Instituto de Física - USP - 2018
4300430 - Introdução à Cosmologia Física
Prof. Raul Abramo

Lista 3 – Data de entrega: 07 de novembro

1. **Horizontes na cosmologia**

   A métrica de FLRW é dada por:

   $$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + \frac{1}{k} \text{sen}^2 \left(\sqrt{k}\chi \right) d^2\Omega \right]$$

   Podemos deixar essa métrica quase na forma da métrica de Minkowski, se fizermos uma reparametrização do tempo tal que este é descrito agora em termos do *tempo conforme*:

   $$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad \Leftrightarrow \quad a\, d\eta = dt \; .$$

   (a) **[0.25]** Considere um universo cujo fator de escala é uma lei de potência $a(t) = (t/t_0)^p$. Encontre $\eta(t)$, inverta essa relação para encontrar $t(\eta)$ e, em seguida, determine $a(\eta)$ para os casos em que (i) $0 < p < 1$ e (ii) $p > 1$.

   (b) **[0.25]** Defina o que são (i) horizonte de eventos; (ii) horizonte de partículas e (iii) raio de Hubble. Qual a relação entre o horizonte de partículas e o raio de Hubble?

   (c) **[0.75]** Usando o tempo conforme, encontre o horizonte de partículas de um universo que se expande de modo desacelerado ($0 < p < 1$). Utilize um diagrama tipo espaço-tempo para representar o cone de luz de um observador num instante arbitrário, numa posição arbitrária, usando para isso o tempo conforme e coordenadas comóveis. Indique nesse diagrama qual é o horizonte de partículas desse observador.

   (d) **[0.75]** Usando o tempo conforme, encontre o horizonte de eventos de um universo que se expande de modo acelerado ($p > 1$). Utilize um diagrama tipo espaço-tempo para representar o cone de luz de um observador num instante arbitrário, numa posição arbitrária, usando para isso o tempo conforme e coordenadas comóveis. Indique nesse diagrama qual é o horizonte de eventos desse observador.

2. **Cones de luz em universos de FLRW**

   Durante uma das aulas eu mostrei gráficos com os cones de luz de diferentes eventos, em diversos casos de tipos diferentes de expansão (desacelerada ou acelerada). Os gráficos (que mostram tempo versus distância comóvel) podem ser encontrados nos slides da aula sobre os problemas no modelo padrão do Big Bang. Naqueles gráficos eu tomei leis de expansão do tipo $a(t) = (t/t_0)^p$, e unidades arbitrárias de tal forma que $t_0 = 1$.

   (a) **[0.5]** Reproduza os gráficos que eu mostrei naquela aula utilizando algum programa (pode ser *Python*, *Mathematica*, etc).

   (b) **[1.0]** Faça agora gráficos em coordenadas físicas. Você não precisa utilizar exatamente os mesmos eventos que eu usei nas minhas aulas, mas no mínimo tome dois tipos de pares de eventos: (a) eventos na mesma posição, em instantes diferentes, e (b) eventos no mesmo instante no tempo, mas em posições diferentes. Interprete cuidadosamente esses gráficos.

3. **Modelos de energia escura**

Vimos ao longo das aulas que os dados de supernovas apontam para um modelo de universo que está em expansão acelerada. Se pararmos para pensar nas formas "tradicionais" de matéria, i.e. $p > 0$, a atração gravitacional é um efeito mais forte do que a expansão, levando à desaceleração da taxa de expansão. Ou seja, precisamos de uma forma diferente de matéria que provoque a expansão hoje observada. Existem dois "principais" modelos que tentam explicar os fatos observados. Um deles consiste na modificação das leis da gravidade[1] em diferentes escalas. O segundo consiste em uma densidade de energia adicional cuja pressão negativa leva a uma expansão acelerada, sendo a constante cosmológica Λ o caso particular mais simples deste modelo[2]. O modelo ΛCDM enquadra-se no segundo modelo descrito acima, onde a energia escura possui equação de estado $w(z) \equiv P/\rho = -1$ constante no tempo. Contudo, e se $w \neq -1$?

(a) **[0.25]** Partindo da equação de Friedmann, obtenha a equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}[\rho(t) + 3P(t)]$$

para impor um limite superior aos valores que w pode assumir de forma que ocorra aceleração cósmica. Modelos tais que $w \neq -1$ são conhecidos como wCDM.

(b) **[0.25]** Partindo da equação da continuidade,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0,$$

mostre que, se a equação de estado w não varia no tempo, então a densidade de energia escura decresce como $\rho \sim a^{-3(1+w)}$. Ou seja, se $-1 < w < -1/3$, então ρ é constante ($w = -1$) ou diminui. Contudo, suponha que $w < -1$. Neste caso, a densidade de energia escura aumentará com o tempo. Tais modelos são conhecidos como *modelos de energia fantasma*.

(c) **[1.5]** Considere um universo plano e com densidade de radiação desprezível. Escreva as equações de Friedmann para um modelo cuja densidade de energia escura se comporta como $\rho \sim a^{-3(1+w)}$.

Encontre o horizonte de eventos para modelos com $-1 \leq w < -1/3$ e $w < -1$. O que acontece com a evolução do horizonte de eventos ao longo do tempo em tais modelos? Qual a implicação de tais resultados?

(d) **[1.0]** Uma vez que a condição $w = -1$ é relaxada, vamos introduzir uma dependência temporal na equação de estado da energia escura, afinal de contas não existe nenhum motivo *a priori* para assumirmos que w não muda com o tempo. Neste caso, mostre que, ao invés de $\rho \sim a^{-3(1+w)}$,

$$\rho \sim e^{3\int_a^1 1+w(a')\frac{da'}{a'}}$$

e que, consequentemente, a equação de Friedmann se torna

$$H^2(z) = H_0^2\left[\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_r^0(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_{DE}^0 \exp\left(\int_0^z \frac{1+w(z)}{1+z}dz\right)\right]$$

[1] Modifica-se o lado esquerdo das equações de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi G c^{-4} T_{\mu\nu}$, de forma que, em largas escalas a gravidade é "enfraquecida".

[2] Tais modelos modificam o lado direito das equações de Einstein, ou seja, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$

(e) **[1.0]** Seria interessante então medir como a densidade de energia escura varia com o tempo. Para isso, é necessário parametrizar a dependência temporal de $w(z)$. A parametrização mais simples para uma equação de estado variando no tempo é conhecida como *formalismo CPL* (Chevallier-Polarski[3]-Linder[4]). O modelo possui dois parâmetros para w como uma função linear do fator de escala $a(t)$:

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a)$$

Neste caso, como evolui a densidade de energia escura? Faça um gráfico (ou mais) comparando a dependência de ρ com a (ou z) para os diferentes modelos aqui estudados.

4. **Crescimento das perturbações de matéria num universo em expansão**

Um universo de FLRW possui uma densidade de energia *quase* homogênea. Podemos escrever:

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\vec{x}, t) \ ,$$

onde $\delta\rho(\vec{x}, t)$ são as perturbações de densidade. Nós vamos assumir que essas perturbações são muito pequenas (apesar de que isso não é bem verdade, especialmente hoje em dia). Ou seja, vamos assumir que o contraste de densidade é muito pequeno:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \ll 1 \ .$$

Em sala de aula nós vamos ver (ou já vimos, conforme a data em que você resolveu começar a resolver esta lista) que a equação que descreve a evolução temporal do contraste de densidade, δ, é:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}H^2\Omega_m\,\delta = 0$$

(a) **[0.5]** Usando as Equações de Friedmann, mostre que a equação acima pode ser escrita, num universo dominado por matéria sem pressão ("poeira") como:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3\,t}\dot{\delta} - \frac{2}{3\,t^2}\delta = 0 \ .$$

Essa é, portanto, uma equação linear de segunda ordem. Encontre as duas soluções linearmente independentes dessa equação.

(b) **[0.5]** Mostre que, dado $\delta(\vec{x}, t_i)$ num instante inicial t_i, a solução $\delta(\vec{x}, t)$ para $t \gg t_i$ é muito bem aproximada apenas por uma das soluções encontradas no item acima. Mostre que, de fato, podemos escrever:

$$\delta(\vec{x}, t) \approx \frac{a(t)}{a(t_i)} \times \delta(\vec{x}, t_i) \ .$$

(c) **[1.5]** Vamos supor que num instante t_i, em que $a(t_i) = a_i = 10^{-4}$, o contraste de densidade numa certa posição vale 10^{-4}. Qual seria o valor do contraste de densidade hoje? E se o contraste de densidade naquele instante fosse 10^{-3}, quanto ele valeria hoje? Considerando que o campo de densidade do universo era, inicialmente, um campo Gaussiano aleatório, como os resultados acima servem para explicar o fato de que o universo possui pouquíssimas galáxias em $z \gtrsim 10$, e um número enorme de galáxias a partir de $z \sim 1$?

[3] M. Chevallier & D. Polarski, Int. J. Mod. Phys. D 10, 213 (2001).
[4] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. 90, 091301 (2003).