Pedro A. Morettin • Samuel Hazzan • Wilton de O. Bussab

CÁLCULO

Funções de uma e várias variáveis

Exercícios

1. Considere a função $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(3, 2)$ e $f_y(3, 2)$.

2. Considere a função $f(x, y) = 4xy^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(-1, 2)$ e $f_y(-1, 2)$.

3. Usando as técnicas de derivação, calcule f_x e f_y para as seguintes funções:

1) $f(x, y) = 7x + 10y$
2) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$
3) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{y}$
4) $f(x, y) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{6}{y^2}$
5) $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$
6) $f(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{y}$
7) $f(x, y) = 4xy^2$
8) $f(x, y) = 10xy^2 + 5x^2y$
9) $f(x, y) = e^x + 2x^2 + 6y + 10$
10) $f(x, y) = \ln x + 4y^3 + 9$
11) $f(x, y) = 3^x + \operatorname{sen} y$
12) $f(x, y) = \cos x + \ln x - e^y - 10$
13) $f(x, y) = x^3e^x + 10y$
14) $f(x, y) = 2y^2 \ln x$
15) $f(x, y) = 3y^2 \cos x$
16) $f(x, y) = 4y^2e^y + 6x^2$
17) $f(x, y) = 20x^2y^2 \operatorname{sen} x$
18) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$
19) $f(x, y) = \dfrac{e^x}{2x + 3y}$
20) $f(x, y) = \dfrac{\ln y}{x - 2y}$
21) $f(x, y) = x^{0,3} \cdot y^{0,7}$
22) $f(x, y) = 2x^{0,6} \cdot y^{0,4}$
23) $f(x, y) = 10x^{\alpha} \cdot y^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$
24) $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$
25) $f(x, y) = e^{2x + 5y}$
26) $f(x, y) = 2^{x + y}$
27) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$
28) $f(x, y) = e^{xy}$
29) $f(x, y) = 3^{xy}$
30) $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$
31) $f(x, y) = 5^{x^2 + y}$
32) $f(x, y) = (x^2 + 2xy)^3$
33) $f(x, y) = (3x^2y + 2xy)^4$
34) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x^2 + 2y)^3}$
35) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
36) $f(x, y) = \sqrt{xy + x^2}$
37) $f(x, y) = \sqrt[3]{2x^2 - 3xy}$
38) $f(x, y) = \sqrt{e^x + e^y}$
39) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
40) $f(x, y) = \ln(e^{xy} - x^2y^3)$

4. Considere a função $f(x, y) = 3x^2y$.
   a) Calcule $f_x(10, 15)$.
   b) Calcule $f(11, 15) - f(10, 15)$ e compare com o resultado obtido em (a).
   c) Calcule $f_y(10, 15)$.
   d) Calcule $f(10, 16) - f(10, 15)$ e compare com o resultado obtido em (c).

5. Considere a função de produção $P(K, L) = 3K^{0,5} L^{0,5}$. Mostre que

$$K \cdot \frac{\partial P}{\partial K} + L \cdot \frac{\partial P}{\partial L} = P(K, L)$$

6. Considere a função $f(x, y) = 2x + 3y$. Calcule $x \cdot f_x + y \cdot f_y$.

7. Considere a função $u(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$. Calcule:

$$x_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

8. Considere a seguinte função de produção $P(x, y) = 2x^{0,5} \cdot y^{0,5}$, em que P é a quantidade de colhida de um produto (em toneladas), x é o número de homens-hora empregados (em milhares) e y é o número de hectares plantados. Calcule:
   a) a produtividade marginal do trabalho $\dfrac{\partial P}{\partial x}$.
   b) a produtividade marginal da terra $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.
   c) $\dfrac{\partial P}{\partial x}(1, 4)$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y}(1, 4)$. Interprete o resultado.

9. Seja $P(K, L) = 10K^{0,5}L^{0,5}$ uma função de produção, K e L, as quantidades dos insumos capital e trabalho.
   Calcule $\dfrac{\partial P}{\partial K}(2, 8)$ e $\dfrac{\partial P}{\partial L}(2, 8)$, explicando seu significado.

10. Seja $q = 1.000 - 2x^2 + 10y$ a equação de demanda semanal de manteiga num supermercado (em kg), x o preço por kg da manteiga e y o preço por kg da margarina.
    a) Calcule as demandas marginais parciais $\dfrac{\partial q}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial q}{\partial y}$.
    b) Se $x = 20$ e $y = 10$, o que aumenta mais a demanda de manteiga: o aumento em uma unidade no preço do kg da margarina (mantido o da manteiga) ou a diminuição em uma unidade no preço do kg da manteiga (mantido o da margarina)? Use os resultados do item (a).

11. Seja $q = 30 - 4x - 2y$ a equação de demanda de um produto A, x seu preço unitário e y o preço unitário de um bem B.
    a) Calcule as demandas marginais parciais $\dfrac{\partial q}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial q}{\partial y}$, explicando seu significado.
    b) O que aumenta mais a demanda de A: diminuir em uma unidade seu preço unitário (mantendo o de B) ou diminuir em uma unidade o preço unitário de B (mantendo o de A)?

12. Seja $q = 100 - 6x + 2y$ a equação de demanda de um produto I, x seu preço unitário e y o preço unitário de um produto II.
    a) Calcule as demandas marginais parciais $\dfrac{\partial q}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial q}{\partial y}$, explicando seu significado.
    b) O que aumenta mais a demanda de I: diminuir em uma unidade seu preço unitário (mantendo o preço de II) ou aumentar em uma unidade o preço de II (mantendo o do produto I).

13. Considere as funções de demanda de dois produtos A e B, $q_A = f(p_A, p_B)$ e $q_B = g(p_A, p_B)$, em que p_A e p_B são os preços unitários de A e B. Os produtos A e B são chamados substitutos se, para cada um deles, aumentando-se seu preço, aumenta a demanda do outro (por exemplo, manteiga e margarina). Os produtos A e B são chamados complementares se, para cada um, aumentando-se seu preço, diminui a demanda do outro (por exemplo, carro e gasolina).
   a) Dê um exemplo de dois bens substitutos.
   b) Qual o sinal das derivadas $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B}$ e $\dfrac{\partial q_B}{\partial p_A}$ caso os produtos sejam substitutos?
   c) Dê um exemplo de dois bens complementares.
   d) Qual o sinal das derivadas $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B}$ e $\dfrac{\partial q_B}{\partial p_A}$ caso os produtos sejam complementares?

14. Verifique se os bens A e B são substitutos ou complementares considerando suas equações de demanda nos seguintes casos:
   a) $q_A = 500 - 2p_A + 3p_B$ e $q_B = 200 + 5_A - 6p_B$
   b) $q_A = 500 - 2p_A - 3p_B$ e $q_B = 200 - 5_A - 6p_B$
   c) $q_A = \dfrac{5p_B}{2 + p_A^2}$ e $q_B = \dfrac{3p_A}{3 + \sqrt{p_B}}$

15. Dada a função utilidade de um consumidor

$$U(x_1, x_2) = 100x_1 + 200x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2,$$

em que x_1 é a quantidade consumida de um produto A e x_2 é a quantidade consumida de um produto B.
Calcule:
   a) a utilidade marginal do produto A, $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$;
   b) a utilidade marginal do produto B, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$;
   c) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(3, 4)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(3, 4)$, explicando seu significado.

16. Dada a função custo para a produção de dois bens de quantidades x e y, $C(x, y) = 100 + x^2 + 2y^2 + xy$, determine:
   a) o custo marginal em relação a x, $\dfrac{\partial C}{\partial x}$;
   b) o custo marginal em relação a y, $\dfrac{\partial C}{\partial y}$;
   c) $\dfrac{\partial C}{\partial x}(10, 20)$ e $\dfrac{\partial C}{\partial y}(10, 20)$, explicando seus significados.

17. Seja $C(x, y) = 10 + x + x^2y - xy$ a função custo conjunto para fabricar x unidades de um produto A e y unidades de um produto B.
   a) Calcule os custos marginais em relação a x e a y.
   b) Calcule $\dfrac{\partial C}{\partial x}(10, 10)$ e $\dfrac{\partial C}{\partial y}(10, 10)$ e interprete os resultados.

18. Seja $q_A = f(p_A, p_B)$ a função de demanda de um produto A, p_A seu preço unitário e p_B o preço unitário de um produto B.
   Sabemos que, em geral, $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A} < 0$. De maneira análoga a que vimos no Capítulo 5, definimos elasticidade parcial da demanda de A em relação a seu preço, ao número

$$\varepsilon_A = \left|\frac{\partial q_A}{\partial q_A} \cdot \frac{p_A}{q_A}\right|,$$

   em que o módulo foi introduzido para a elasticidade resultar num número geralmente positivo. Convém observar que há autores que definem a elasticidade sem o uso do módulo.
   A interpretação é análoga àquela vista no Capítulo 5, ou seja, a elasticidade representa aproximadamente a variação porcentual da quantidade demandada quando seu preço aumenta 1% (mantido constante o preço de B).
   a) Calcule a elasticidade parcial da demanda de manteiga relativamente a seu preço no exercício 10, no ponto (20, 10).
   b) Idem, para o produto A do exercício 11.
   c) Idem, para o produto I do exercício 12.

19. Com relação ao exercício anterior, a derivada $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B}$ representa a taxa de variação da demanda de A relativamente ao preço de B.
   Chama-se elasticidade cruzada da demanda de A, relativamente ao preço de B, ao número:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\partial q_A}{\partial p_B} \cdot \frac{p_B}{q_A}.$$

   A elasticidade cruzada foi definida sem o módulo para podermos caracterizar bens substitutos e bens complementares pelo sinal da elasticidade.
   a) Calcule a elasticidade cruzada da demanda de manteiga em relação ao preço da margarina do exercício 10, no ponto (20, 10).
   b) Calcule a elasticidade cruzada da demanda do produto A do exercício 11 em relação ao preço de B.
   c) Calcule a elasticidade cruzada da demanda do produto I do exercício 12, em relação ao preço do outro produto.

10.4 Diferencial de uma Função

Consideremos a função dada por $f(x, y) = 2x^2 + 3x^2$, e calculemos a variação Δf sofrida pela função quando x e y sofrem variações Δx e Δy a partir do ponto (x_0, y_0).
Temos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\\
&= 2(x_0 + \Delta x)^2 + 3(y_0 + \Delta y)^2 - (2x_0^2 + 3y_0^2)\\
&= 2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 3(y_0^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2) - 2x_0^2 - 3y_0^2\\
&= 4x_0\Delta x + 6y_0\,\Delta y + 2\Delta x^2 + 3\Delta y^2.
\end{aligned}$$