



EESC-USP



# Parte 3

## DEFORMAÇÃO-VIDA ( $\epsilon \times N$ )

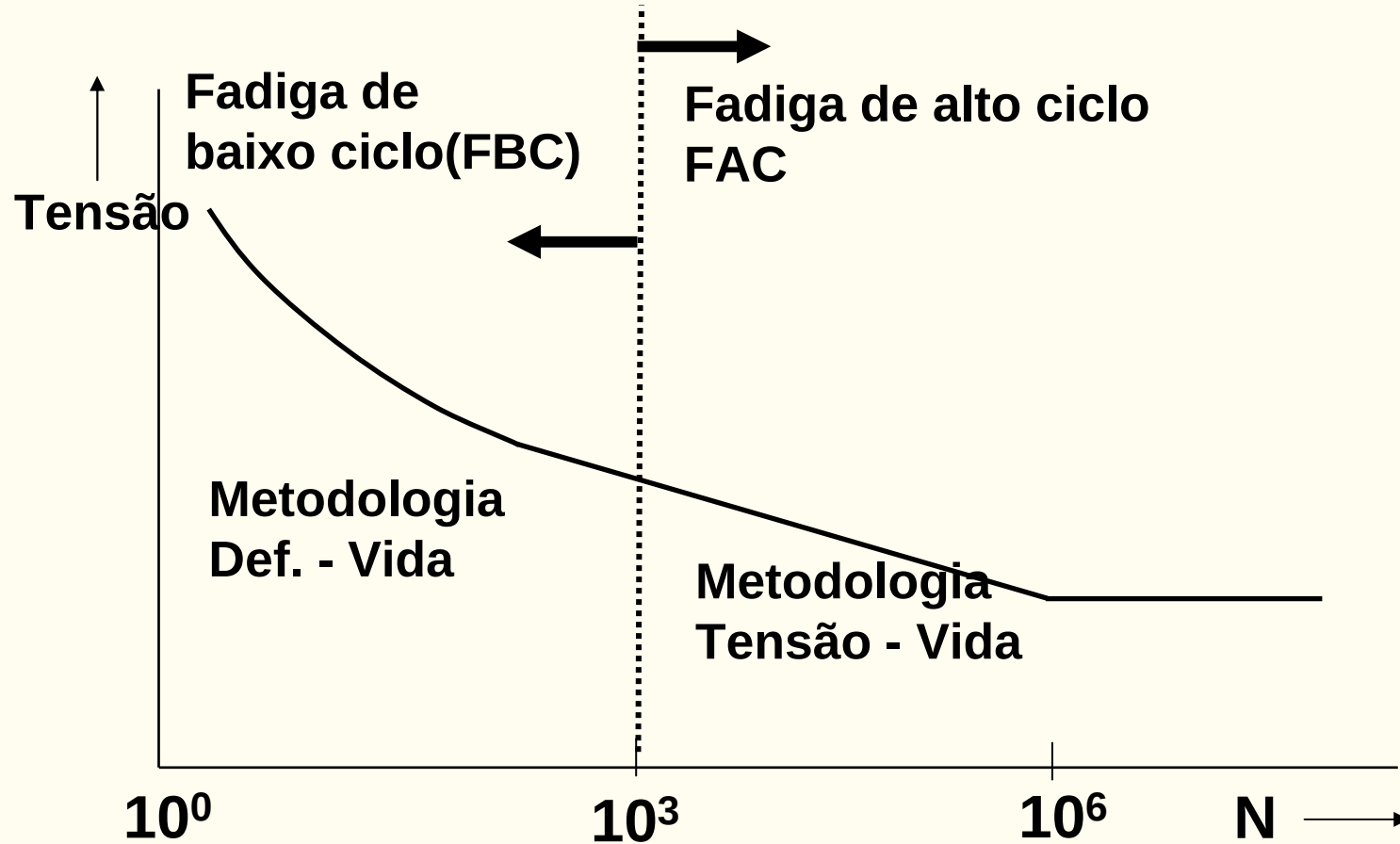
Waldek Wladimir Bose Filho, PhD

NEMAF – Núcleo de Ensaio de  
Materiais e Análise de Falhas



EESC-USP

# Deformação - Vida Vs. Tensão Vida



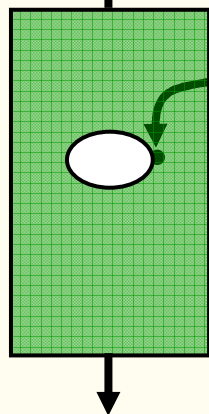


EESC-USP

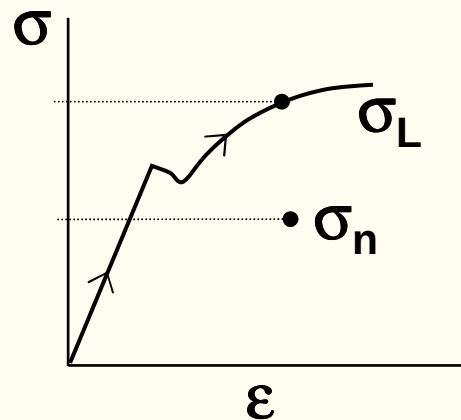
## Nominal Vs Tensão Local



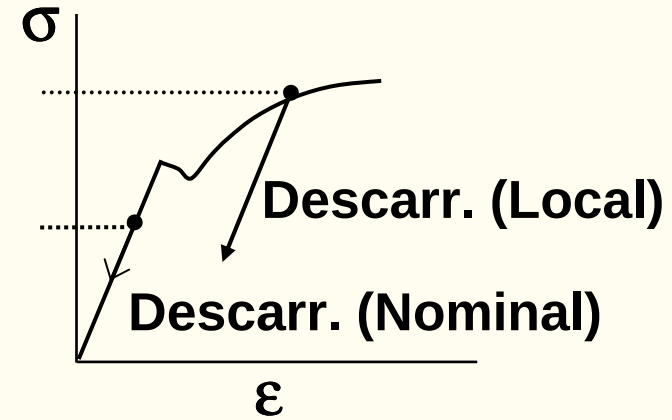
Tensão  
Nominal  $\sigma_n$



Tensão  
Local  
 $\sigma_L$



Carregamento



Descarregamento

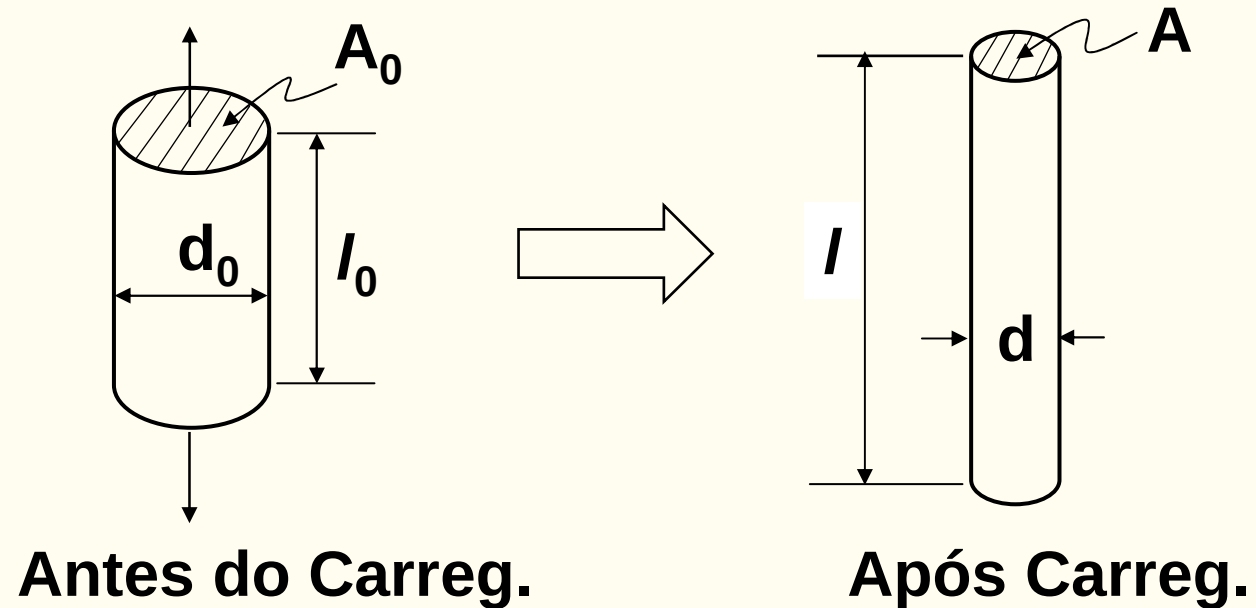
- Ainda que a tensão nominal esteja dentro do intervalo elástico, a tensão local nos entalhes pode ser mais alta que a tensão de escoamento.

A região do entalhe experimenta deformação permanente no descarregamento.



EESC-USP

## Comportamento do Material



Tensão

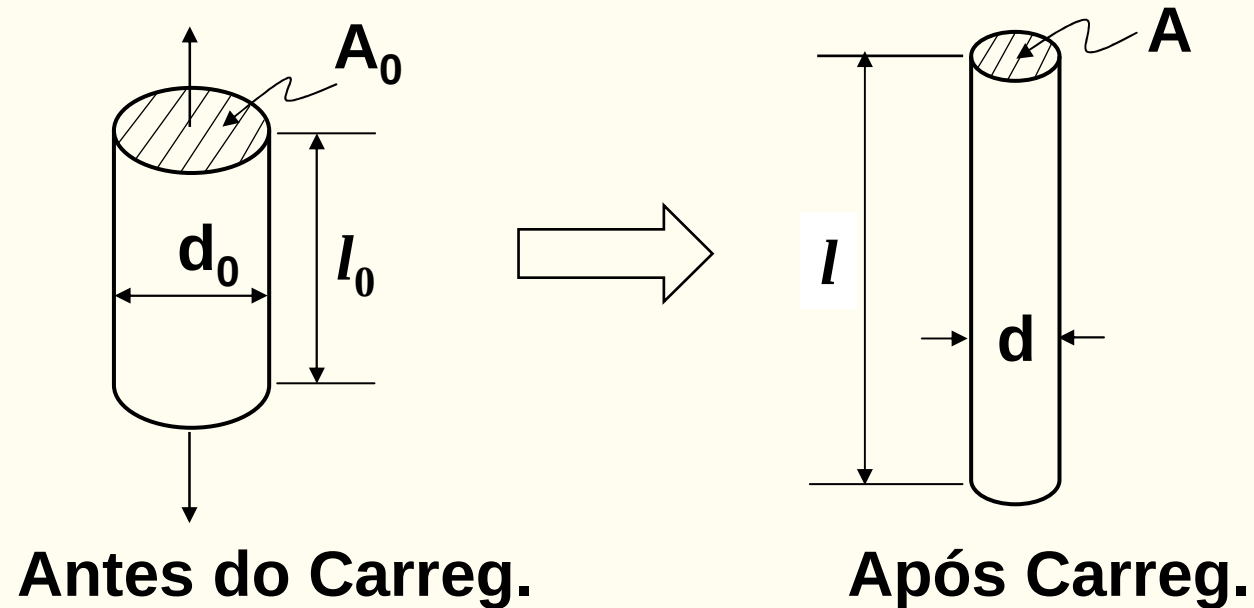
Tensão de Eng.  $S = P/A_0$

Tensão Verd.  $\sigma = P/A$



EESC-USP

## Comportamento do Material



**Deformação**

$$\text{Def. de Eng. e} = \frac{l - l_0}{l_0} = \Delta l / l_0$$

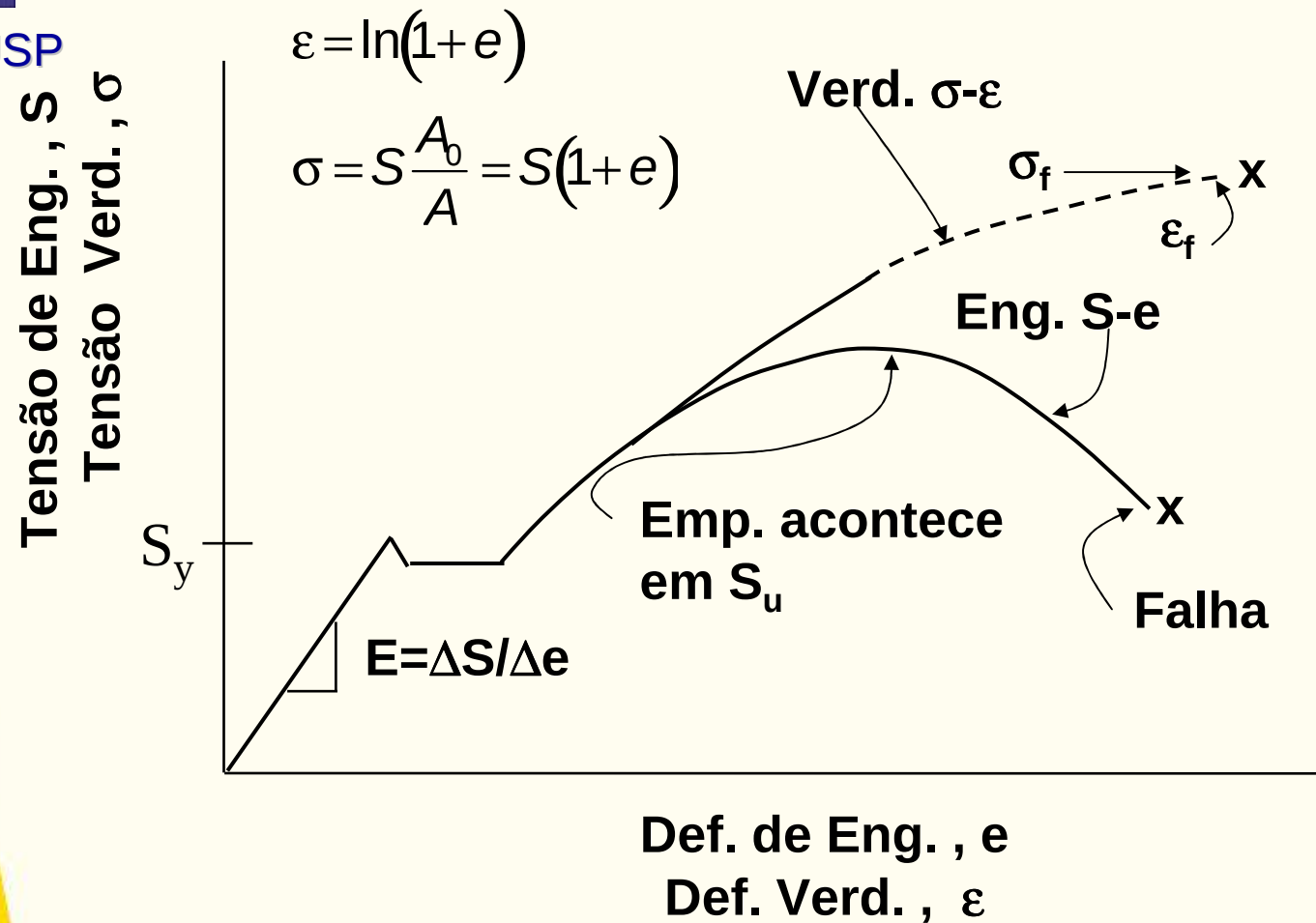
$$\text{Def. Verdadeira} \quad \varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right)$$



EESC-USP



## Def. de Eng. & Def. Verdadeira

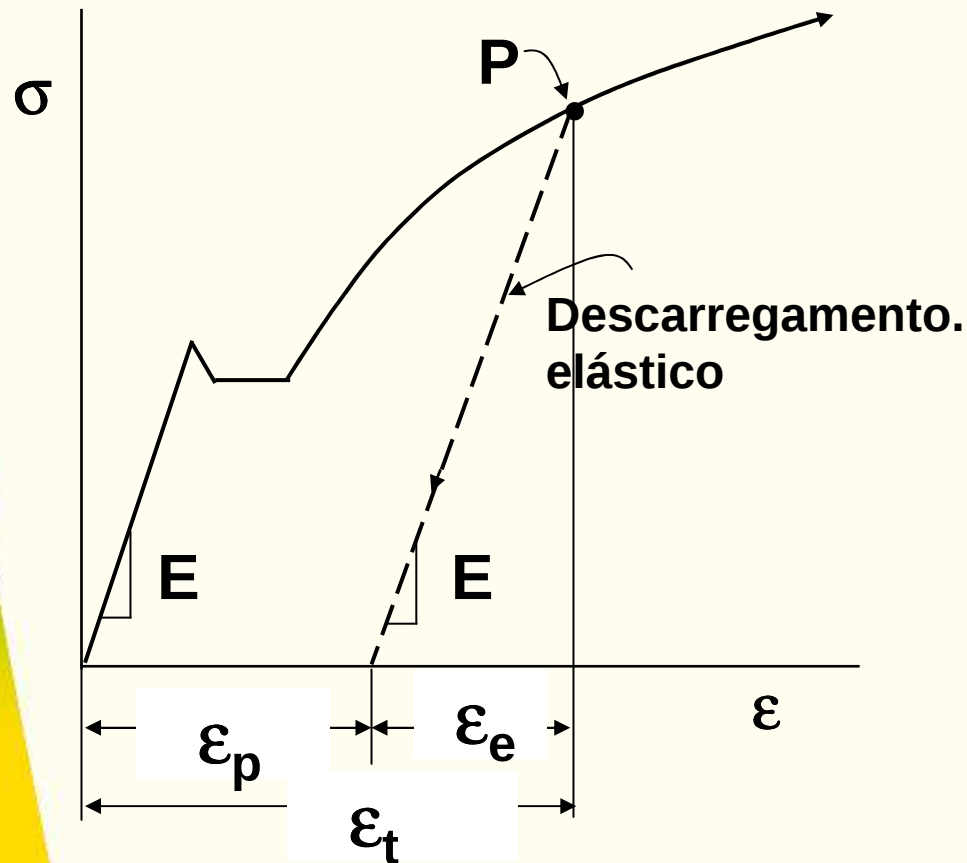


Comparação entre Tensão – Def. Verd. e de Eng.



EESC-USP

## Relação Monotônica entre Tensão-Def.



**Def. total  $\epsilon_t$**

**Def. Elast.  $\epsilon_e$**

**Def. Plast.  $\epsilon_p$**

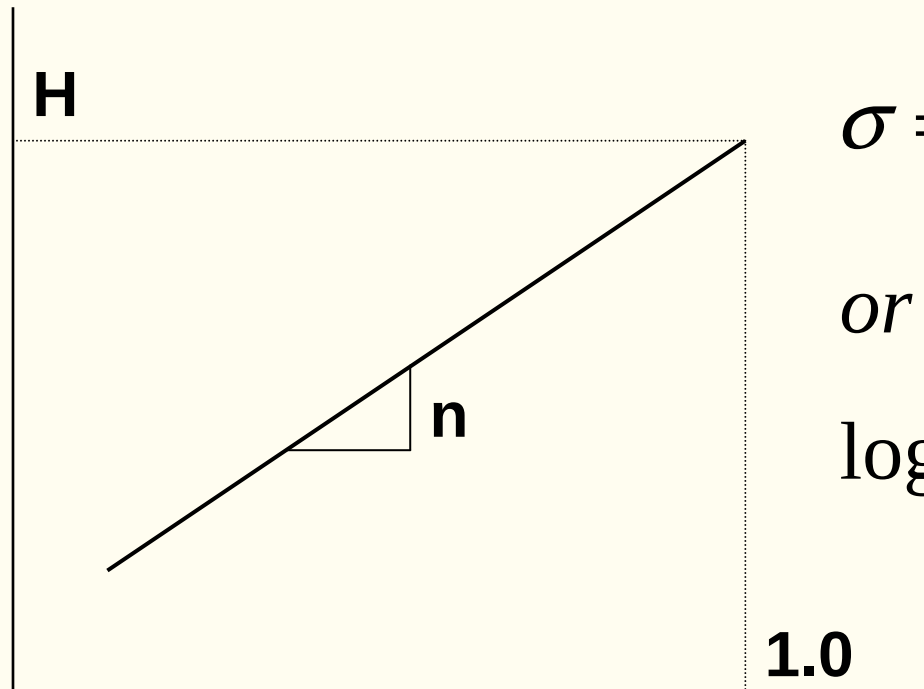
$$\epsilon_t = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\epsilon_e = \sigma / E$$

# Deformação Plástica

EESC-USP

Log Tensão Verd, ( $\log \sigma$ )



Log Def. Plast, ( $\log \epsilon_p$ )

$$\sigma = H (\epsilon_p)^n$$

$$\text{or } \epsilon_p = \left( \sigma / H \right)^{1/n}$$

$$\log \sigma = \log H + n \log \epsilon_p$$

**H – Coeficiente de resistência**

**n - Expoente de encruamento**



EESC-USP



## Deform. Elástica, Plástica & Total

Elástica  $\varepsilon_e = \sigma / E$

Plástica  $\varepsilon_p = \left( \sigma / H \right)^{1/n}$

Total  $\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{H} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Relação tensão – Def.  
De Ramberg-Osgood



EESC-USP

## Def. Elástica, Plástica & Total



**Exemplo:**  $H=478$  MPa,  $E= 68.250$  MPa,  $n=0,5$

(i) Dado  $\sigma = 273$  MPa qual  $\epsilon_t$ ?

$$\epsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{H} \right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\epsilon_t = \frac{273}{68.250} + \left( \frac{273}{478} \right)^{\frac{1}{0,5}} = 0,004 + 0,3265 = 0.3305$$

**Elástica**      **Plástica**      **Total**

↙                      ↙                      ↙

(ii) Qual  $\sigma = ?$  para  $\epsilon_t = 10^{-1}$

$$10^{-1} = \frac{\sigma}{68.250} + \left( \frac{\sigma}{478} \right)^{\frac{1}{0,5}} \longrightarrow \sigma^2 + 3,35\sigma - 1,47 \times 10^{-6} = 0$$

$$\sigma = 149,5 \text{ ou } -154,3 \text{ MPa}$$



## Exemplo sobre a relação monotônica tensão-def.

Dados de ensaio para a liga de Al 7075-T651

|                              |      |      |       |       |       |
|------------------------------|------|------|-------|-------|-------|
| $\sigma$ (MPa)               | 430  | 450  | 470   | 490   | 510   |
| Total $\epsilon_t$ ( $\mu$ ) | 7350 | 8950 | 12850 | 22950 | 45750 |

Dado  $E = 71$  GPa,

A) Determine  $H$  e  $n$  na relação de Ramberg-Osgood para a liga de Al 7075-T651.

B) Coloque em gráfico os dados experimentais e a previsão de Ramberg-Osgood de  $\sigma$  e  $\epsilon$ .



EESC-USP

## Solução



$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad \varepsilon_e = \sigma/E, \quad \varepsilon_p = \left(\sigma/H\right)^{1/n}$$

$$\varepsilon_t = \sigma/E + \left(\sigma/H\right)^{1/n}$$

$$\text{ou } \sigma = H(\varepsilon_p)^n \quad \log \sigma = \log H + n \log \varepsilon_p$$

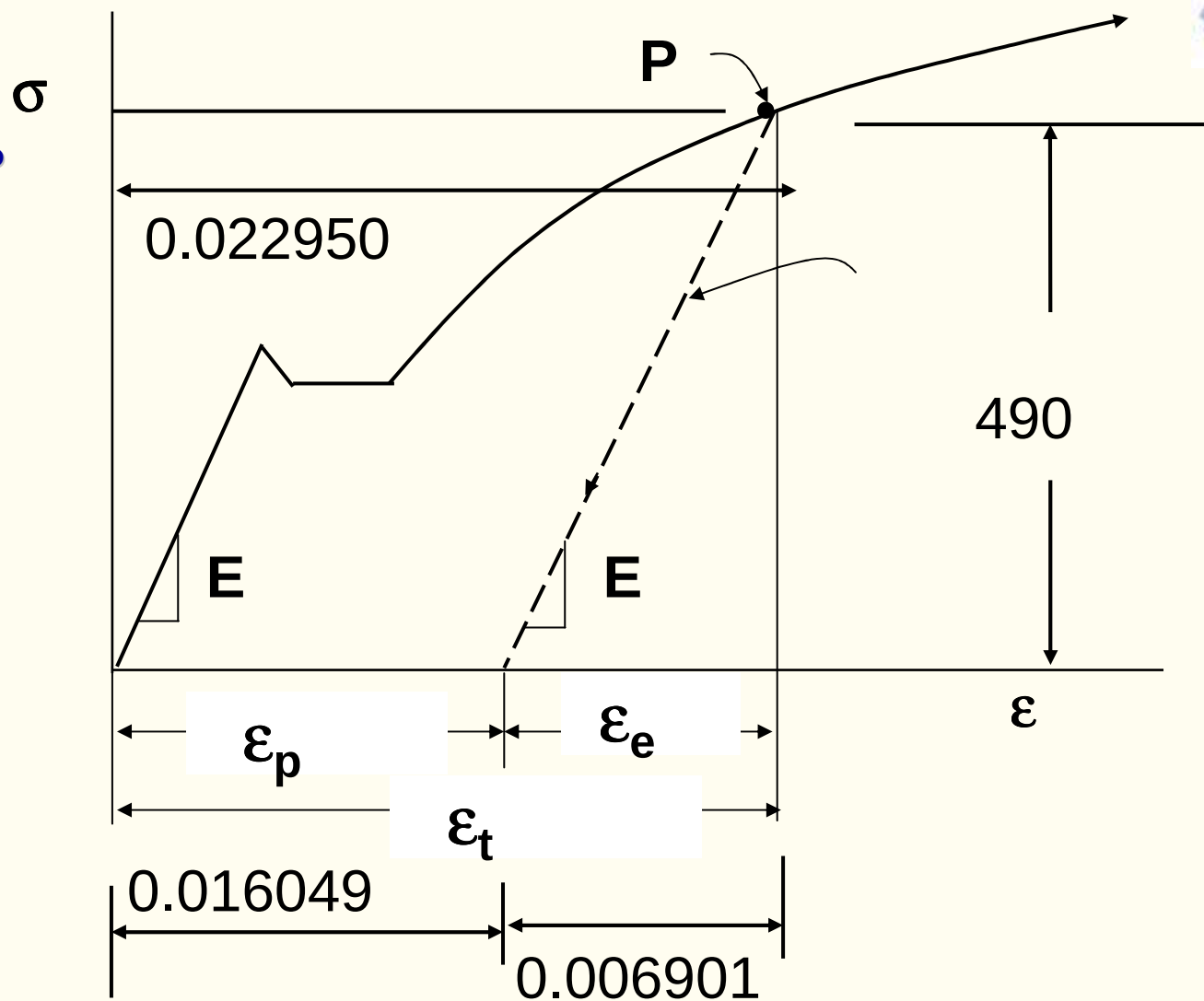
| $\sigma$ | $\varepsilon_t$        | $\varepsilon_e = \sigma/E$ | $\varepsilon_p = \varepsilon_t - \varepsilon_e$ |
|----------|------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------|
| 430      | $7.35 \times 10^{-3}$  | 0.006056                   | 0.001294                                        |
| 450      | $8.95 \times 10^{-3}$  | 0.006338                   | 0.002612                                        |
| 470      | $12.85 \times 10^{-3}$ | 0.006620                   | 0.006230                                        |
| 490      | $22.95 \times 10^{-3}$ | 0.006901                   | 0.016049                                        |
| 510      | $45.75 \times 10^{-3}$ | 0.007183                   | 0.038567                                        |

Dados exp.

Parte elástica



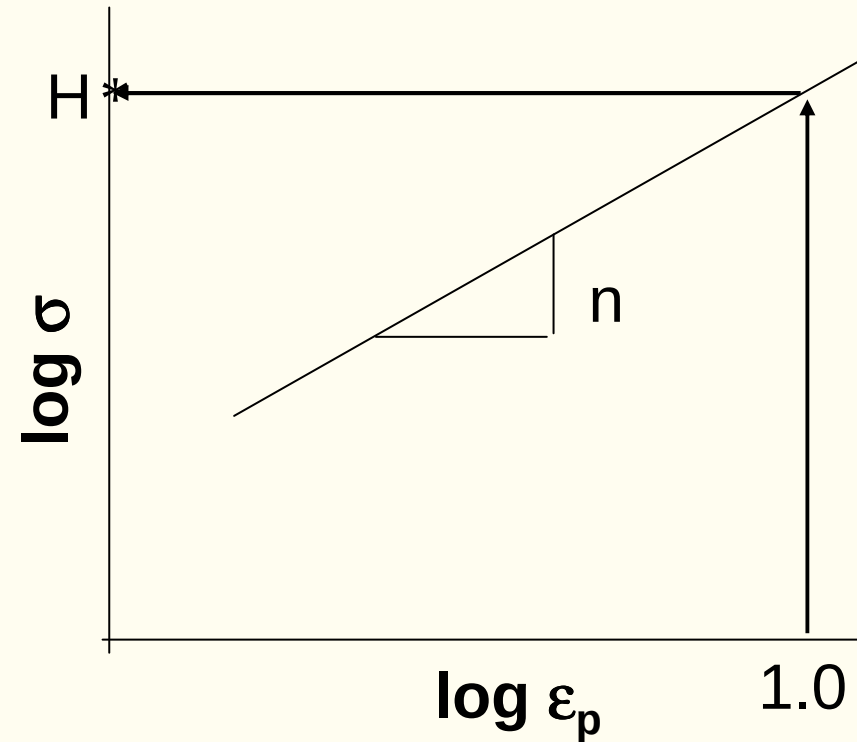
EESC-USP



- Coloque em gráfico  $\sigma$  Versus  $\varepsilon_p$  na escala log

EESC-USP

**H=600.9 MPa**  
**n=0.04937**

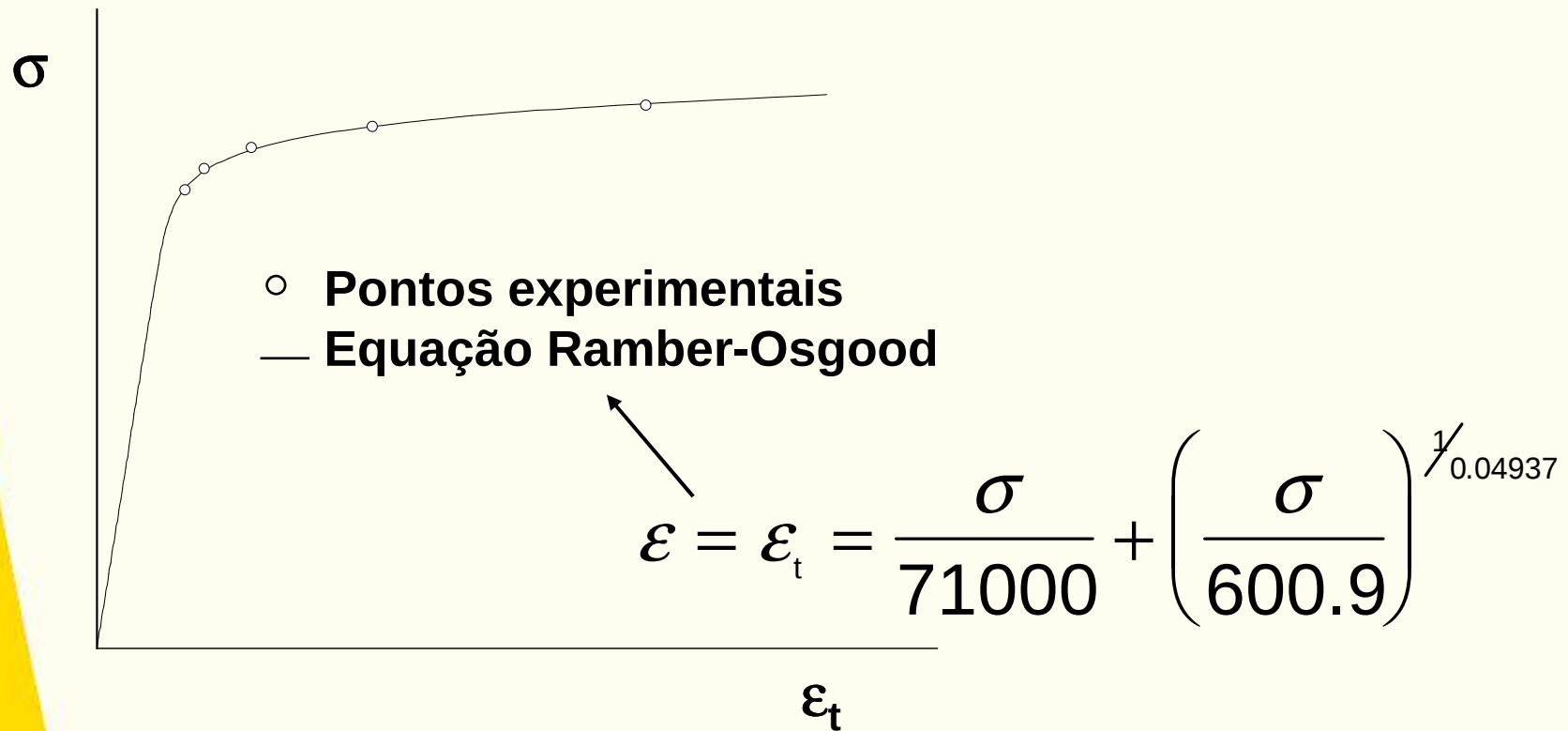


De maneira 
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{71000} + \left( \frac{\sigma}{600.9} \right)^{1/0.04937}$$



EESC-USP

## Comparação dos dados experimentais com a previsão de Ramberg-Osgood





EESC-USP

## Comportamento Cíclico dos Materiais





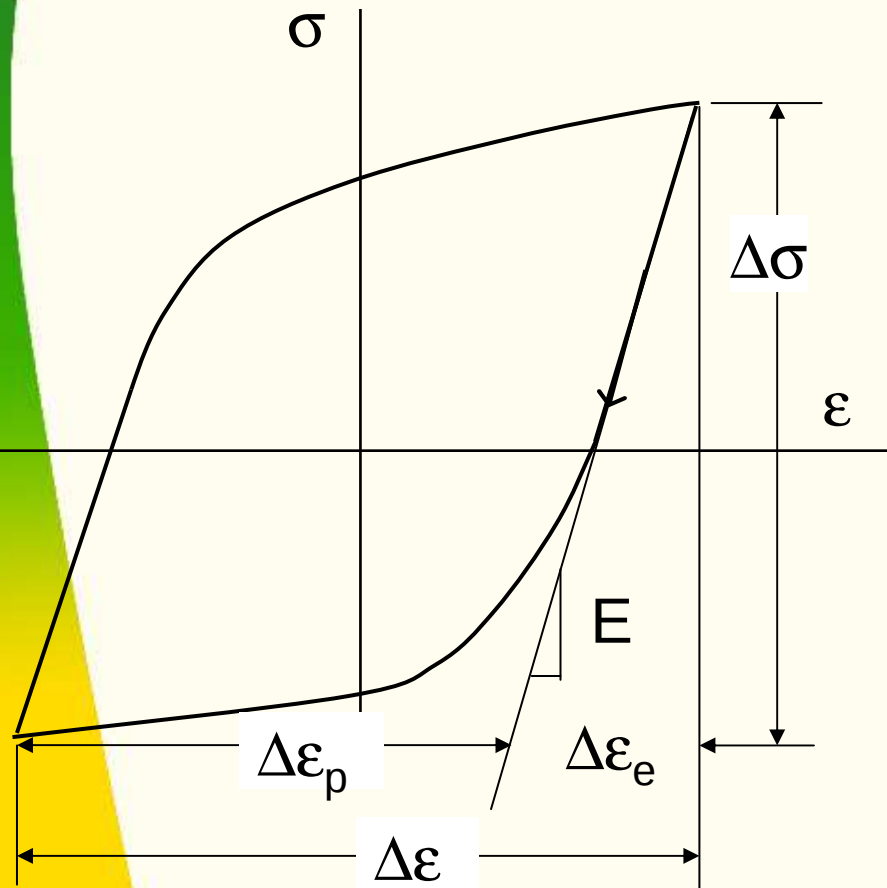
EESC-USP

## Comportamento Cíclico dos Materiais



**Laço de histerese:**

**Resposta do Material a carregamentos cíclicos inelásticos**



$\varepsilon_a = \Delta\varepsilon/2 =$  amplitude de def.

$\sigma_a = \Delta\sigma/2$  amplitude de tensão

$\Delta\varepsilon_e$  - parte elástica

$\Delta\varepsilon_p$  - parte plástica

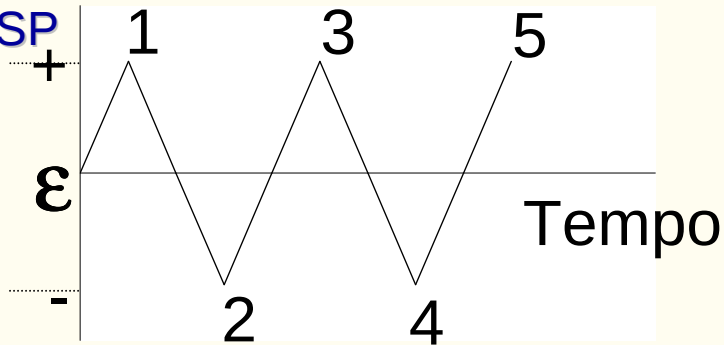
$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2};$$

$$\Delta\varepsilon_e = \frac{\Delta\sigma}{E}$$

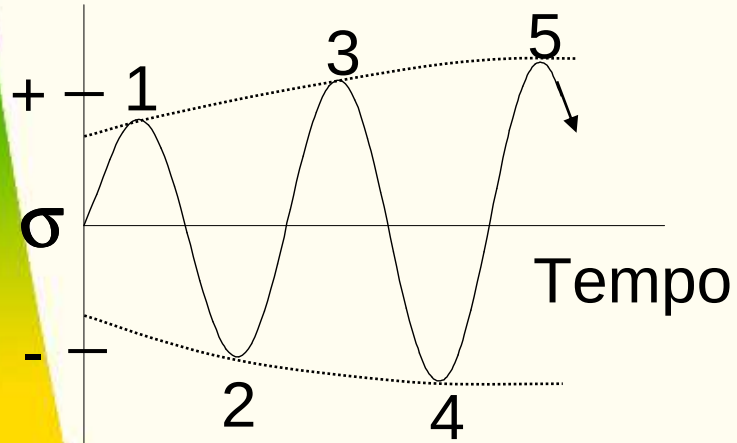


EESC-USP

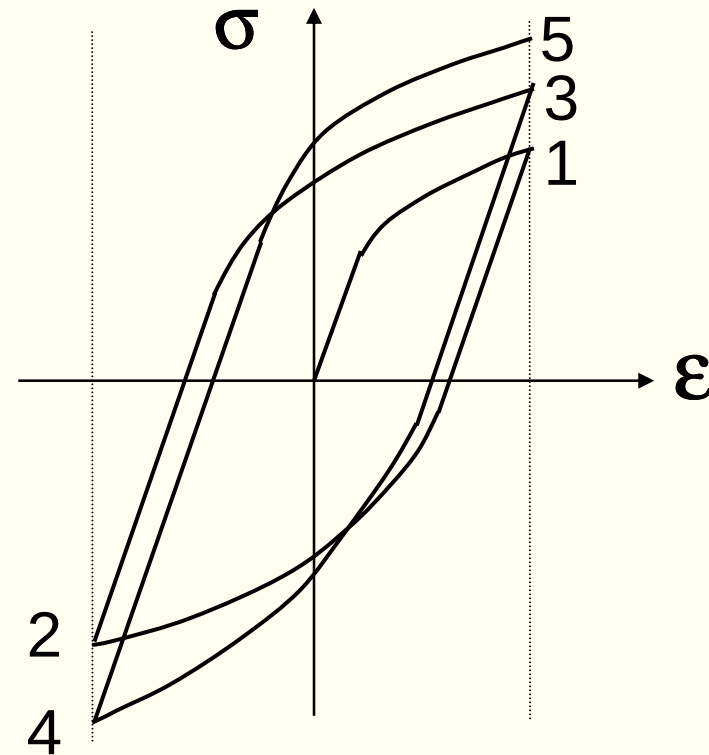
## Comportamento Transiente – Encruamento



(a) Amplitude de deform. Const.



(b) Resposta da tensão  
(aumentando o nível de tensão)

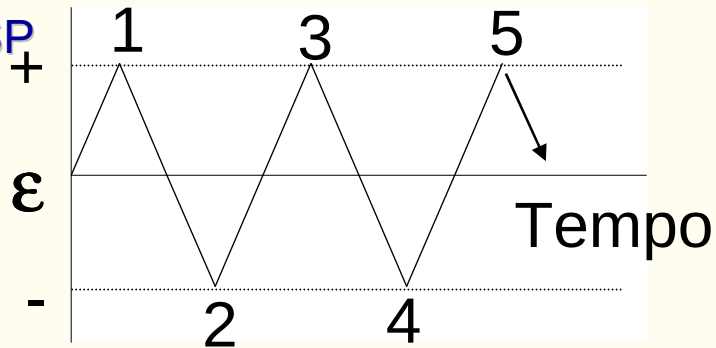


(c) Resposta Tensão-Def.

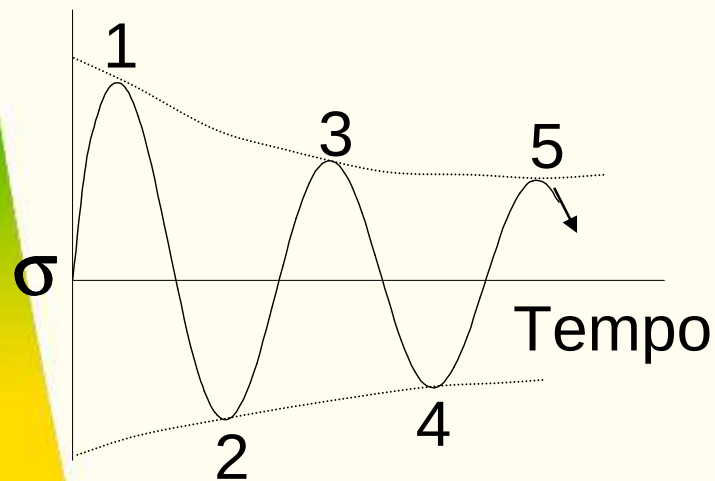


## Comportamento Transiente – Amolecimento

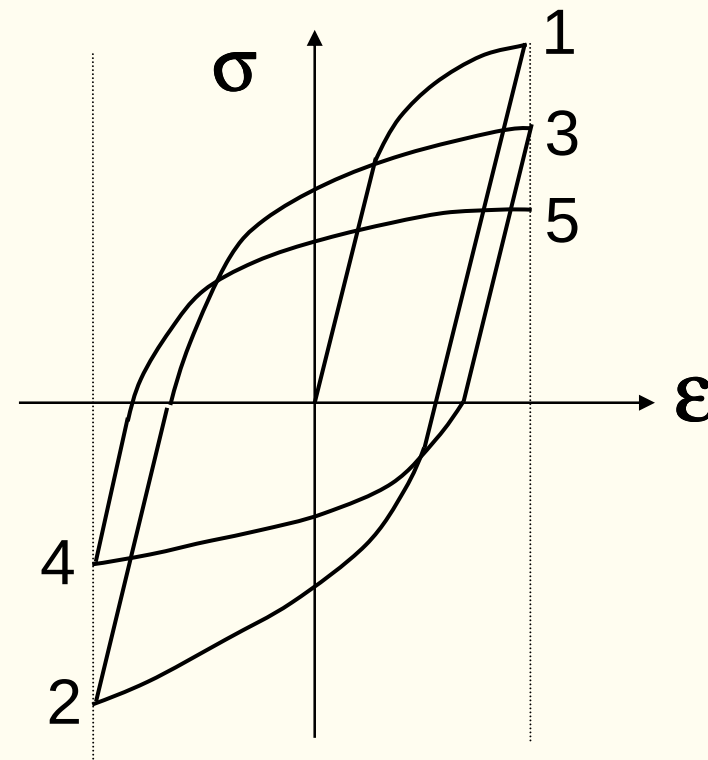
EESC-USP



(a) Ampl. De def. cíclica



(b) Resposta Tensão  
(diminuindo o nível de tensão)



(c) Resposta cíclica tensão-def.



EESC-USP

## Encruamento Vs. Amolecimento



**Postulado de Manson:** Baseado em observações experimentais. usando as propriedades estáticas do material (limite de resist. e de escoamento e expoente de encruamento,  $n$ ), pode ser previsto se o material irá encruar ou amolecer.

Se  $(\sigma_u / \sigma_y) > 1,4$   
ou  $n > 0,2$  } material ciclicamente endurece

Se  $(\sigma_u / \sigma_y) < 1,12$   
ou  $n < 0,1$  } material ciclicamente amolece

onde,  $n$  é dado por 
$$\epsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{H} \right)^{\frac{1}{n}}$$

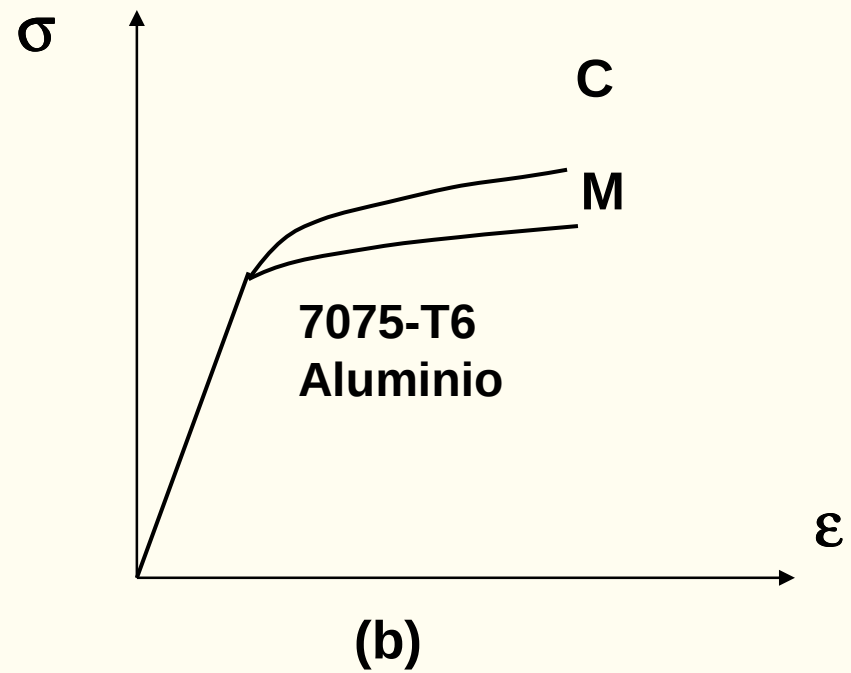
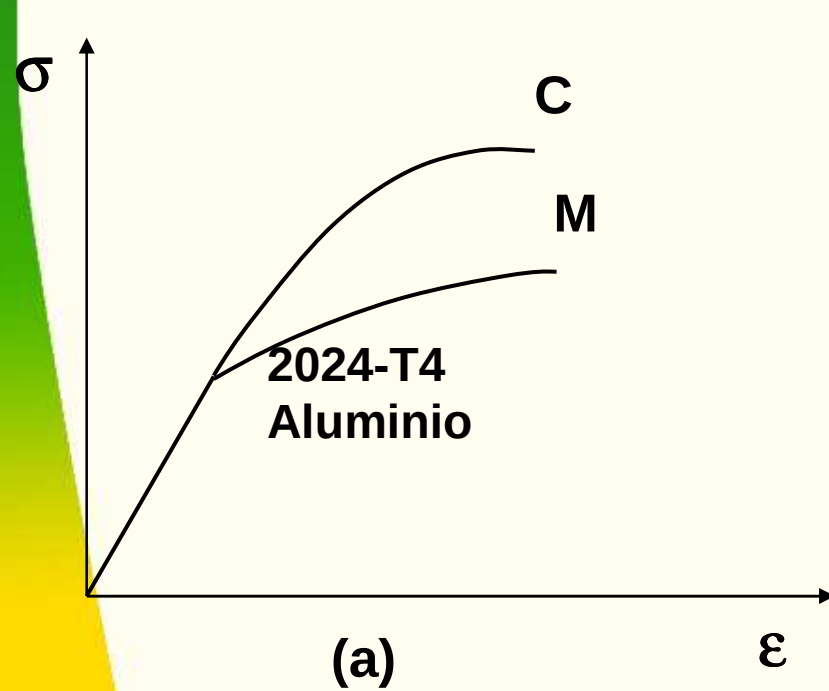


EESC-USP

## Encruamento/amolecimento



### Curva Tensão- Def. Ciclico (C) e monotônico (M)

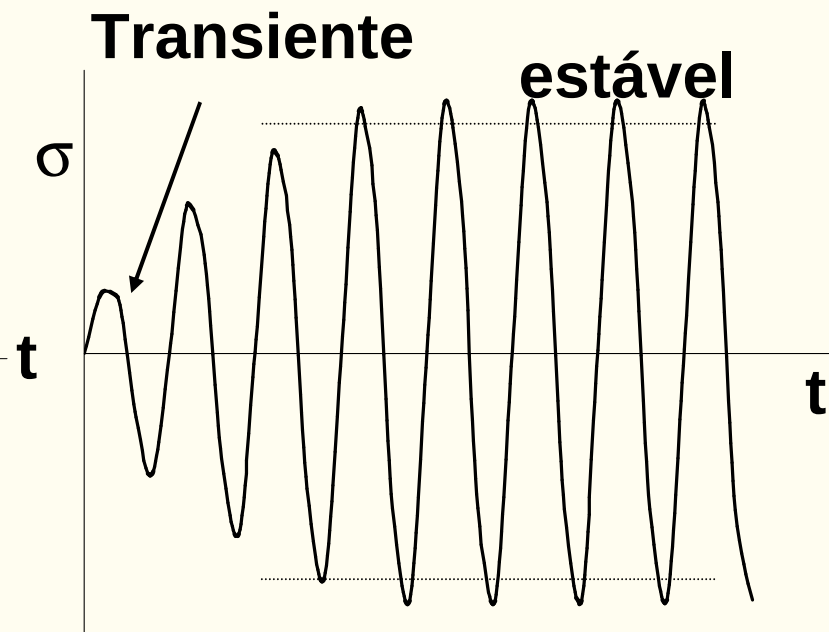
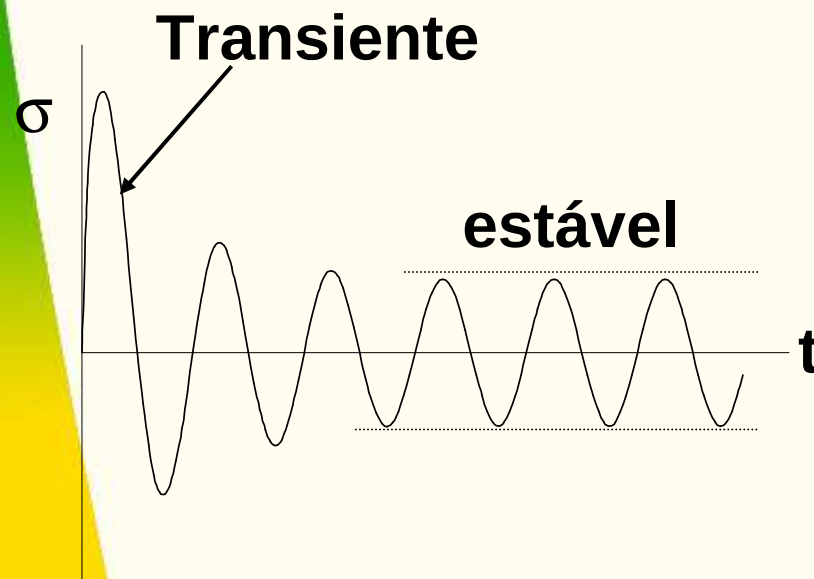




## Condição Cíclicamente Estável

EESC-USP

- Transiente (encruamento/amolecimento) ocorre durante os primeiros ciclos da vida em fadiga.
- Eventualmente o material atinge a condição cíclicamente estável.





EESC-L

## Efeito da Condição de Tratamento Térmico no Laço de Histerese

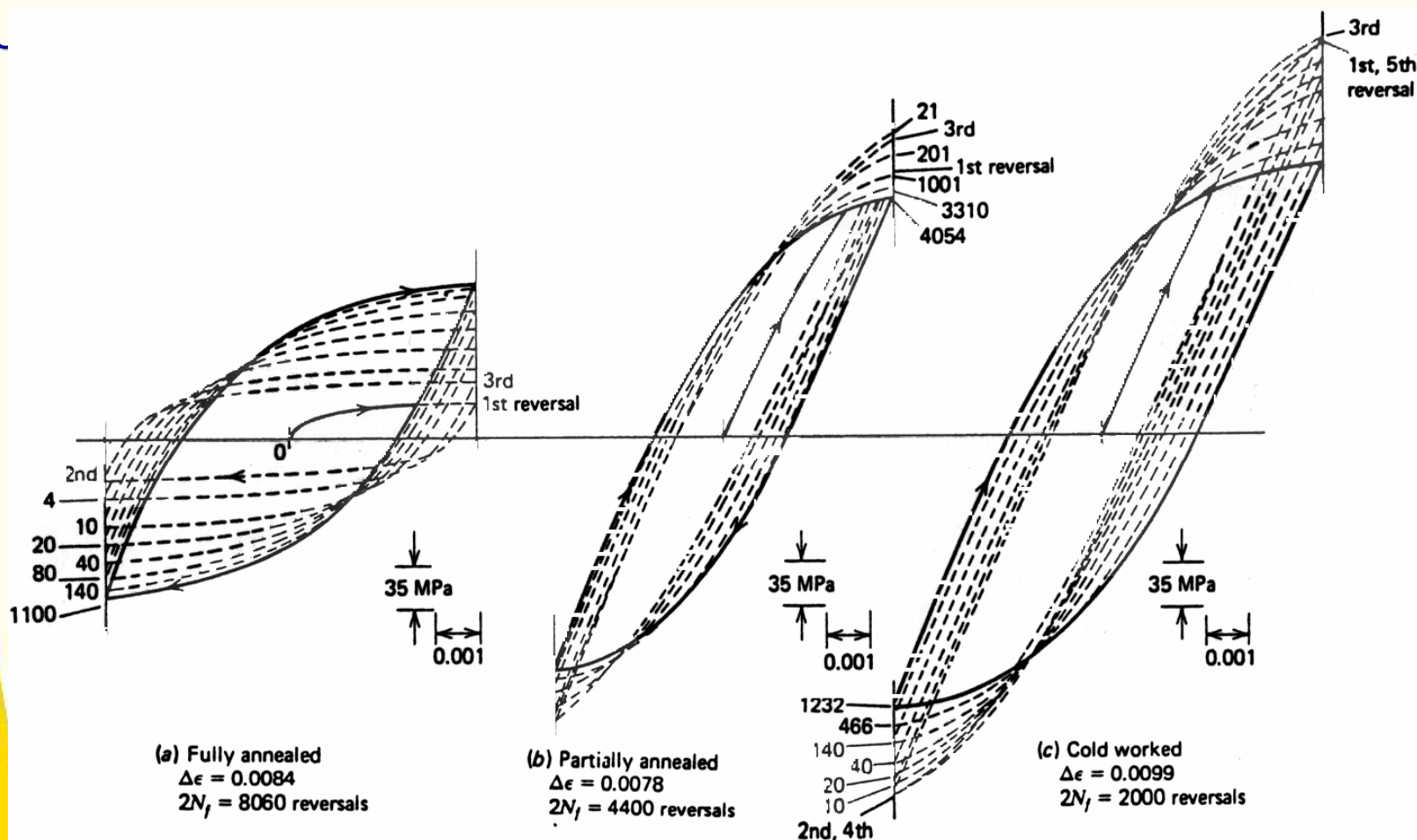


Figure 2.10 Hysteresis response of OFHC copper. (From Ref. 10.)

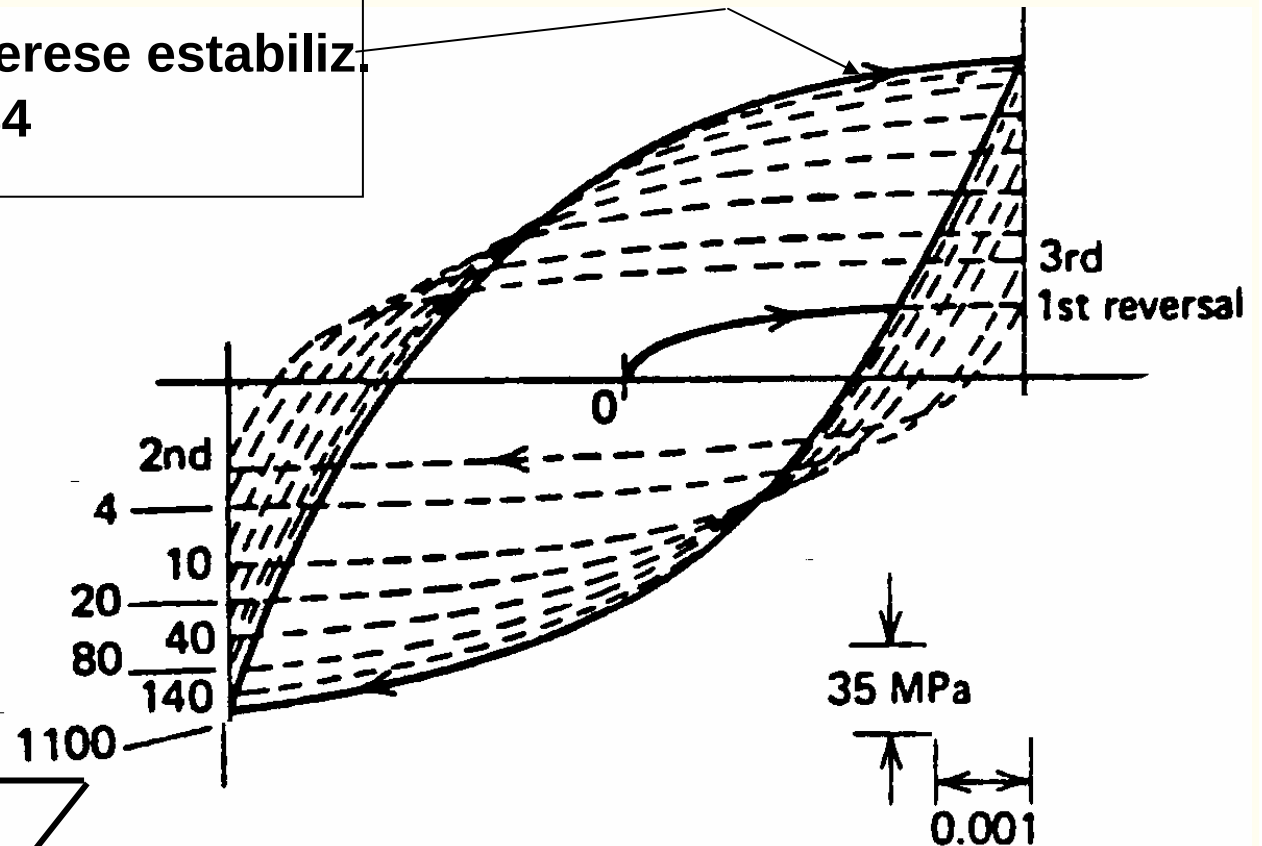


EESC-USP

## Laço de Histerese do Cobre



Laço de Histerese estabiliz.  
em  $\Delta\epsilon = 0.0084$



Material exibe endurecimento na condição de recozido.

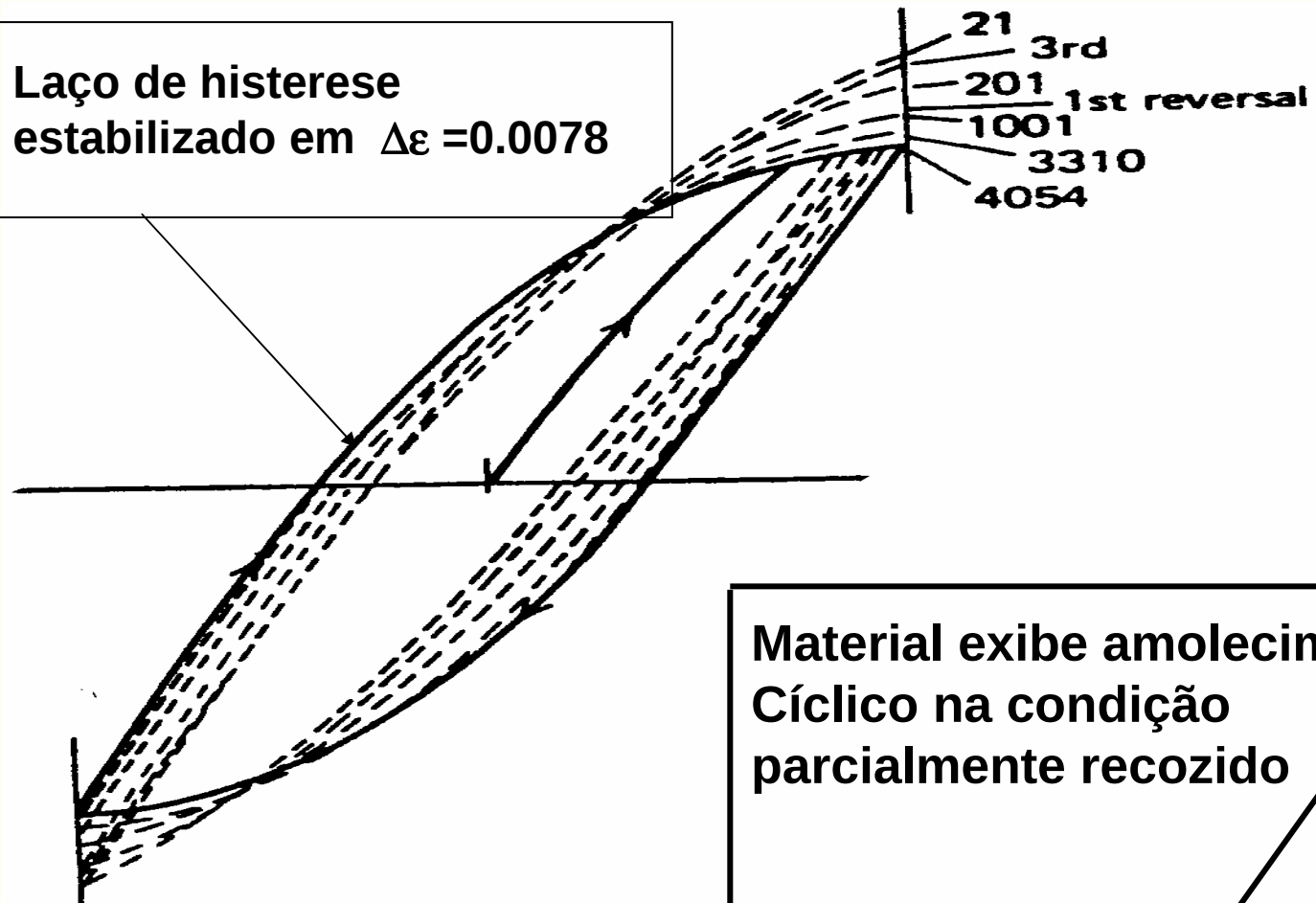
(a) Fully annealed  
 $\Delta\epsilon = 0.0084$   
 $2N_f = 8060$  reversals



EESC-USP

## Laço de Histerese do Cobre

Laço de histerese  
estabilizado em  $\Delta\epsilon = 0.0078$



Material exhibe amolecimento  
Cíclico na condição  
parcialmente recozido

(b) Partially annealed  
 $\Delta\epsilon = 0.0078$   
 $2N_f = 4400$  reversals



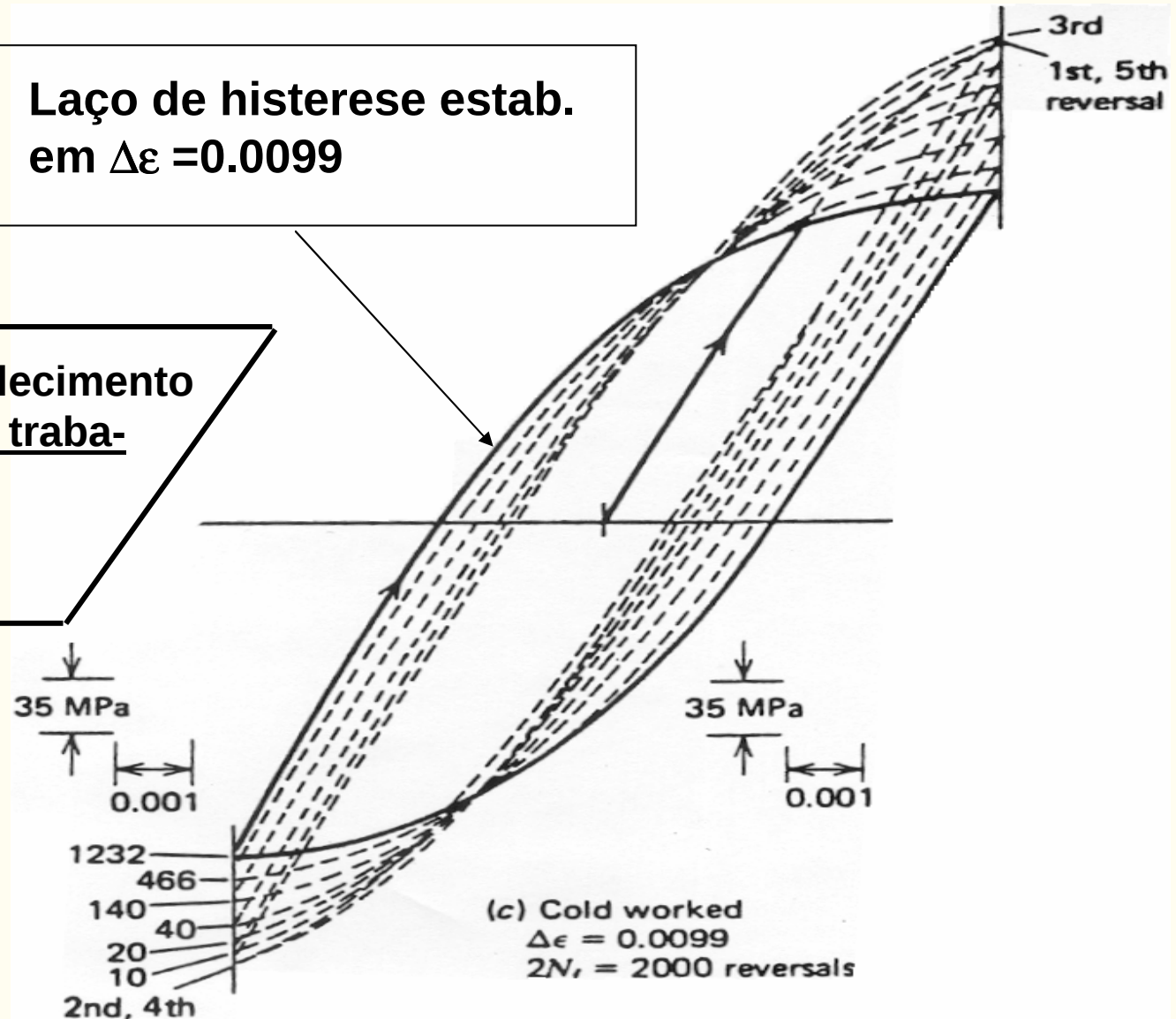
EESC-USP

## Laço de Histerese do Cobre



Laço de histerese estab.  
em  $\Delta\epsilon = 0.0099$

Material exibe amolecimento  
cíclico na cond. de traba-  
lhado a frio.

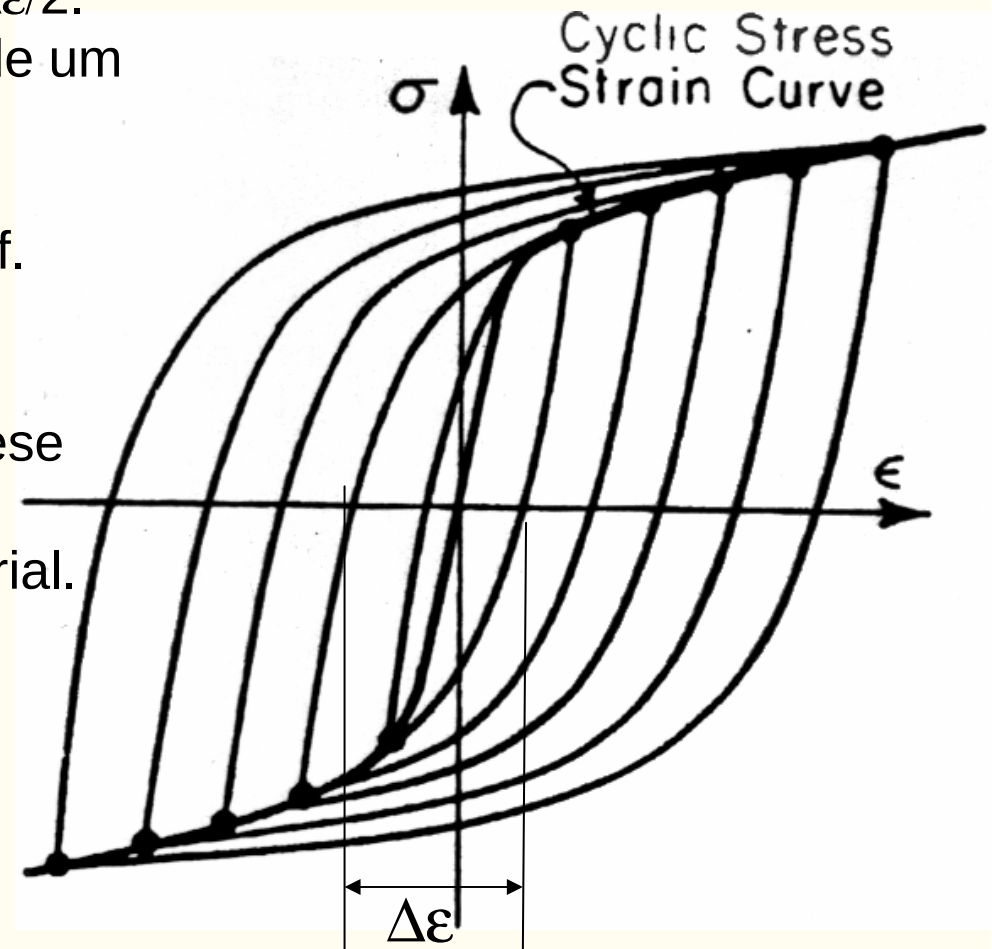




# Determinação da Curva Tensão-Deformação Cíclica

EESC-USP

- Aplicar uma amplitude de def. de  $\Delta\epsilon/2$ .
- O transiente de tensão é seguido de um laço de histerese estabilizado
- Estabeleça o laço de histerese estabilizado para este nível de def.
- Repetir o procedimento com uma diferente amplitude de def.
- Unir as pontas dos laços de histerese estabilizados.
- A CURVA TENSÃO DEF. do Material.





EESC-USP



## RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO CÍCLICA

Def. Total  $\varepsilon_t = \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

Def. Elast.,  $\varepsilon_e = \sigma / E$

Def. Plast,  $\varepsilon_p = \left( \sigma / H' \right)^{1/n'}$

$$\sigma = H' \left( \varepsilon_p \right)^n$$

De maneira que  $\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}}$

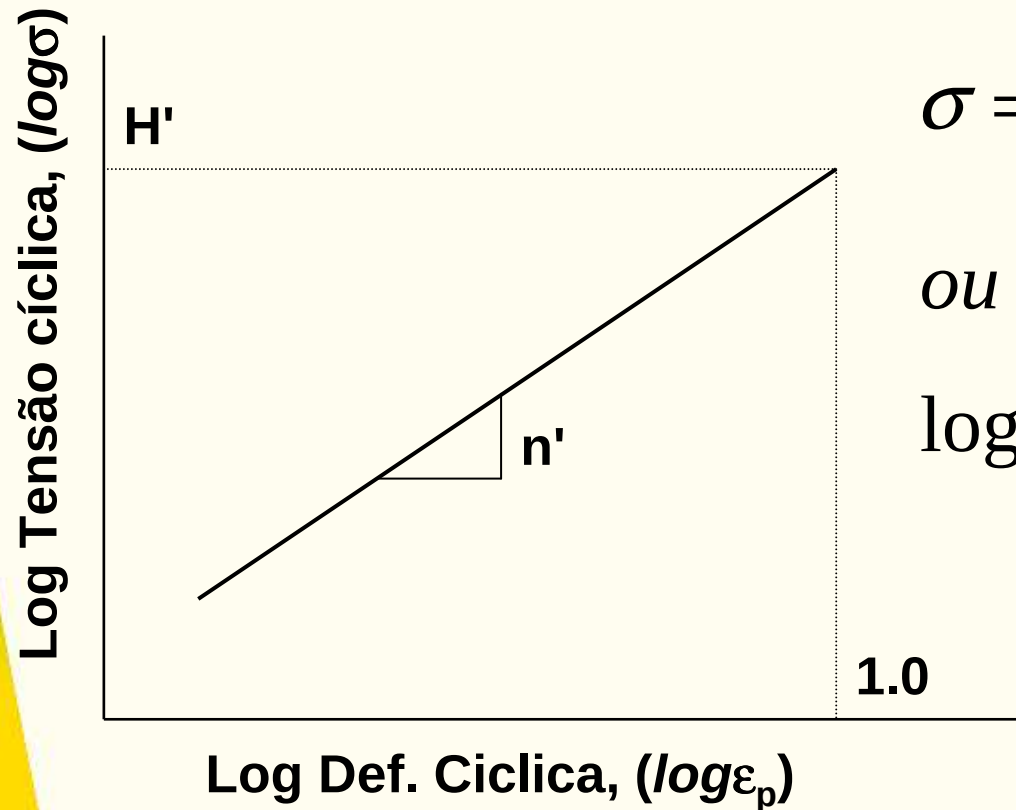
**H' – Coef. de Resist. cíclica**

**n' - Expoente de encruamento cíclico.**



EESC-USP

## RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO CÍCLICA



$$\sigma = H' (\epsilon_p)^n$$

$$\text{ou } \epsilon_p = \left( \sigma / H' \right)^{1/n'}$$

$$\log \sigma = \log H' + n' \log \epsilon_p$$



EESC-USP



## CURVA DE HISTERESE ESTABILIZADA

### Hipótese de Massing:

- Para materiais exibindo comportamento simétrico em tração e compressão.
- Curva de histerese pode ser **ESTIMADA** a partir da curva Tensão - Def. cíclica estabilizada.
- Dobrar os valores de tensão e def. da curva estabilizada da curva tensão- def. cíclica.

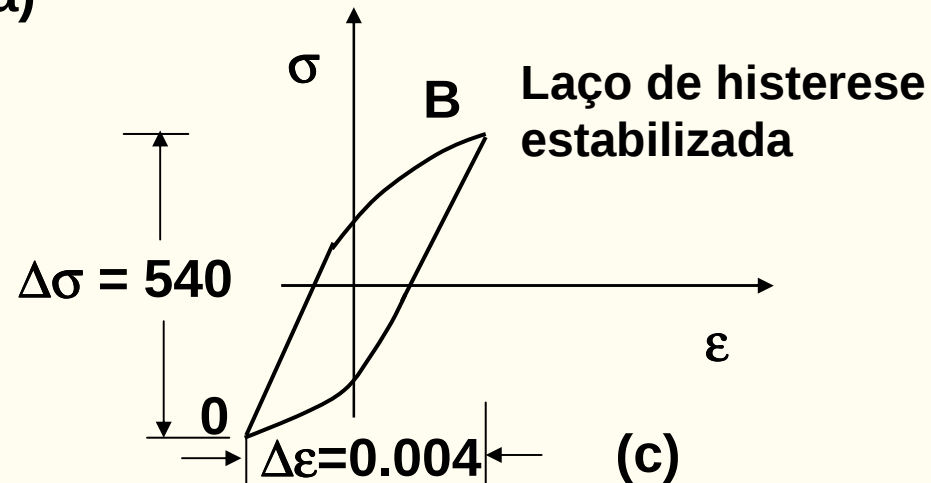
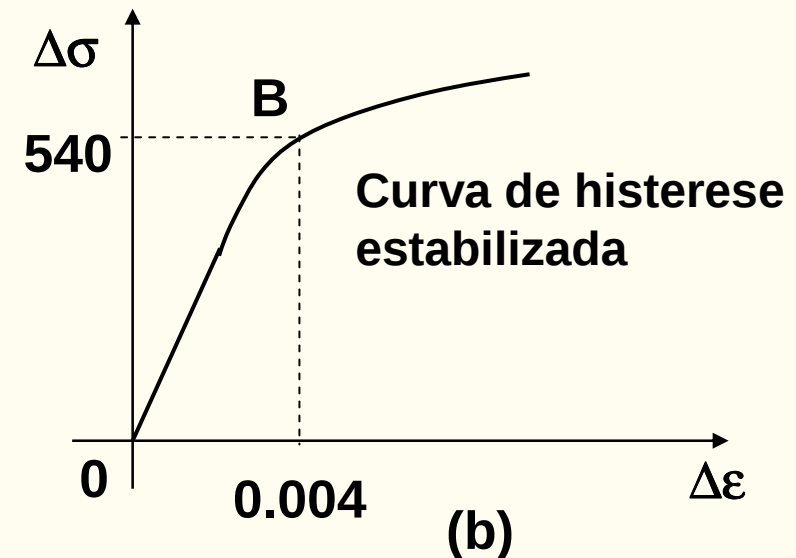
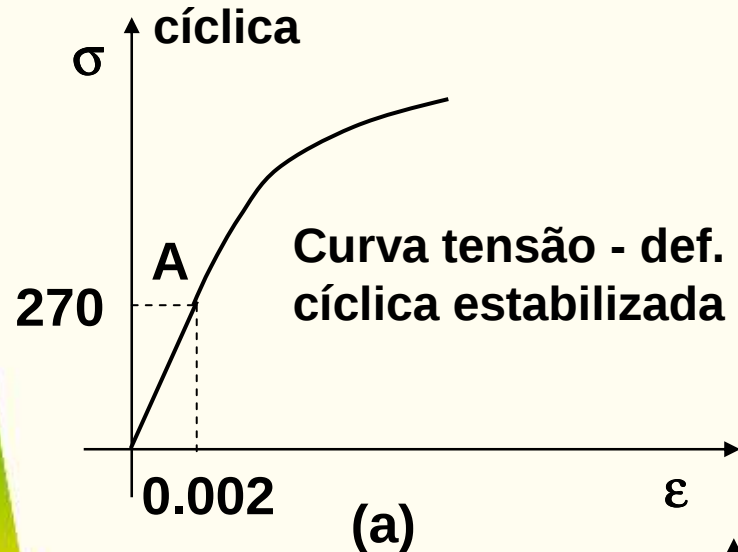


EESC-USP

## CURVA DE HISTERESE ESTABILIZADA



Segundo a hipótese de Massing: Dada uma curva tensão – def. cíclica, obter o ponto B sobre a curva dobrando o valor correspondente ao ponto A na curva T X Def. cíclica





EESC-USP

## EQUAÇÕES PARA O LAÇO DE HISTERESE

Relembre  $\varepsilon = \varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}}$

Seguindo a hipótese de Massing:

$$\begin{array}{ccc} \Delta\sigma = 2\sigma & \longrightarrow & \sigma = \Delta\sigma/2 \\ \Delta\varepsilon = 2\varepsilon & & \varepsilon = \Delta\varepsilon/2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De maneira que } \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta\sigma}{2H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \\ \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left( \frac{\Delta\sigma}{2H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \end{array} \right\} \text{Eq. da histerese}$$



EESC-USP

## Curvas Deformação-Vida



Usando a amplitude de tensão verdadeira ( $\Delta\sigma/2$ ), os dados Tensão-vida (S-N) podem ser plotados linearmente na escala log-log,

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (2.37)$$

$2N_f$  = reversos para falhar ( um reverso =  $\frac{1}{2}$  ciclo)

$\sigma_f'$  = coef. de resist. a fadiga  
 $b$  = expoente de resist. a fadiga

**Propriedade de fadiga do material**

$\sigma_f' \approx$  resist. verdadeira a fadiga,  $\sigma_f$



EESC-USP



## Curvas Tensão-Deformação

**Manson & Coffin encontraram que os dados def.-vida ( $\epsilon_p$ -N)  
Podem ser também linearizados na coord. log-log.**

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = \epsilon_f' \left( 2N_f \right)^c \quad (2.38)$$

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = \text{amplitude de def. plástica}$$

$$2N_f = \text{reversos para falhar (um reverso} = \frac{1}{2} \text{ ciclo)}$$

$$\epsilon_f' = \text{coef. de ductilidade em fadiga.}$$

$$c = \text{expoente de ductilidade em fadiga}$$

$$\epsilon_f \approx \epsilon_f'$$

**Propriedade de  
Fadiga do material**



EESC-USP



## Curva Tensão - Deformação

Como podemos relacionar a vida a Ampl. De Def. Total  $\Delta\epsilon/2$ ?

$$\text{Relembre, } \frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2}$$

$$\frac{\Delta\epsilon_e}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} \quad (2.39)$$

De 2.37 & 2.39

$$\frac{\Delta\epsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b \quad (2.40)$$

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \epsilon_f' (2N_f)^c \quad (2.41)$$

↑  
elástica

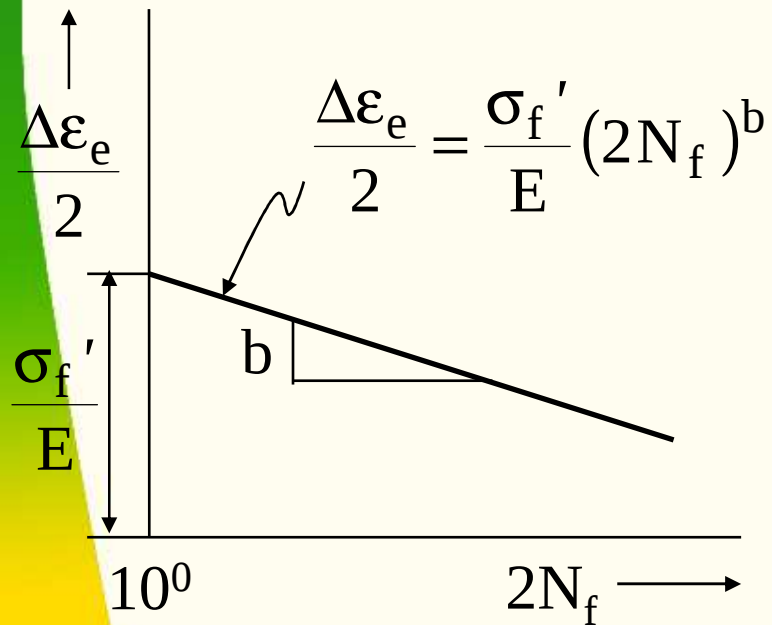
↑  
plástica

**Relação  
Tensão-vida**

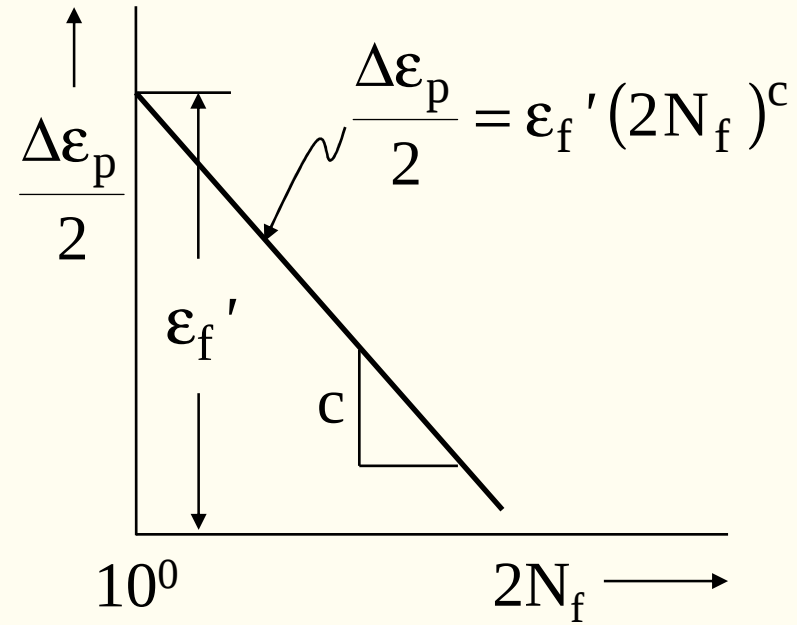


EESC-USP

Note Eqns 2.37 e 2.38 são lineares no plano log-log



Def. – Vida Elástica

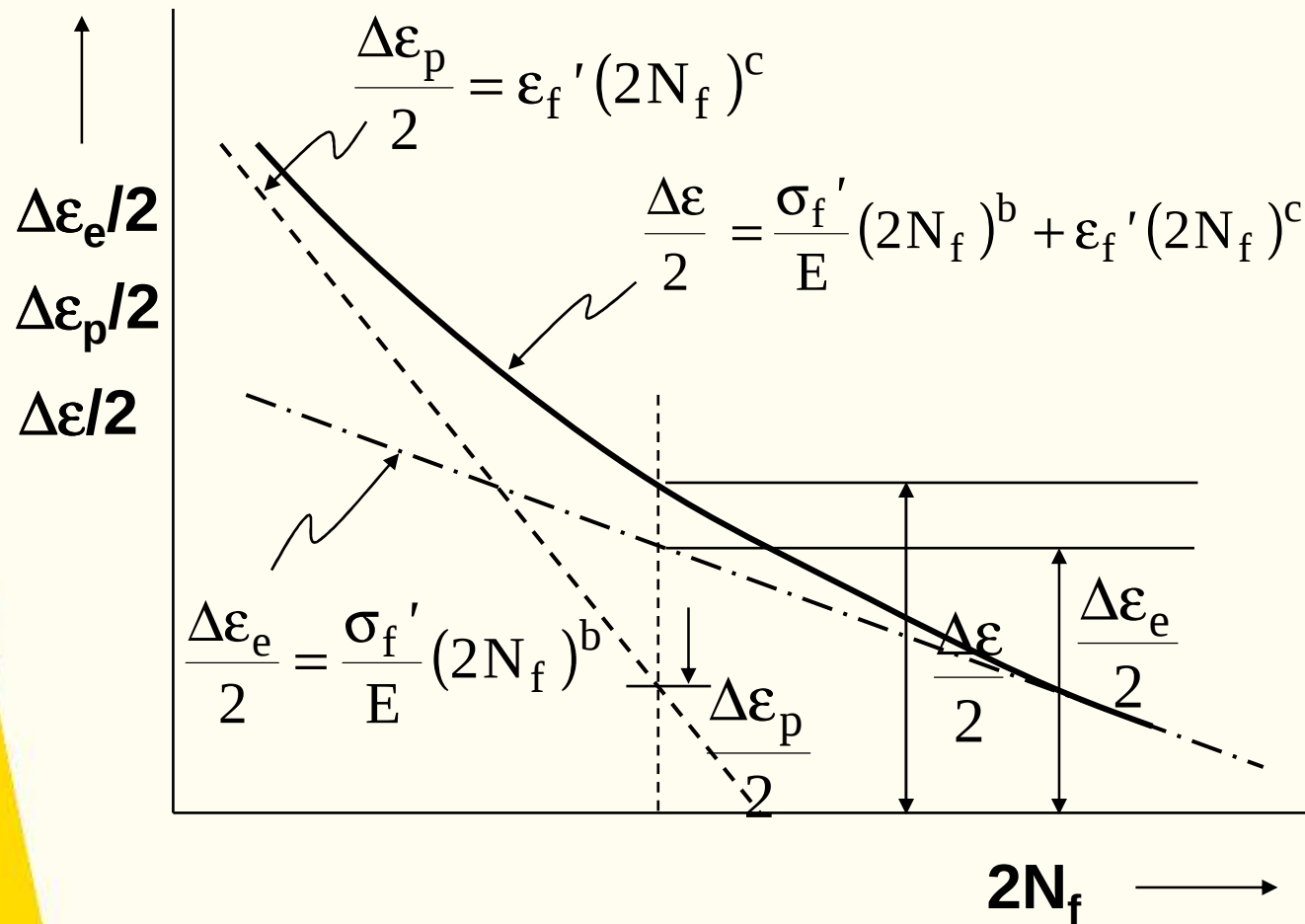


Def. – Vida plástica



EESC-USP

## Relação Tensão – Vida Total

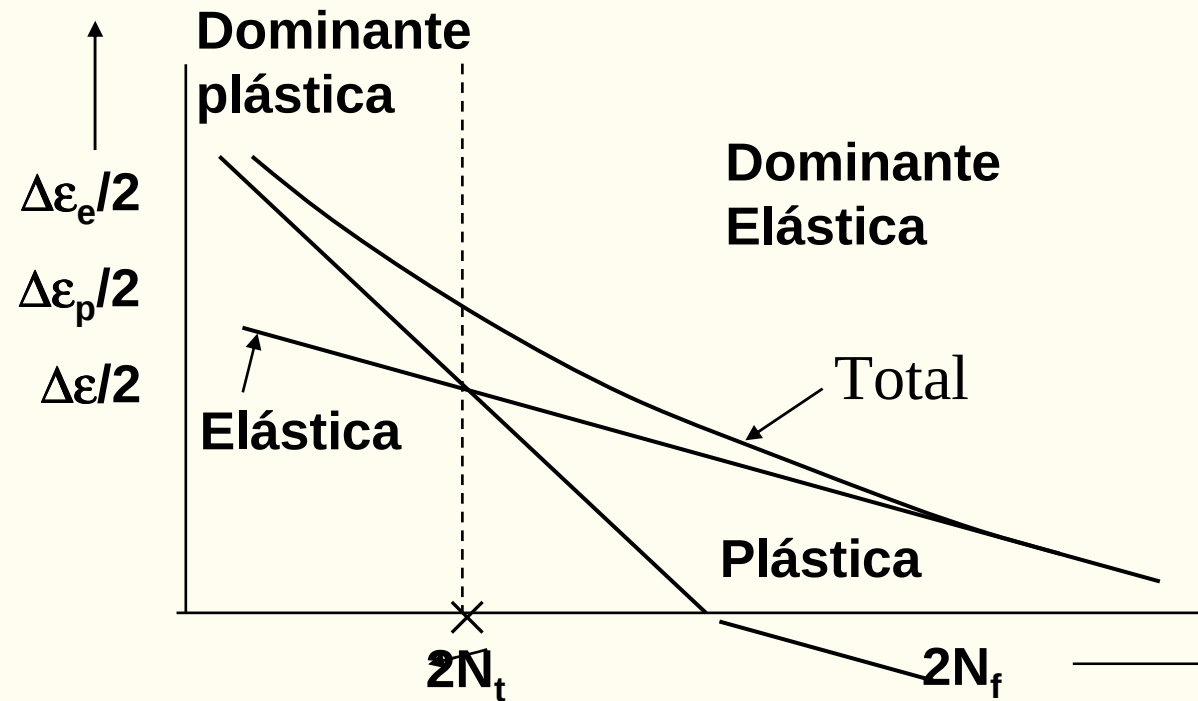




EESC-USP



## Vida de Transição



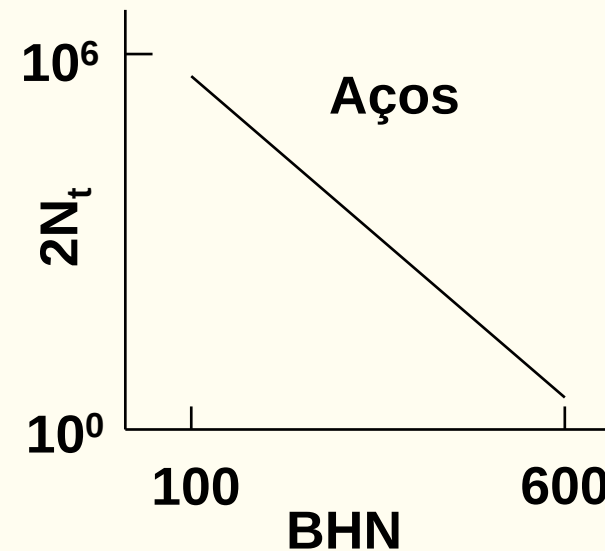
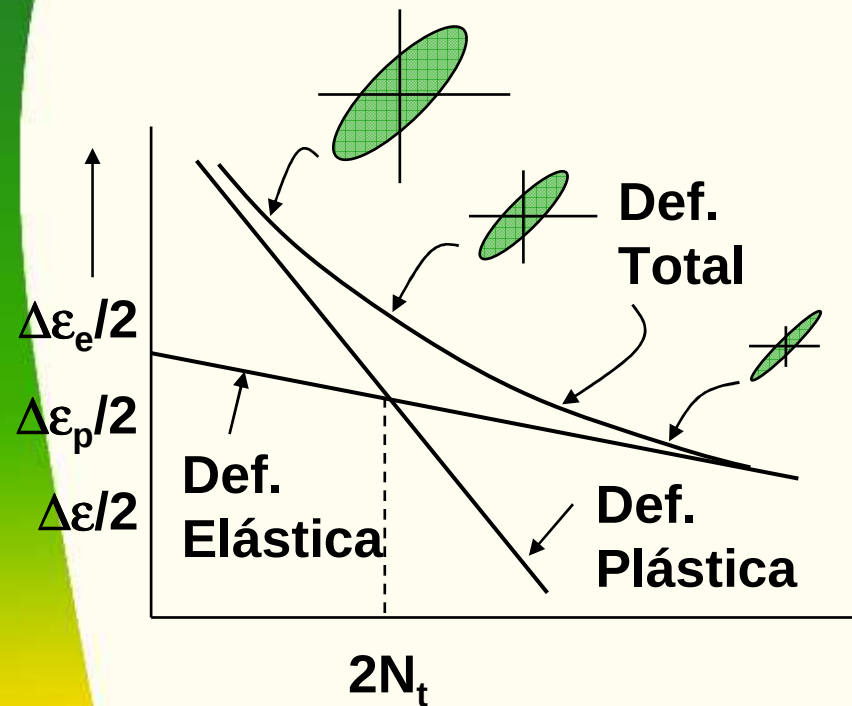
$$\text{Em } 2N_f = 2N_t : \frac{\Delta\epsilon_e}{2} = \frac{\Delta\epsilon_p}{2}$$

$$\frac{\sigma_f'}{E} (2N_t)^b = \epsilon_f' (2N_t)^c \Rightarrow 2N_t = \left( \frac{\epsilon_f' E}{\sigma_f'} \right)^{1/b-c}$$



EESC-USP

## Vida de Transição

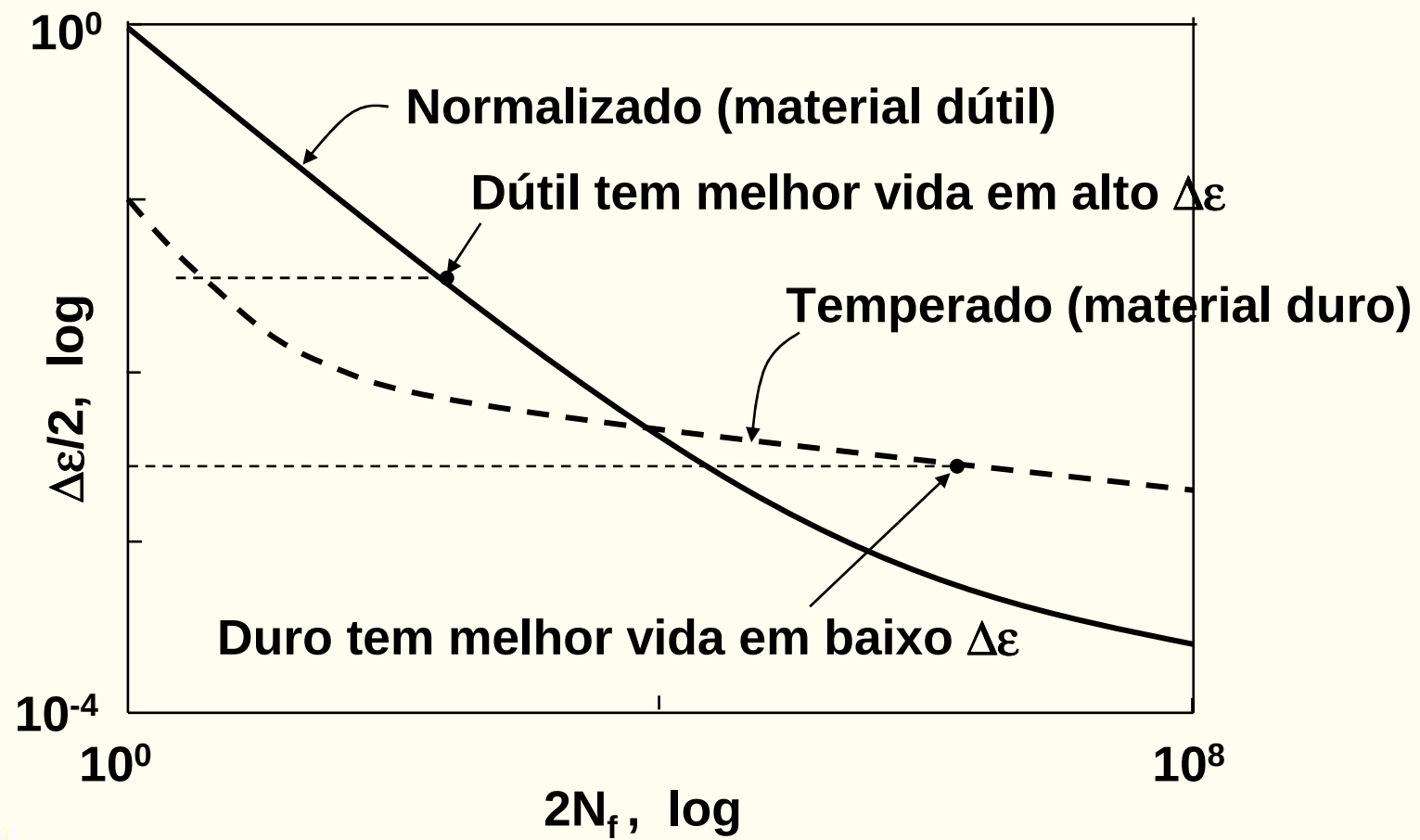


Duro  $\rightarrow 2N_t$  é pequena – mais de  $2N_f$  é elástica  
Mole  $\rightarrow 2N_t$  é grande – mais de  $2N_f$  é plástica



EESC-USP

## Resistência e Dutilidade





EESC-USP

## Propriedades de Fadiga



**$b, c, \sigma_f', \epsilon_f'$ : Constantes empíricas**

1. Nem todos os materiais podem ser representados por equações de quatro parâmetros (i. e., ligas de Al & Ti)
2. Parâmetros obtidos pelo ajuste da curva – portanto, a acuracidade depende dos números de pontos usados ou disponíveis.
3. Parâmetros aplicáveis à um dado intervalo de dados – fora do intervalo pode dar um grande erro
4. Conveniência estritamente matemática – sem base física.

**Relação:**

$$H' = \sigma_f' / (\epsilon_f')^{n'} \\ n' = b/c$$

**Tensão-Def. Cíclica**



EESC-USP

## Propriedades de Fadiga



Na ausência de “dados cíclicos”, os parâmetros de fadiga podem ser obtidos por estimativas grosseira a partir das “propriedades monotônicas”

$$\sigma_f' \approx \sigma_f \quad \sigma_f \approx S_u + 50 \text{ ksi para aços com BHN} < 500$$

b varia com – 0,05 a – 0,12 com uma média de – 0,085  
( a mesma que nós temos no modelo tensão-vida)

$$\varepsilon_f' \approx \varepsilon_f \quad \text{onde } \varepsilon_f = \ln \frac{1}{1-RA}$$

c varia entre – 0.5 to – 0.7

Para metais muito dútil  $c \approx - 0.6$

Para metais muito resist.  $c \approx - 0.5$



EESC-USP

## Exemplos



**A partir dos dados monotônicos e cíclicos de tensão-Def.  
Determine as constantes cíclicas de tensão-def  
& def. – vida)**

**Dados monotônicos:**

**$S_y = 158$  ksi**

**$E = 28.4 \times 10^3$  ksi**

**$S_u = 168$  ksi**

**$\sigma_f = 228$  ksi**

**$\%RA = 52$**

**$\epsilon_f = 0.734$**



EESC-USP



| Ampl. de Def. Total, $\Delta\epsilon/2$ | Ampl. De tensão, $\Delta\sigma/2$ (ksi) | Ampl. Def. Plástica, $\Delta\epsilon_p/2^*$ | Reversos para Falhar, $2N_f$ |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------|
| 0.0393                                  | 162.5                                   | 0.0336                                      | 50                           |
| 0.0393                                  | 162                                     | 0.0336                                      | 68                           |
| 0.02925                                 | 155                                     | 0.0238                                      | 122                          |
| 0.01975                                 | 143.5                                   | 0.0147                                      | 256                          |
| 0.0196                                  | 143.5                                   | 0.0145                                      | 350                          |
| 0.01375                                 | 136.5                                   | 0.00894                                     | 488                          |
| 0.00980                                 | 130.5                                   | 0.00521                                     | 1,364                        |
| 0.00980                                 | 126.5                                   | 0.00534                                     | 1,386                        |
| 0.00655                                 | 121                                     | 0.00229                                     | 3,540                        |
| 0.00630                                 | 119                                     | 0.00211                                     | 3,590                        |
| 0.00460                                 | 114                                     | 0.00059                                     | 9,100                        |
| 0.00360                                 | 106                                     | 0.00000                                     | 35,200                       |
| 0.00295                                 | 84.5                                    | 0.00000                                     | 140,000                      |

$$* \quad \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \frac{\Delta\epsilon}{2} - \frac{\Delta\epsilon_e}{2} = \frac{\Delta\epsilon}{2} - \frac{\Delta\sigma}{2E}$$



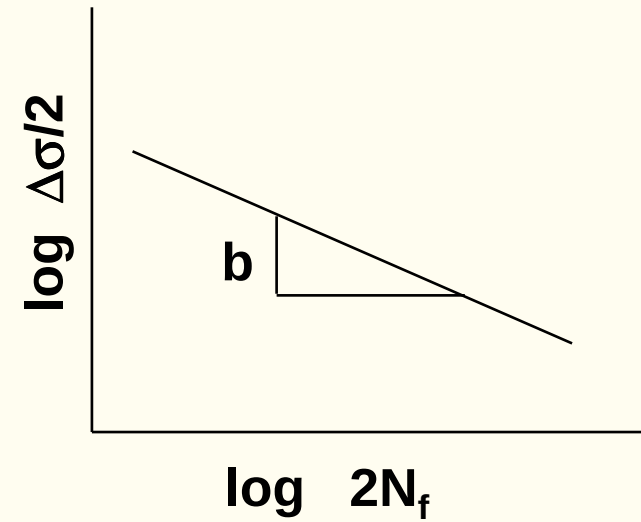
EESC-USP

## Exemplo (Cont.)



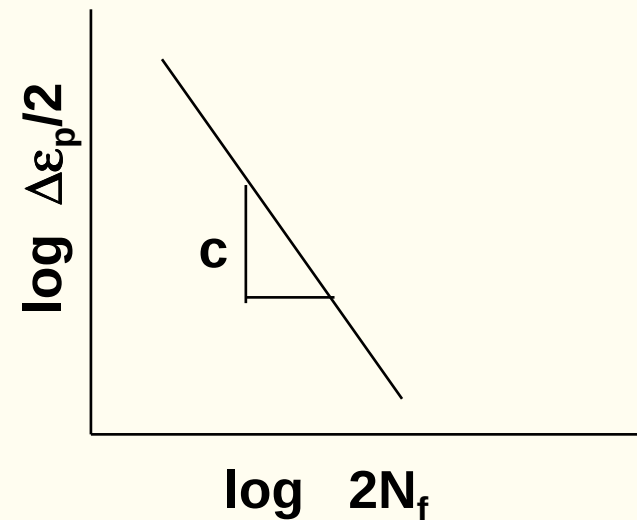
$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_f' (2N_f)^b$$

$$\sigma_f' = 222 \text{ ksi} \quad b = -0.076$$



$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f' (2N_f)^c$$

$$\varepsilon_f' = 0.811 \quad c = -0.732$$





EESC-USP

## Exemplo (Cont.)



### Para determinar $H'$ e $n'$ (Dois métodos)

(A) ajuste uma curva de potência entre,  $\frac{\Delta\sigma}{2}$  e

a ampl. def. plástica,  $\frac{\Delta\epsilon_p}{2}$

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = H' \left( \frac{\Delta\epsilon_p}{2} \right)^{n'} \longrightarrow H' = 216 \text{ ksi} \quad n' = 0,094$$

(B) Relembre  $H' = \frac{\sigma_f'}{(\epsilon_f')^{n'}}$

$$n' = b/c = \frac{-0,076}{-0,732} = 0,104$$

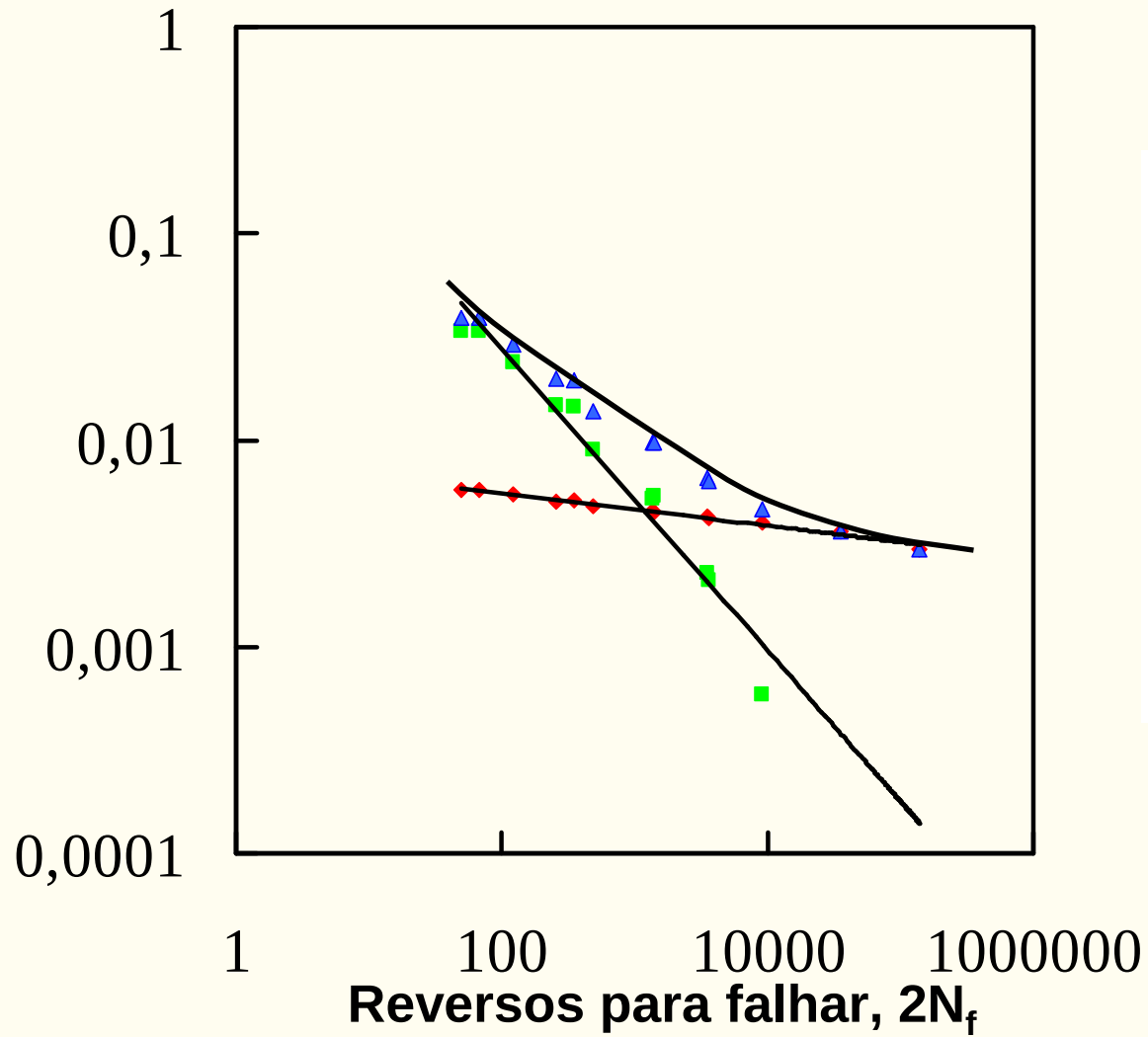
$$H' = \frac{222}{(0,811)^{0,104}} = 227 \text{ ksi}$$



EESC-USP

## Exemplo (Cont.)

Ampl. de Def.,  $\Delta\epsilon/2$

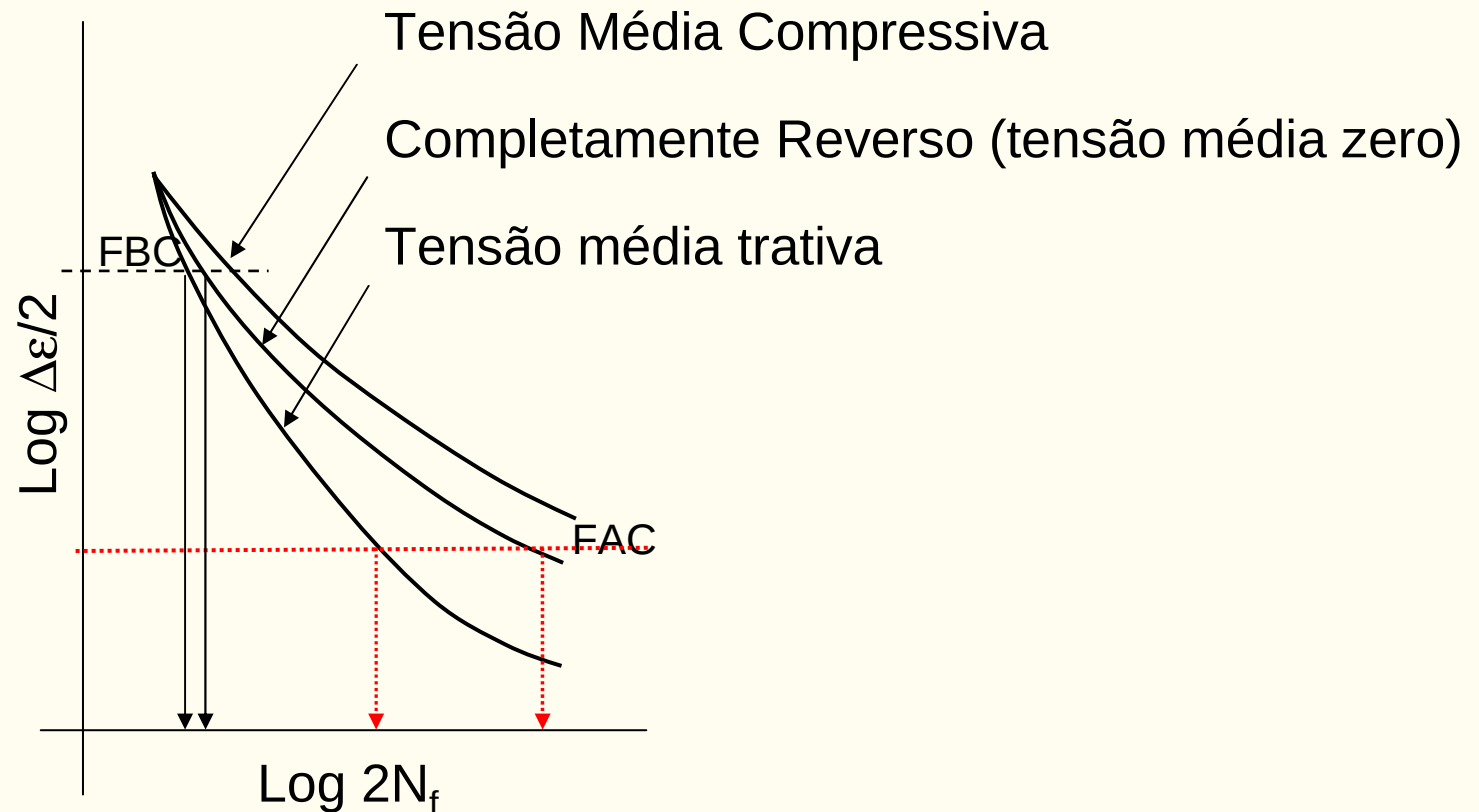


- ◆ Def. Elástica
- Def. Plástica
- ▲ Def. Total
- Potência (Def. Plástica)
- Potência (Def. Elástica)



EESC-USP

## Efeito da Tensão Média na Metodologia Deformação - Vida

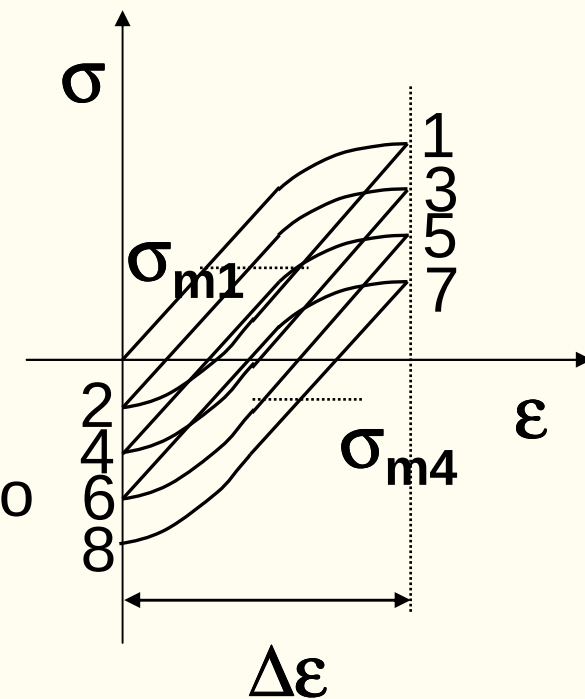
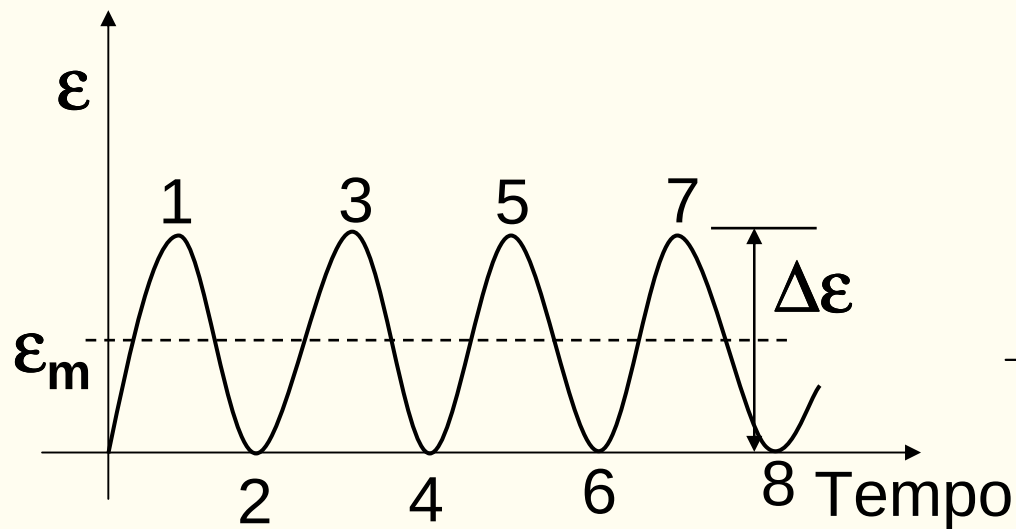


- ◆ Os efeitos da tensão média são significante para vida em alto ciclo, HCF.
- ◆ Para altas amplitudes de deformação, FBC, a relaxação de tensão ocorre e eventualmente a tensão média tende a zero.



EESC-USP

- ◆ Relaxação da tensão média não é devido ao amolecimento por deformação;
- ◆ O relaxamento da tensão média pode ocorrer em materiais ciclicamente estáveis e devido a existência de deformação plástica localizada.





EESC-USP

## Modelo de Morrow Para Efeito da Tensão Média



$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} = 1 \Rightarrow \sigma_{ar} = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}}$$

$$\sigma_{ar} = (\sigma'_f)(2 N_f)^b$$

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m)(2 N_f)^b$$

- ◆ Similarmente, a curva  $\varepsilon \times N_f$  pode ser generalizada utilizando a equação de Morrow. Primeiramente rearranjamos esta equação.

$$\sigma_a = \sigma'_f \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{1/b} (2 N_f) \right]^b \dots \text{fazendo } N^* = N_f \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{1/b}$$



$$\sigma_a = \sigma'_f (2 N^*)^b$$



Esta mesma modificação pode ser aplicada para a curva  $\epsilon \times N$ .

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \epsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N^*)^b + \epsilon'_f (2N^*)^c$$

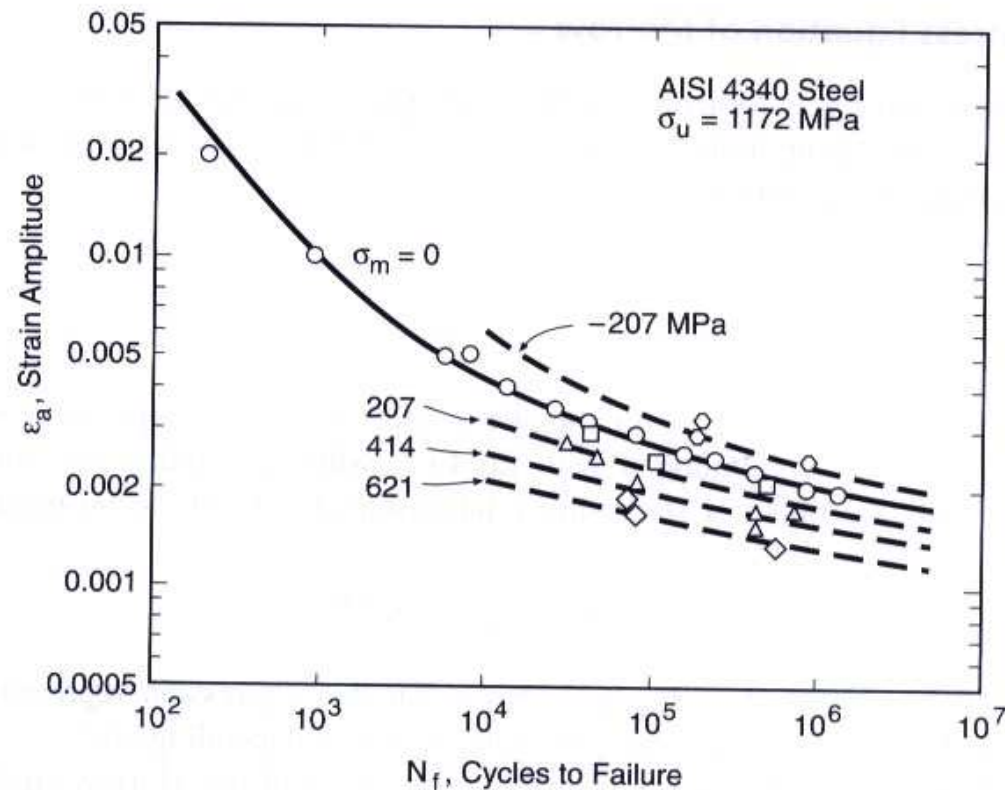
Onde a vida  $N_f$ , para uma dada combinação de  $\epsilon_a$  e  $\sigma_m$  é obtida a partir de  $N^*$ :

$$N_f = N^* \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{-1/b}$$

Substituindo  $N^*$ , obtem-se uma única equação para a família de curvas  $\epsilon \times N$ .

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \epsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right) (2N_f)^b + \epsilon'_f \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{c/b} (2N_f)^c$$

A figura a seguir apresenta dados de  $\epsilon_a \times N_f$  para diferentes valores de  $\sigma_m$ . As curvas tracejadas foram obtidas utilizando a equação anterior.



Mean stress effect on the strain-life curve of an alloy steel, with dashed curves from the mean stress equation of Morrow. Most test specimens were overstrained prior to testing, and most with  $N_f > 10^5$  cycles were also periodically overstrained. (Data from [Dowling 73].)

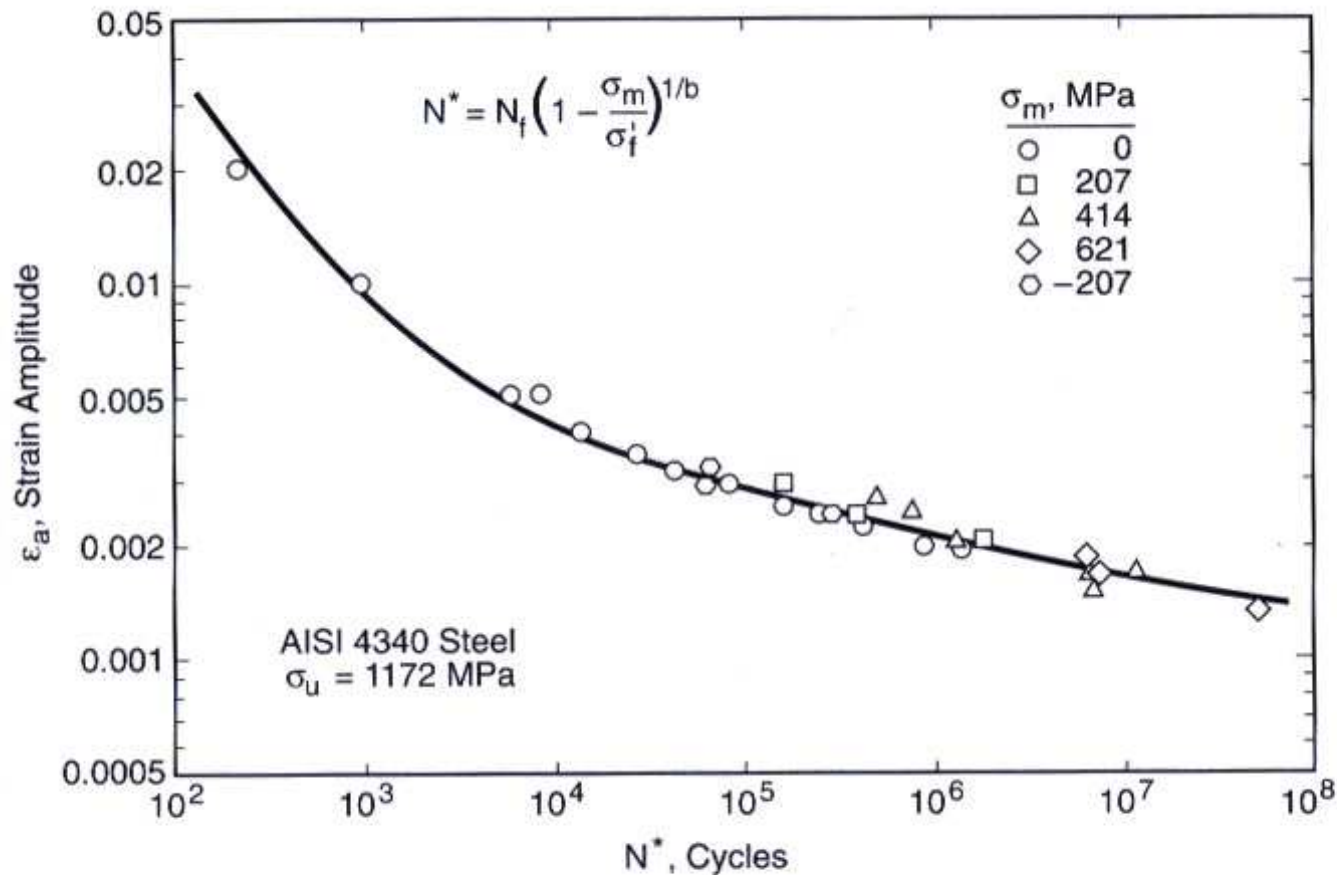


EESC-USP

- Podemos notar que a equação  $\epsilon \times N^*$  é a mesma que a anteriormente apresentada para  $\sigma_m = 0$ .
- Assim,  $N^*$  seria a vida calculada como se não existisse tensão média e a equação abaixo fornece a vida  $N_f$  que foi ajustada para incluir o efeito da tensão média.



$$N_f = N^* \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{-1/b}$$



Mean stress data of Fig. 14.10 plotted versus  $N^*$  according to the Morrow

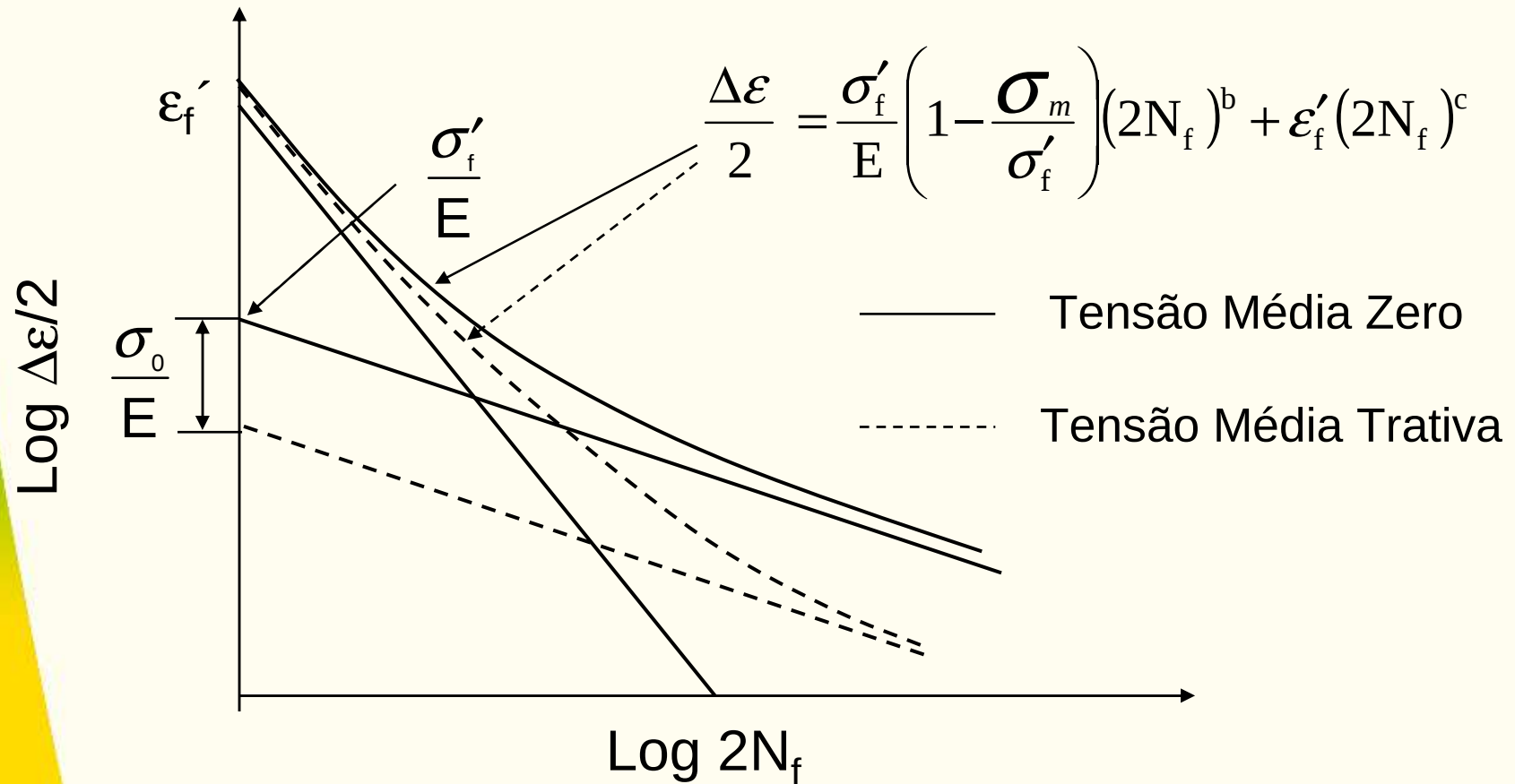


EESC-USP

## Modelo de Morrow Modificado

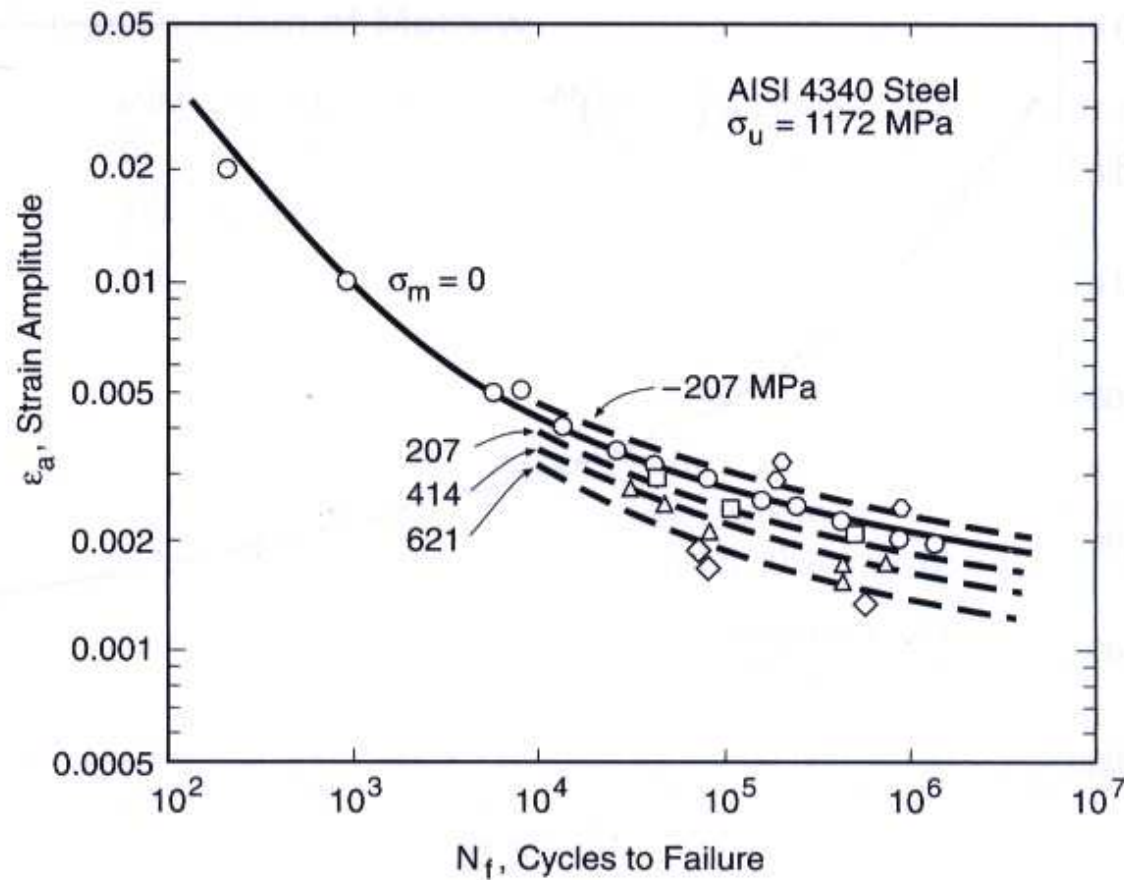


- A seguinte modificação é normalmente usada. Neste caso, observa-se que o efeito da  $\sigma_m$  no termo plástico foi removido.





EESC-USP



Family of strain-life curves given by the modified Morrow approach, and comparison with the data of Fig. 14.10.



EESC-USP

## Modelo de Smith, Watson & Topper Para o Efeito da Tensão Média



- Este modelo assume que a vida para qualquer situação de tensão média depende do produto:

$$\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a = h''(N_f)$$

$$\text{Onde } \sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m = \frac{\Delta\sigma}{2} + \sigma_m$$

- E  $h''(N_f)$  indica uma função da vida em fadiga  $N_f$ .
- Assim, a vida é esperada ser a mesma para carregamentos completamente reversos ( $\sigma_m=0$ ) que tenham o mesmo produto  $\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a$ .
- Novamente, façamos  $\sigma_{ar}$  e  $\epsilon_{ar}$  os valores de amplitudes de tensão e de deformação para  $\sigma_m = 0$  e que resultem em valores de  $N_f$  similar ao de  $\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a$ .
- Note que para  $\sigma_m=0$ , tem-se que  $\sigma_{\max} = \sigma_{ar}$ , e a função  $h''(N_f)$  torna-se  $\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a = \sigma_{ar} \cdot \epsilon_{ar}$ .



EESC-USP



$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \varepsilon_{ar} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c$$

$$\sigma_{ar} = \sigma_f' (2N_f)^b$$

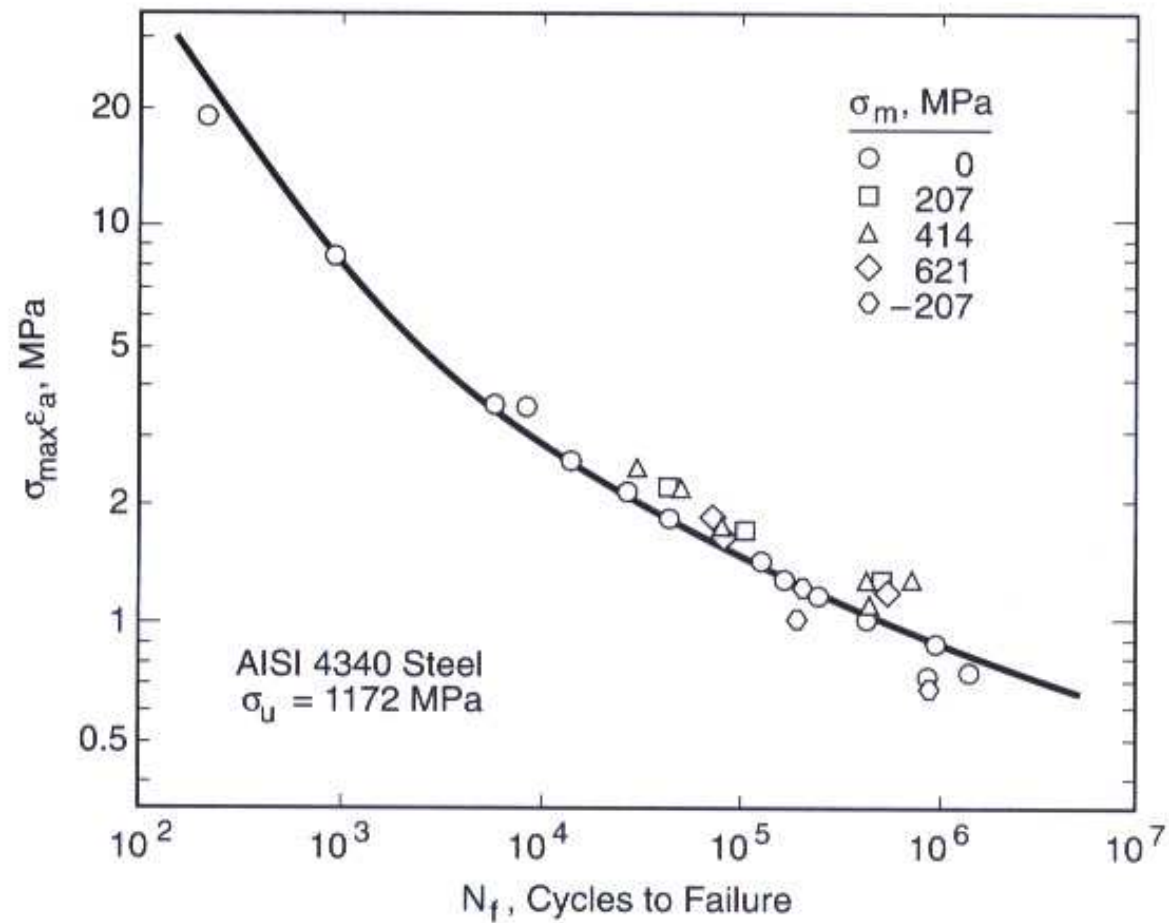
$$\sigma_{\max} \varepsilon_a = \sigma_f' \cdot (2N_f)^b \cdot \left[ \frac{\sigma_f'}{E} + \sigma_f' \cdot \varepsilon_f' \cdot (2N_f)^c \right]$$

Um procedimento gráfico conveniente é fazer  $\sigma_{\max} \cdot \varepsilon_a \times N_f$  a partir do rearranjo da equação anterior.

$$\sigma_{\max} \varepsilon_a = \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma_f' \varepsilon_f' (2N_f)^{b+c}$$



EESC-USP



Plot of the Smith, Watson, and Topper parameter versus life for the data



EESC-USP

- Considerando a equação de Walker para o efeito da tensão média no caso de S-N, o valor de  $N^*$  para o uso com a equação:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N^*)^b + \varepsilon'_f (2N^*)^c$$

$$N^* = N_f \left( \frac{1-R}{2} \right)^{(1-\gamma)/b}$$

$$N^* = N_f \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{\max}} \right)^{(1-\gamma)/b}$$



EESC-USP

## Exemplo



- Um dispositivo é produzido de aço RQC-100 e submetido a carregamentos cíclicos com amplitude de deformação de  $\varepsilon_a = 0,004$  e uma tensão média de 100 MPa. Quantos ciclos podem ser aplicados antes que a falha por fadiga aconteça?
- Utilize as metodologias de Morrow, Morrow modificada e SWT e comente os resultados.



EESC-USP

## EXEMPLO



Um metal tem as seguintes propriedades monotônicas e cíclicas trativas :

$$E=193 \text{ GPa}$$

$$S_u=650 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_f=1,731$$

$$K'=1660 \text{ MPa} \quad n'=0.287$$

$$S_y(0,2\%)=325 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f=1400 \text{ MPa}$$

$$\%RA=80\%$$

$$n=0,193$$

- A) Calcule a deformação atingida durante a metade do primeiro ciclo para uma amplitude de tensão de 200 MPa.
- B) Determine a deformação total e a amplitude plástica de deformação para uma amplitude de tensão de 200 MPa.
- C) Repita os cálculos acima, mas agora determina a Resposta de tensão para uma amplitude de  $(\Delta\varepsilon/2)$  0,01

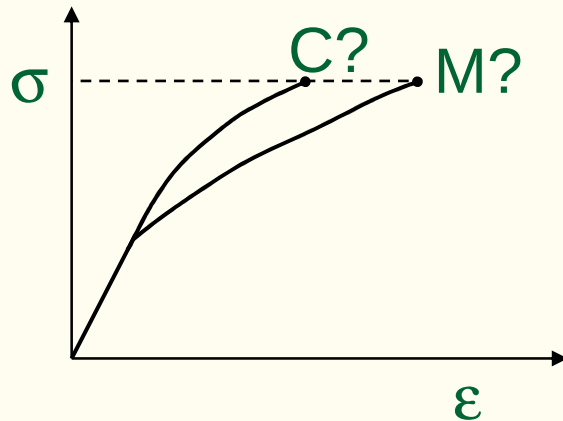


EESC-USP

## Solução



### Parte A)



Devemos usar as propriedades Monotônicas (M) ou as propriedades cíclicas (C) para a metade do primeiro ciclo?

Se sabemos com certeza de que o material  
Não sofreu carregamento prévio → Uso Monotônica

Se não temos certeza → Uso das cíclicas.



EESC-USP



### Usando a Tensão-Def Monotônica

$$\epsilon_M = \sigma/E + \left(\sigma/H\right)^{1/n}$$

$$H \approx \frac{\sigma_f}{\epsilon_f^n} = \frac{1400}{(1,731)^{0,193}} = 1295 MPa$$

$$\epsilon_M = \frac{200}{193000} + \left(\frac{200}{1259}\right)^{1/0,193} = 0,001109$$

### Usando a Tensão-Def cíclica

$$\epsilon_C = \sigma/E + \left(\sigma/H'\right)^{1/n'}$$

$$\epsilon_C = \frac{200}{193000} + \left(\frac{200}{1660}\right)^{1/0,287} = 0,001664$$



EESC-USP

Parte B) b) Dado  $\Delta\sigma/2 = 200 \text{ MPa}$   
 $\Delta\epsilon/2 = ?$



Usando a equ. da histerese.

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta\sigma}{2H'} \right)^{1/n'}$$

$$\Delta\epsilon = 0,00207 + 0,00125$$

$$\text{elástica, } \frac{\Delta\epsilon_e}{2} = 0,001035$$

$$\text{plástica, } \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = 0,000625$$

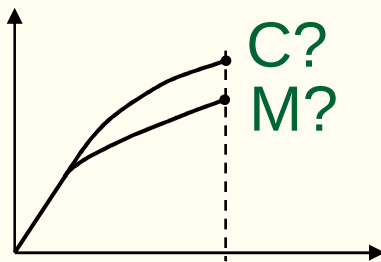
$$\text{total, } \frac{\Delta\epsilon}{2} = 0,001663$$



EESC-USP



Part C) Dado a Def.  $\Rightarrow$  calcular a tensão resposta



Metade do ciclo inicial

Usando as prop. monotônica

$$\varepsilon = \sigma/E + \left(\sigma/H\right)^{1/n}$$

$$0,01 = \sigma_1/193000 + \left(\sigma_1/1259\right)^{1/0,193} \Rightarrow \sigma_1^M = 489,4MPa$$

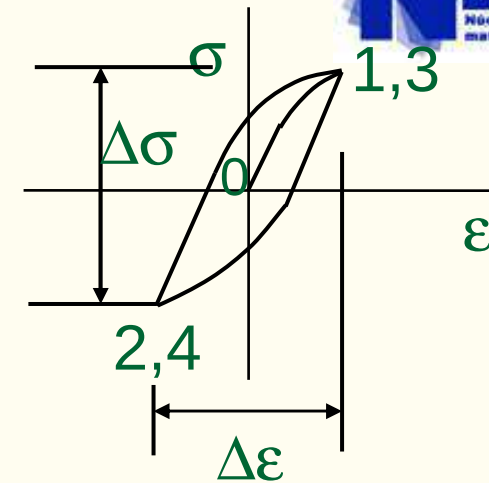
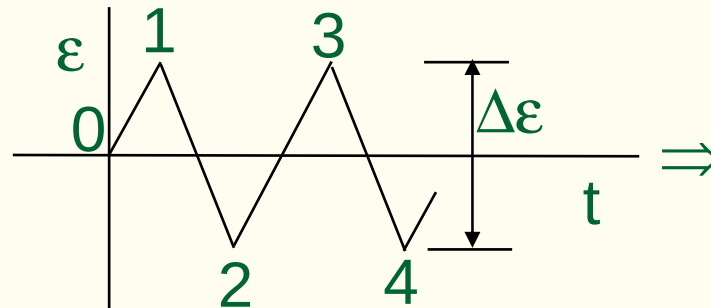
Usando as propr. cíclicas  $\varepsilon = \sigma/E + \left(\sigma/H'\right)^{1/n'}$

$$0,01 = \sigma_1/193000 + \left(\sigma_1/1660\right)^{1/0,287} \Rightarrow \sigma_1^C = 413,3MPa$$



EESC-USP

## Tensão – Def. estável



**NEMAF**  
Núcleo de ensaios de  
materiais e análise de falhas

## Usando Histerese

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta \sigma}{2H'} \right)^{\frac{1}{n'}} = 0,01 \Rightarrow \text{resolve para } \Delta \sigma \Rightarrow \Delta \sigma = 826,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1^M = 489,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1^C = 413,3 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 - \Delta \sigma \\ \sigma_3 &= \sigma_2 + \Delta \sigma \\ \sigma_4 &= \sigma_3 - \Delta \sigma \end{aligned} \right\}$$

Pode-se ter diferente repostas dependendo  
Se usa-se  $\sigma_1^M$  ou  $\sigma_1^C$  para a metade do ciclo  
inicial.



EESC-USP

## Problema - Solução



### Tensão-Def. estável

| Ref No.         | Def., $\epsilon$ | Tensão<br>usando M | Tensão<br>usando C |
|-----------------|------------------|--------------------|--------------------|
| 0               | 0                | 0                  | 0                  |
| 1               | +0,01            | 489,4              | 413,3              |
| 2               | -0,01            | -337,2             | -413,3             |
| 3               | +0,01            | 489,4              | 413,3              |
| 4               | -0,01            | -337,2             | -413,3             |
| Tensão<br>Média |                  | 76.1               | 0                  |

M - Monotônica; C - Cíclica

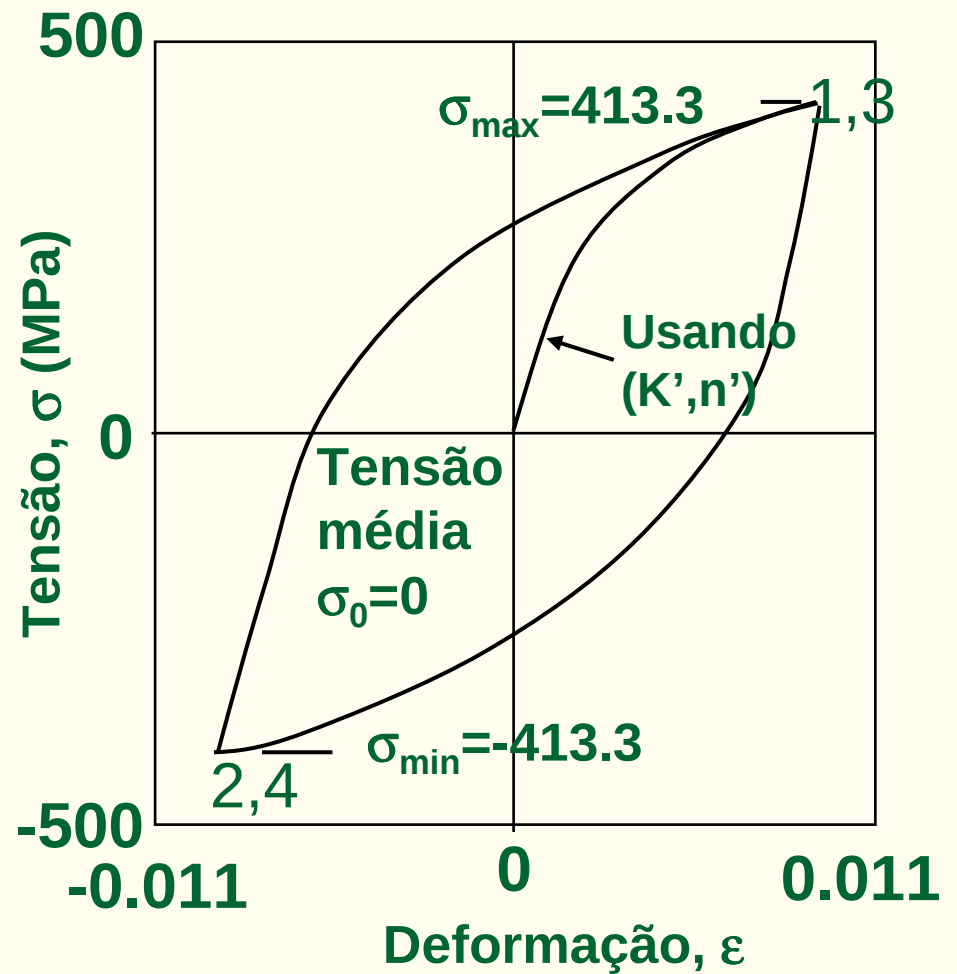
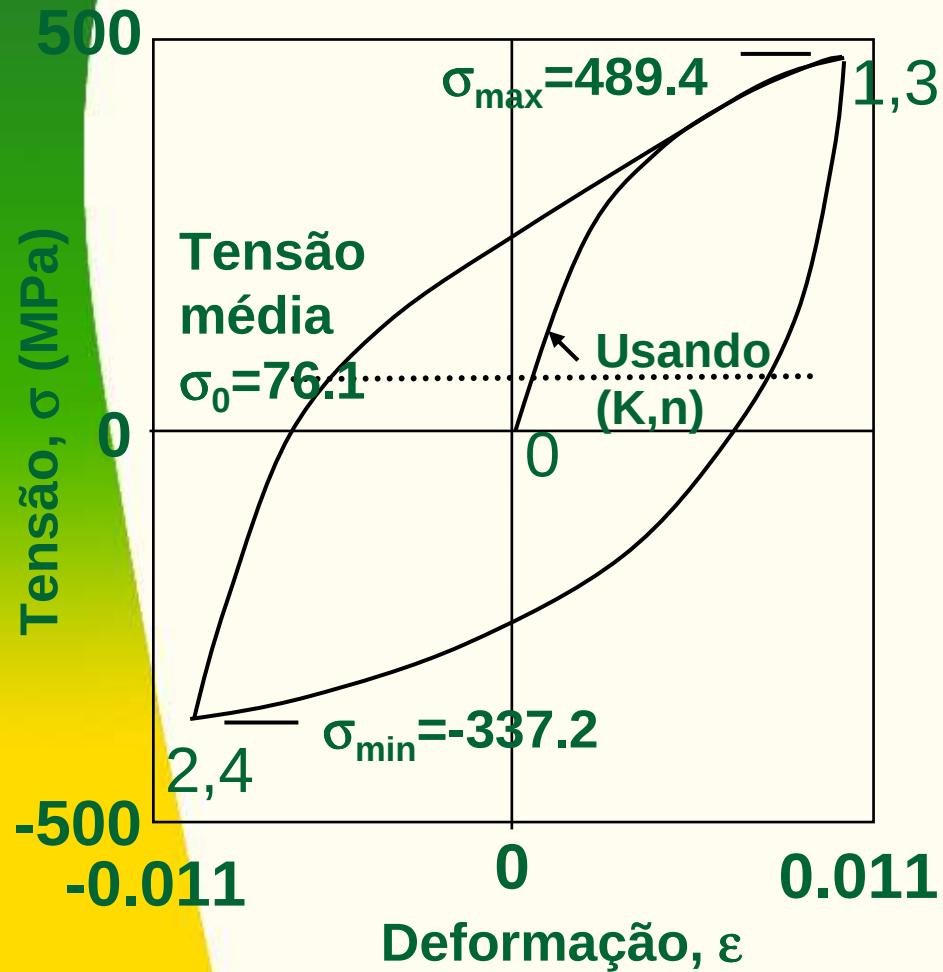


EESC-USP

## Problema - 2.13 Solução



Tensão-Def. estável





EESC-USP

## Problema 2.17



As seguintes propriedades de tensão-def. e def.-vida são dadas para um aço:

$$E = 30 \times 10^3 \text{ ksi} \quad K' = 137 \text{ ksi} \quad n' = 0.22$$

$$\sigma_f' = 120 \text{ ksi} \quad b = -0.11 \quad \epsilon_f' = 0.95 \quad c = -0.64$$

- (a) Desenhe em coordenadas log-log as curvas def. elástica-vida, def. plástica-vida e def. total-vida. Determine a vida de transição ( $2N_f$ ).
- (b) Desenhe o laço de histerese correspondendo a valores de amplitude de def. ( $\Delta\epsilon/2$ ) de 0,05, 0,00125, e 0,0007. Determine a vida em fadiga em reversos nestes três níveis de tensão.
- (c) Determine a amplitude elástica, plástica e total para a vida ( $2N_f$ ) de  $2 \times 10^6$  reversos.
- (d) Determine a amplitude de deformação elástica, plástica e total para a vida ( $2N_f$ ) de 500 reversos.
- (e) Determine a amplitude de tensão correspondendo as vidas em fadiga de 500 e  $2 \times 10^6$  reversos.
- (f) Um componente feito deste material é necessário para uma vida de não menos que  $10^4$  reversos. O carregamento no componente causa uma amplitude de deformação de 0,008. Determine se o componente atenderá as exigências.



EESC-USP

## Problema 2.17 -Solução



- Desenhe em um gráfico log-log as curvas def.-vida elástica, Plástica e total. Determine a vida de transição ( $2N_t$ ).

Relembre que

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (2.41)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b = \frac{120}{30000} (2N_f)^{-0.11}$$

Reta com intersepto  $\frac{\sigma'_f}{E}$  em  $2N_f = 1$

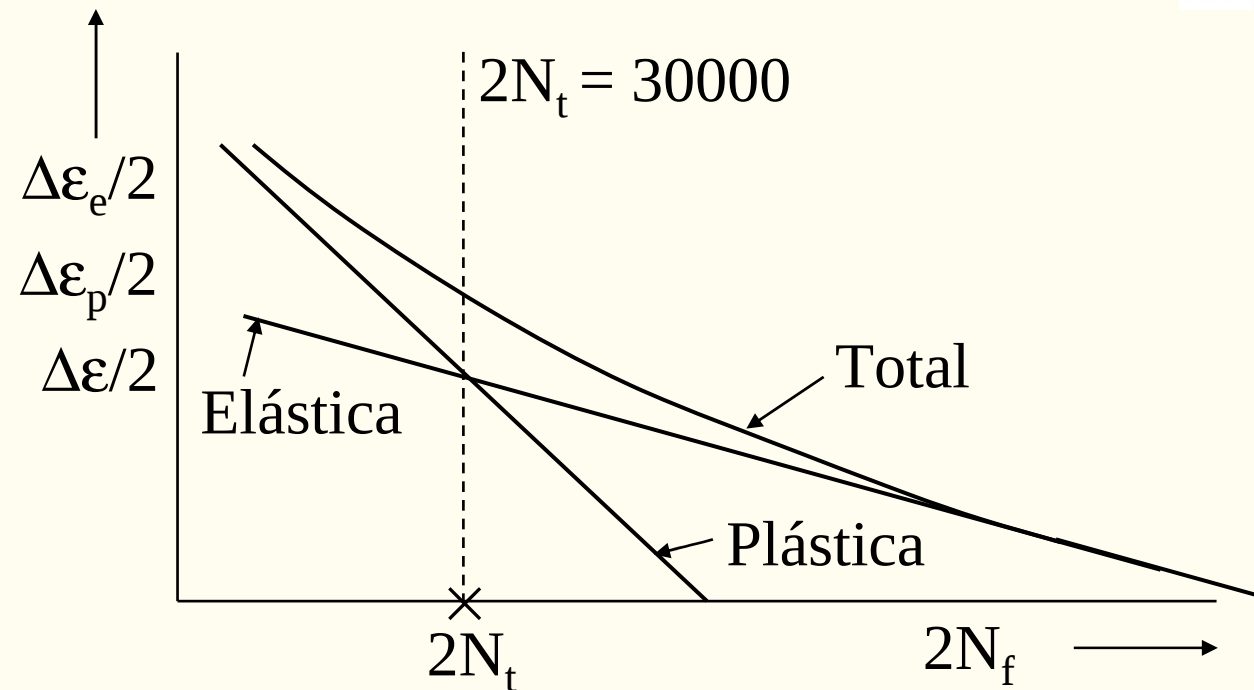
$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c = 0.95 (2N_f)^{-0.64}$$

Reta com intersepto  $\varepsilon'_f$  em  $2N_f = 1$



EESC-USP

## Problema 2.17 - Solução



em  $2N_f = 2N_t : \frac{\Delta\epsilon_e}{2} = \frac{\Delta\epsilon_p}{2}$

$$\Rightarrow 2N_t = \left( \frac{\epsilon_f' E}{\sigma_f'} \right)^{1/b-c} = \left( \frac{0.95(30000)}{120} \right)^{1/-0.11+0.64} = 30,366$$



EESC-USP



## Problema 2.17 – Solução

b1) Para obter a tensão inicial, use as propriedades cíclicas do material em

$$\varepsilon = \sigma/E + \left(\sigma/K'\right)^{1/n'}$$

$$0.0007 = \sigma/30000 + \left(\sigma/137\right)^{1/0.22} \Rightarrow \sigma = 18 \text{ ksi}$$

$$0.00125 = \sigma/30000 + \left(\sigma/137\right)^{1/0.22} \Rightarrow \sigma = 24.8 \text{ ksi}$$

$$0.05 = \sigma/30000 + \left(\sigma/137\right)^{1/0.22} \Rightarrow \sigma = 70.1 \text{ ksi}$$



EESC-USP

## b2) Histerese



$$\Delta\epsilon/2 = \Delta\sigma/2E + \left(\Delta\sigma/2K'\right)^{1/n'}$$

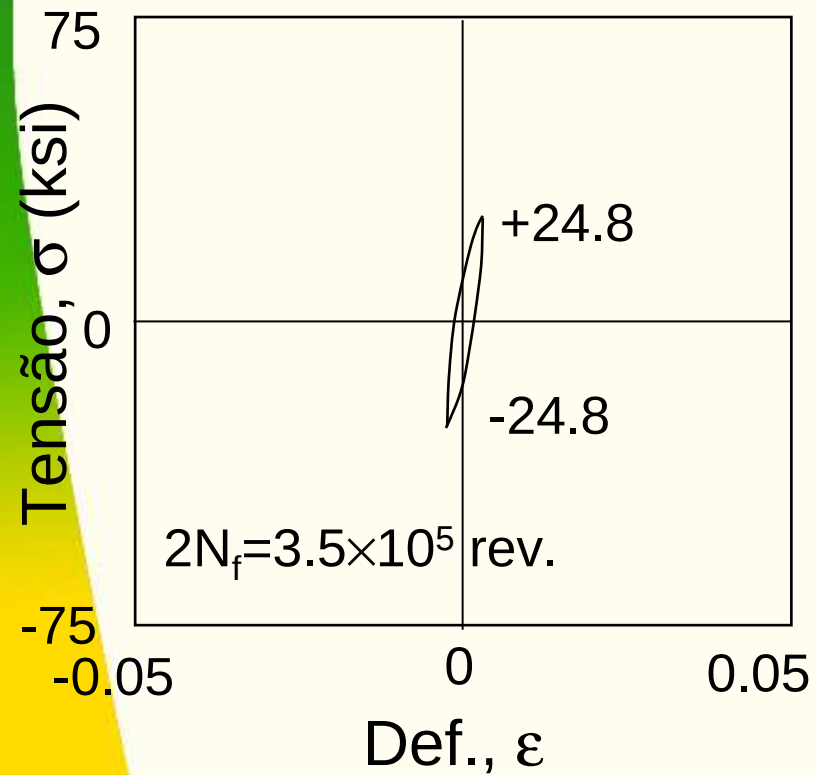
$$\Delta\epsilon/2 = \Delta\sigma/60000 + \left(\Delta\sigma/274\right)^{1/0.22}$$

| $\Delta\epsilon/2$ | $\Delta\sigma/2$ (ksi) |
|--------------------|------------------------|
| 0.0007             | 36                     |
| 0.00125            | 49.6                   |
| 0.05               | 140.2                  |

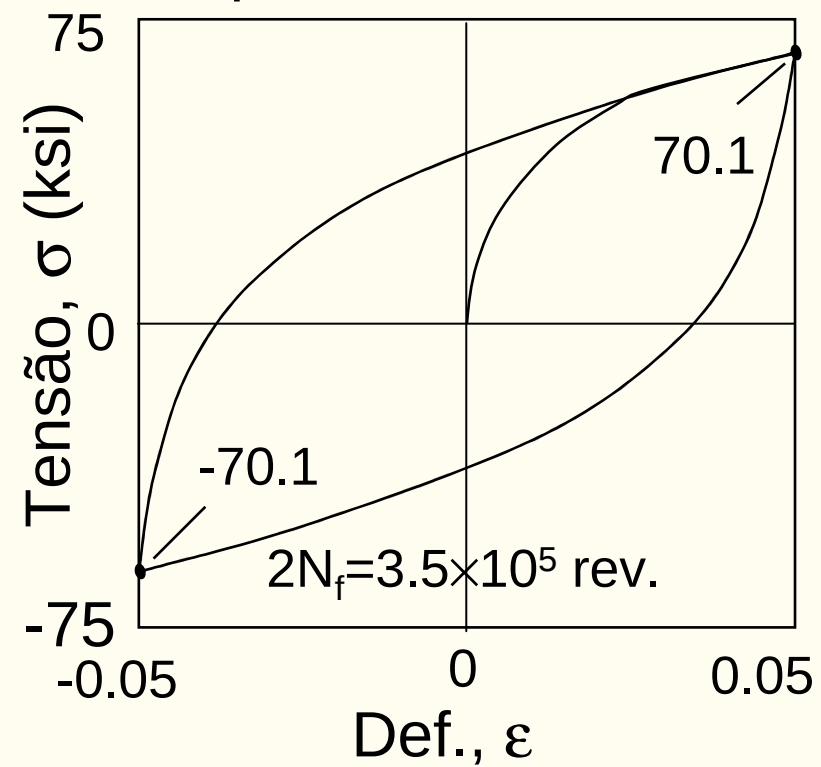


EESC-USP

Laço de Histerese  
para  $\Delta\epsilon/2=0,00125$



Laço de Histerese  
para  $\Delta\epsilon/2=0,05$





EESC-USP



b3) Vida

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \epsilon'_f (2N_f)^c$$

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{120}{30000} (2N_f)^{-0.11} + 0.95 (2N_f)^{-0.64}$$

| $\Delta \epsilon / 2$ | $2N_f$ (reversos)  |
|-----------------------|--------------------|
| 0.0007                | $1.12 \times 10^7$ |
| 0.00125               | 351400             |
| 0.05                  | 107                |



EESC-USP



$$\text{c \& d) em } \left. \begin{array}{l} 2N_f = 2 \times 10^6 \\ 2N_f = 500 \end{array} \right\} \frac{\Delta \varepsilon}{2} = ? \quad \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = ? \quad \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = ?$$

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b \quad \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c$$

| $2N_f$          | $\Delta \varepsilon / 2$ | $\Delta \varepsilon_e / 2$ | $\Delta \varepsilon_p / 2$ |
|-----------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $2 \times 10^6$ | 0.000899                 | 0.000811                   | 0.000088                   |
| 500             | 0.019818                 | 0.002019                   | 0.017798                   |



EESC-USP

e) *em* 
$$\left. \begin{array}{l} 2N_f = 2 \times 10^6 \\ 2N_f = 500 \end{array} \right\} \frac{\Delta\sigma}{2} = ?$$



Usando (c&d) e 
$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} E$$

| $2N_f$          | $\Delta\varepsilon_e / 2$ | $\Delta\sigma/2$ (ksi) |
|-----------------|---------------------------|------------------------|
| $2 \times 10^6$ | 0.000811                  | 24.33                  |
| 500             | 0.002019                  | 60.57                  |

f) Vida necessária @  $\Delta\varepsilon/2=0,008$  é  $2N_f=10000$ . Foi isto obtido?

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c = 0.008 \text{ solve for } 2N_f = 2500$$

Não, a vida necessária não foi obtida.



EESC-USP

## Exercício



■ Alguns dados de deformação – vida para tensão média diferente de zero são apresentados abaixo para uma liga de Al 2024-T4.

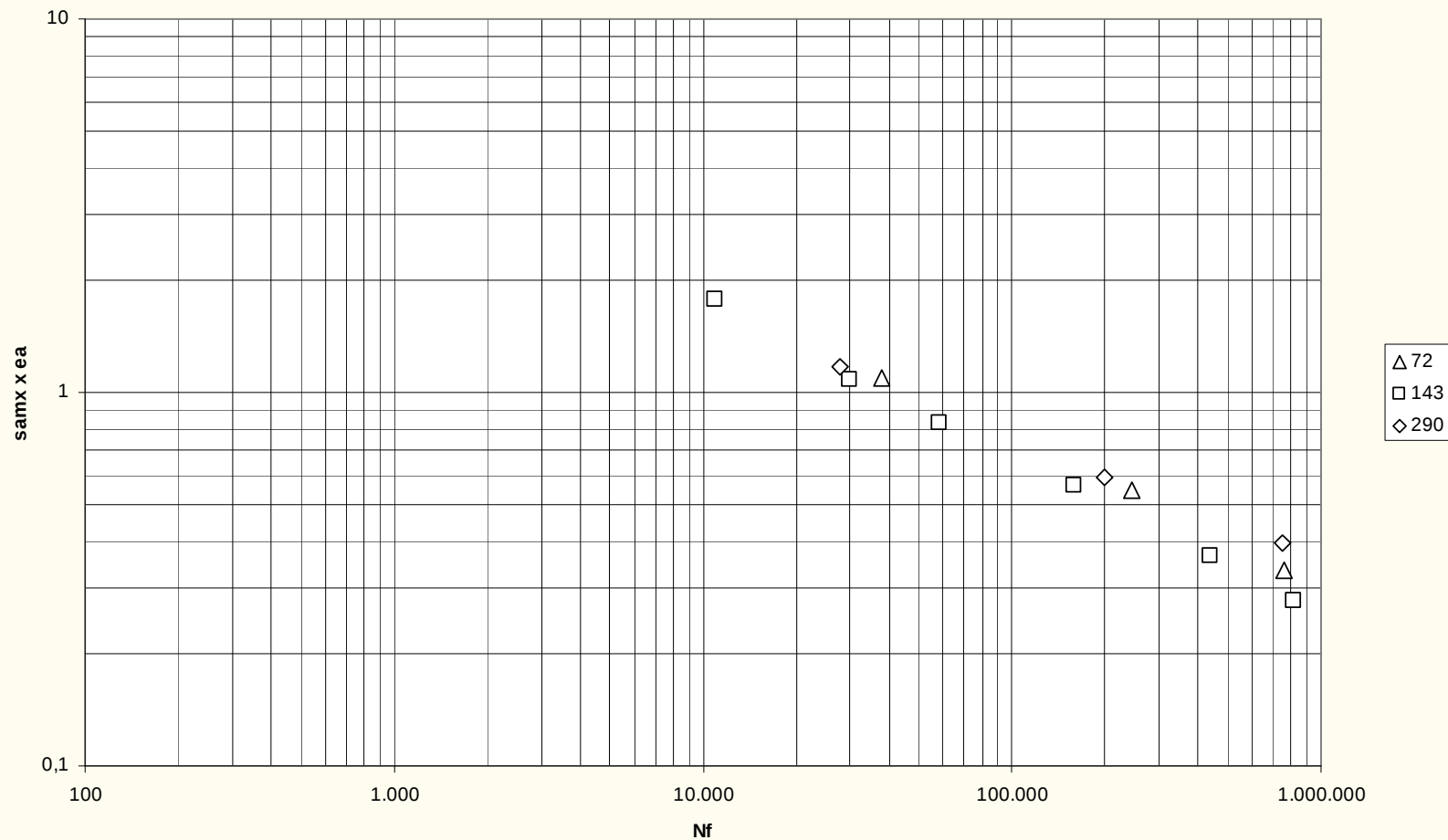
- Coloque em gráfico os pontos do parâmetro de SWT,  $\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a$  versus  $N_f$  em um gráfico de coordenadas log-log. Coloque também a curva esperada para as constantes tabeladas e comente o sucesso do parâmetro de SWT para este material.
- Usando a equação modificada de Morrow, coloque a família de curvas deformação – vida que corresponde a uma tensão média de 0; 72; 142 e 290 MPa e então coloque os pontos da tabela abaixo e comento a concordância dos resultados com estas curvas.

| $\epsilon_a$ | $\sigma_a$ , MPa | $\sigma_m$ , MPa | $N_f$ , ciclos |
|--------------|------------------|------------------|----------------|
| 0,00345      | 245              | 71,7             | 37.800         |
| 0,00232      | 165              | 71.7             | 244.600        |
| 0,00172      | 122              | 71,7             | 760.000        |
| 0,00410      | 291              | 142              | 11.000         |
| 0,00303      | 215              | 141              | 30.000         |
| 0,00254      | 181              | 144              | 58.500         |
| 0,00198      | 143              | 143              | 158.000        |
| 0,00148      | 105              | 142              | 437.100        |
| 0,00121      | 85,5             | 144              | 820.000        |
| 0,00250      | 178              | 292              | 27.700         |
| 0,00149      | 106              | 292              | 200.000        |
| 0,00109      | 76,5             | 287              | 747.000        |



EESC-USP

$$\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a \times N_f$$

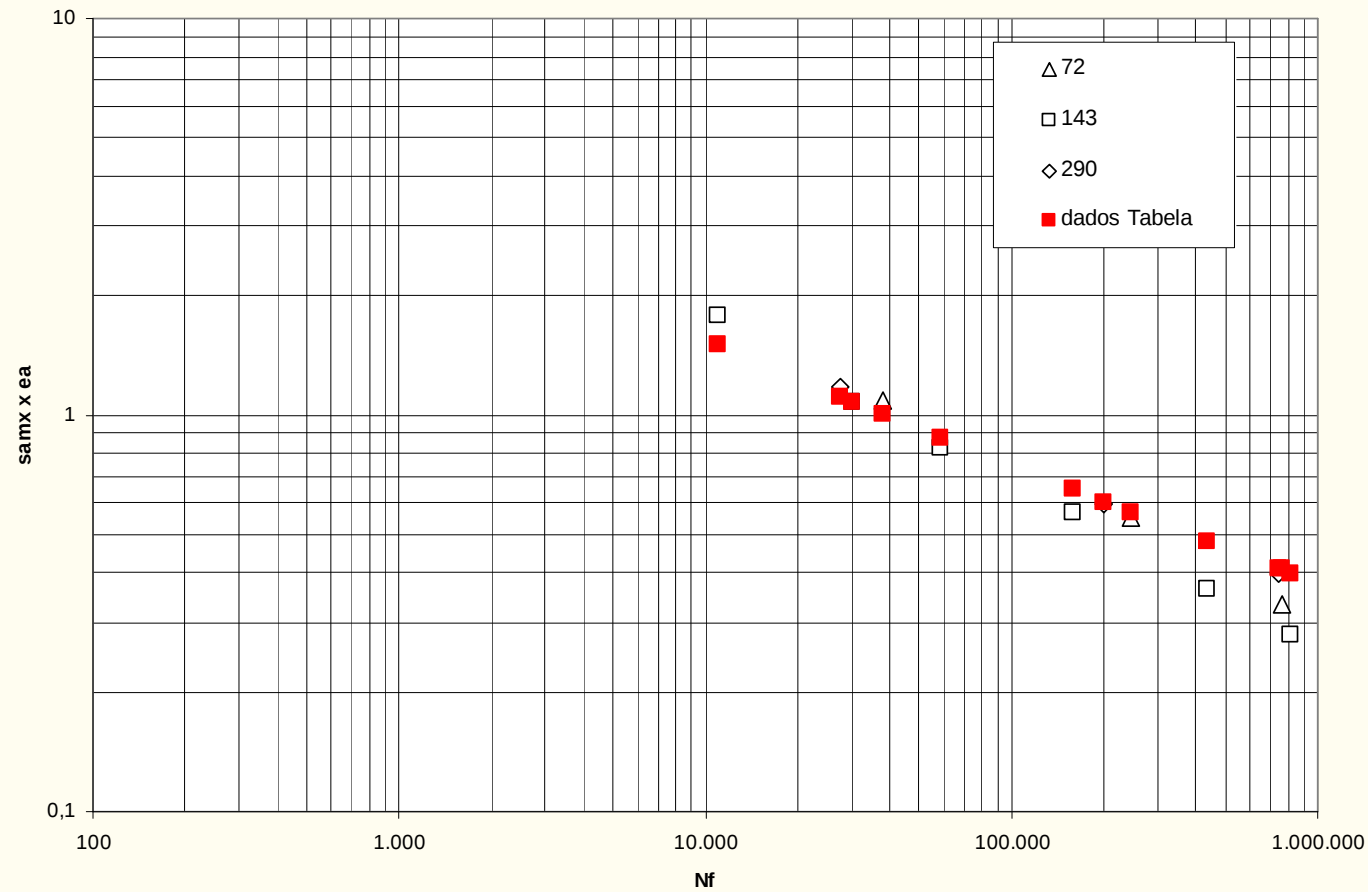


$$\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a = (\sigma_a + \sigma_m) \epsilon_a$$



EESC-USP

Da Tabela:  $E = 73.000$ ,  $\sigma'_f = 1294$  MPa,  $b = -0,142$ ,  $\epsilon'_f = 0,327$ ,  $c = -0,645$





EESC-USP

b)

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right) (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c$$





EESC-USP

