarmos $\hbar/2$? (Resp.: $P_+ = 1/50$)
d) Qual a probabilidade de numa medida de S_y encontrarmos $-\hbar/2$? Verifique que a soma dessas probabilidades é 1. (Resp.: $P_- = 49/50$)

4) Considere o operador $\vec{S}.\vec{n}$ para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$, sendo que a direção $\vec{n}$ é especificada pelos ângulos θ e ϕ através de:

$$\vec{n} = \sin\theta\cos\phi\ \vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\ \vec{e}_y + \cos\theta\ \vec{e}_z.$$

a) Mostre que os autovalores desse operador são $\pm\hbar/2$ e que os autovetores são dados por:

$$|\vec{n}, +\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}, -\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

b) Se a partícula está no estado $|\vec{n}, -\rangle$, qual é a probabilidade de obtermos o valor $\frac{\hbar}{2}$, numa medida de S_z? (Resp.: $P_+ = \sin^2(\theta/2)$)
c) Qual é o valor médio das medidas de S_x se a partícula está no estado $|\vec{n}, -\rangle$? (Resp.: $\langle S_x\rangle = -(\hbar/2)\sin\theta\cos\phi$)

5) Construa as matrizes de spin (S_x, S_y e S_z) para uma partícula de spin 1. Dica: quantos auto-estados de S_z existem? Esse número fornece a dimensão dessas matrizes.

6) Calcule $\langle S_y \rangle$ e $\langle S_z \rangle$ para uma partícula de spin 1/2, que se encontra numa região de campo magnético constante, no estado

$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}.$$

7) Para uma partícula de spin 1/2, descrita pela auto-função dada no exercício 6, mostre que:
a) a probabilidade de obtermos o valor $\hbar/2$ numa medida de S_z é $\cos^2(\alpha/2)$.
b) a probabilidade de obtermos o valor $\hbar/2$ numa medida de S_x é

$$\frac{1}{2}[1 + \sin\alpha\cos(\gamma B_0 t)].$$

8) Considere uma partícula de spin 1/2 em repouso numa região onde existe um campo magnético oscilante dado por

$$\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{k}$$

com B_0 e ω constantes.
a) Construa a matriz hamiltoniana para esse sistema.
b) Se a partícula está inicialmente (em $t = 0$) no estado spin para cima com respeito a S_x (ou seja, $|\chi(0)\rangle = |S_x \;\; +\rangle$), mostre que $|\chi(t)\rangle$ nos instantes subsequentes é dado por

$$|\chi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i(\gamma B_0 t/2\omega)\sin(\omega t)} \\ e^{-i(\gamma B_0 t/2\omega)\sin(\omega t)} \end{pmatrix}.$$

Lembre-se que como H não é independente do tempo voce deve usar diretamente a equação :

$$H|\chi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\chi(t)\rangle$$

para determinar $|\chi(t)\rangle$.
c) Mostre que a probabilidade de obtermos o valor $-\hbar/2$ numa medida de S_x é:

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right).$$

d) Mostre que o menor valor de B_0 necessário para que haja uma inversão completa de S_x é $B_0 = \pi\omega/\gamma$.