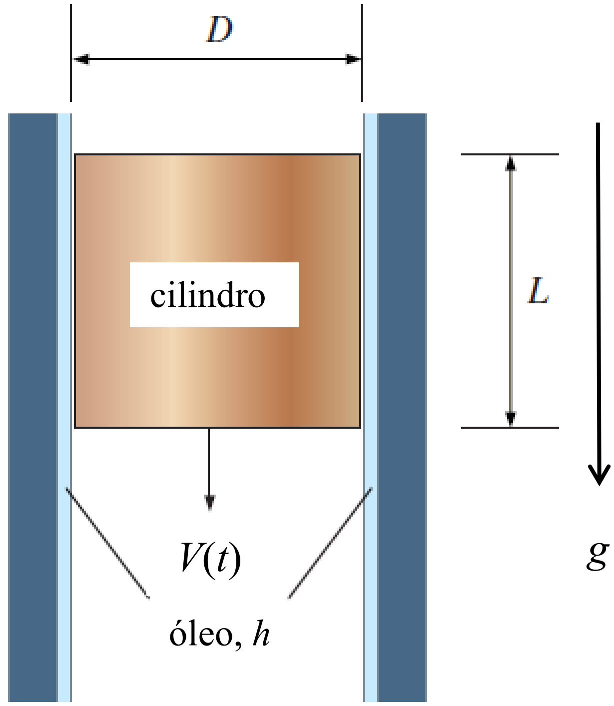
MECÂNICA DOS FLUIDOS: NOÇÕES, LABORATÓRIO E APLICAÇÕES
(PME 3332)
Gabarito Primeira Prova - 2018

1. (4 pontos) Um cilindro de diâmetro D, altura L e massa m escorrega em presença de um campo gravitacional g a partir do repouso em um tubo vertical cuja superfície interna está coberta por uma camada de óleo de viscosidade μ e espessura h, como mostra a figura. Nestas condições, deduzir uma expressão para a velocidade de descida do cilindro V como função do tempo t. Discuta o que acontece quando $t \to \infty$ e a possibilidade de utilizar o dispositivo como um viscosímetro.

Lei de viscosidade de Newton: $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$.

Ajuda para o cálculo: $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + cte$



(adaptado de Çengel, Y. A., Cimbala, J. M., *Mecânica dos Fluidos, fundamentos e aplicações*, Mc Graw-Hill)

Solução:

Um balanço de forças na direção da descida fornece: $m\,g - \tau\,\pi\,D\,L = m\dfrac{dV}{dt}$

Da lei de viscosidade, temos: $\tau = \mu \dfrac{V}{h}$

Substituindo, obtemos a equação de movimento: $\dfrac{dV}{dt} = g - \dfrac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,h}V$

Integrando, resulta: $\dfrac{dV}{g - \dfrac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,h}V} = dt \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{m\,h}{\pi\,\mu\,D\,L}\ln\left(g - \dfrac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,h}V\right) = t + C$

Da condição inicial $V(0) = 0$ resulta $C = -\dfrac{m\,h}{\pi\,\mu\,D\,L}\ln(g)$

Substituindo obtemos:

$$-\frac{m\,h}{\pi\,\mu\,D\,L}\ln\left(1 - \frac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,g\,h}V\right) = t \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,g\,h}V = \exp\left(-\frac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,h}t\right)$$

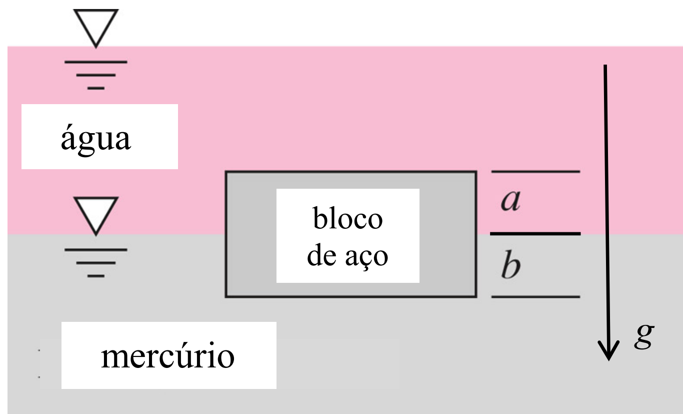
$$V = \frac{m\,g\,h}{\pi\,\mu\,D\,L}\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi\,\mu\,D\,L}{m\,h}t\right)\right]$$

Para $t \to \infty$, a velocidade terminal resulta $V_\infty = \dfrac{m\,g\,h}{\pi\,\mu\,D\,L}$; em forma adimensional, resulta:

$$V^* = 1 - \exp\left(-t^*\right)$$

onde $V^* = \dfrac{V}{V_\infty}$, $t^* = \dfrac{t}{T}$, $T = \dfrac{m\,h}{\pi\,\mu\,D\,L}$. O dispositivo pode ser utilizado como viscosímetro, medindo a velocidade terminal; dai resulta $\mu = \dfrac{m\,g\,h}{\pi\,V_\infty\,D\,L}$.

2. (2 pontos) Um bloco uniforme de aço, de massa específica ρ_s, flutuará em uma interface mercúrio-água (de massas específicas respectivamente ρ_m e ρ_w), como mostra a figura:



a) Determinar qual é a razão entre as distâncias $\dfrac{a}{b}$ para essa condição.
b) Supondo que os fluidos e o material do bloco sejam diferentes, que condições devem satisfazer as correspondentes massas especificas para que o bloco fique em equilíbrio na interface entre os fluidos?

Lei de Stevin: $p + \rho\,g\,z = cte$

(adaptado de White, F. M., *Mecânica dos Fluidos*, Mc Graw-Hill)

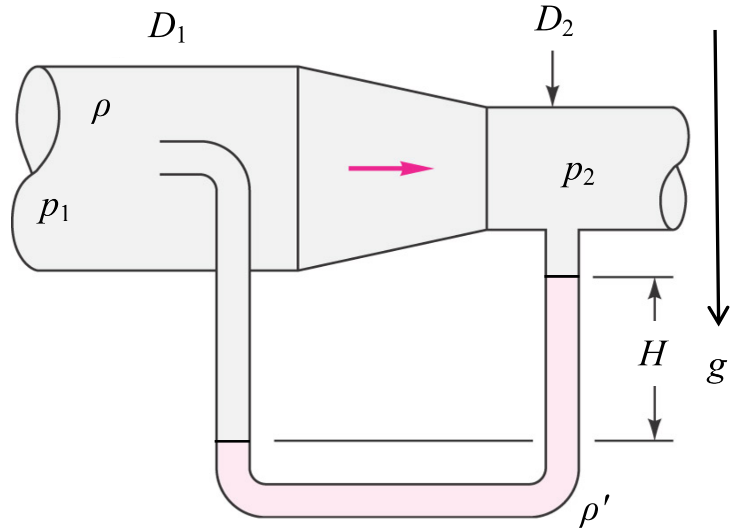
Solução:

a) O peso do bloco de aço é equilibrado pelo empuxo. Se A é a área do bloco, um balanço de forças resulta:

$$\rho_s\,g\,A\left(a+b\right) = \rho_w\,g\,A\,a + \rho_m\,g\,A\,b \quad \Rightarrow \quad a + b = \frac{\rho_w}{\rho_s}a + \frac{\rho_m}{\rho_s}b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{\dfrac{\rho_m}{\rho_s} - 1}{1 - \dfrac{\rho_w}{\rho_s}}$$

b) Para que as camadas de líquidos sejam estáveis, deve ser a massa específica do líquido inferior maior que a do líquido superior ($\rho_m > \rho_w$); da solução anterior, vemos que deve ser também a massa específica do líquido inferior maior que a do bloco ($\rho_m > \rho_s$), enquanto a massa específica do líquido superior deve ser menor que a do bloco ($\rho_w < \rho_s$); essas condições são satisfeitas para os materiais do problema. Desta maneira, deve ser $\rho_w < \rho_s < \rho_m$.

3. (4 pontos) Um fluido de massa específica ρ escoa em uma contração de área de diâmetro D_1 a $D_2 < D_1$, como mostra a figura. A tomada de pressão de estagnação e estática estão conectadas ao manômetro em U com um fluido de massa específica $\rho' > \rho$ em um campo gravitacional g. Supondo conhecida a pressão estática p_1 e a altura no manômetro H, determinar a pressaõ estática p_2 e a vazão volumétrica Q, desprezando perdas.



Conservação da massa: $0 = \int_{\upsilon} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}.\boldsymbol{\breve{n}}\right) dA$ ou $0 = \frac{d}{dt}\int_{\upsilon} \rho \, d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}_r.\boldsymbol{\breve{n}}\right) dA$

Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = cte$

(adaptado de White, F. M., *Mecânica dos Fluidos*, Mc Graw-Hill)

Solução:

Por continuidade entre as seções 1 e 2: $V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \beta^2$,

onde $\beta = \frac{D_2}{D_1} < 1$.

Da equação de Bernoulli na linha de corrente entre 1 e 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left[1 - \beta^4\right]$$

Da equação de Bernoulli na linha de corrente entre 1 e o ponto de estagnação:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_s$$

Da hidrostática na coluna de líquido:

$$p_s + \rho g H = p_2 + \rho' g H \quad \Rightarrow \quad p_s = p_2 + (\rho' - \rho) g H$$

Eliminando p_s das relações anteriores:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + (\rho' - \rho) g H \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = -\frac{1}{2}\rho V_1^2 + (\rho' - \rho) g H = -\frac{1}{2}\rho \beta^4 V_2^2 + (\rho' - \rho) g H$$

Eliminando $p_1 - p_2$ das relações anteriores:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left[1 - \beta^4\right] = -\frac{1}{2}\rho \beta^4 V_2^2 + (\rho' - \rho) g H \quad \Rightarrow \quad V_2 = \left[2\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right) g H\right]^{1/2}$$

A vazão volumétrica resulta: $Q = V_2\, A_2 = \dfrac{1}{4}\pi\, D_2^2 \left[2\left(\dfrac{\rho'}{\rho} - 1 \right) g\, H \right]^{1/2}$

A pressão estática na seção 2 resulta:

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left(1 - \beta^4\right) = p_1 - \frac{1}{2}\rho \left[2\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) g\, H \right] \left(1 - \beta^4\right) = p_1 - \left(1 - \beta^4\right)\left(\rho' - \rho\right) g\, H$$