Esquema geral do grupo de renormalização

adaptado da seção 14.5 de Introdução à Física Estatística (Edusp, 1997)

Nas proximidades do ponto crítico o comprimento de correlação ξ é muito grande, muito maior do que a distância entre os sítios da rede cristalina. Portanto, segundo a ideia de Kadanoff, é possível diminuir o número de graus de liberdade do sistema. Num modelo de spins, as variáveis situadas dentro de um bloco de dimensão b, com $b << \xi$, têm um comportamento coerente e podem ser substituídas por uma nova variável efetiva de spin. Essa transformação de escala, envolvendo um fator b nos comprimentos e um possível fator c na magnitude dos spins, conduz a um novo hamiltoniano $\mathcal{H}'$. Quando a forma do hamiltoniano inicial for suficientemente geral, podemos obter relações de recorrência, presumivelmente analíticas, envolvendo os parâmetros de $\mathcal{H}$ e de $\mathcal{H}'$. Na criticalidade, após um certo número de aplicações das relações de recorrência, depois que se eliminam os aspectos irrelevantes do hamiltoniano inicial, devemos atingir um ponto fixo $\mathcal{H}^*$ da transformação. Isso se justifica porque na criticalidade o comprimento de correlação infinito garante a invariância do comportamento físico do sistema frente a mudanças na escala de comprimentos. Há uma espécie de simetria de dilatação, que também está presente nas chamadas figuras fractais (tudo se passa como se dispuséssemos de um conjunto de lupas, com um poder crescente de ampliação; mudando as lupas, observam-se os mesmos aspectos gerais do sistema).

Numa linguagem ligeiramente mais precisa, vamos resumir as etapas do grupo de renormalização:

(i) Dado um certo hamiltoniano, escrito na forma $-\beta\mathcal{H}\{\sigma\} = \mathcal{K}\{\sigma\}$, obtém-se $\mathcal{K}'\{\sigma'\}$ através de uma transformação $\mathbf{R}$. Então escrevemos

$$\mathcal{K}'\{\sigma'\} = \mathbf{R}(\mathcal{K}\{\sigma\}). \tag{1}$$

Em princípio a transformação deve preservar a função de partição, isto é,

$$Z_N\{\mathcal{K}\} = Tr\exp(\mathcal{K}) = Tr'\exp(\mathcal{K}') = Z_{N'}(\mathcal{K}'), \tag{2}$$

com

$$N' = \frac{N}{b^d}. \tag{3}$$

A transformação $\mathbf{R}$ implica uma mudança de escala dos comprimentos ($\overrightarrow{r} \to \overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r}/b$), podendo também implicar uma renormalização da magnitude dos spins ($\sigma \to \sigma' = \sigma/c$).

(ii) Feita a transformação $\mathbf{R}$, podemos escrever novas expressões para a energia livre por spin e a função de correlação de pares,

$$g\left\{\mathcal{K}'\right\} = b^d g\left\{\mathcal{K}\right\}, \tag{4}$$

e

$$\Gamma\left\{\overrightarrow{r};\mathcal{K}\right\} = c^2\Gamma\left\{\frac{1}{b}\overrightarrow{r};\mathcal{K}'\right\}, \tag{5}$$

respectivamente.

(iii) agora a transformação deve ser repetida várias vezes,

$$\mathcal{K}' = \mathbf{R}\mathcal{K},\ \mathcal{K}'' = \mathbf{R}\mathcal{K}',\ \cdots. \tag{6}$$

Na criticalidade, devemos atingir um ponto fixo da transformação,

$$\mathcal{K}^* = \mathbf{R}\mathcal{K}^*. \tag{7}$$

Perto da criticalidade, podemos linearizar o hamiltoniano $\mathcal{K}$ em torno de $\mathcal{K}^*$. Assim temos

$$\mathbf{R}\mathcal{K} = \mathbf{R}\left(\mathcal{K}^* + \mathcal{Q}\right) = \mathcal{K}^* + \mathbf{L}\mathcal{Q} + \cdots, \tag{8}$$

em que $\mathbf{L}$ é um operador linear. Vamos agora escrever o operador $\mathcal{Q}$ numa representação diagonal em relação aos autovetores de $\mathbf{L}$,

$$\mathcal{Q} = \sum_j h_j \mathcal{Q}_j, \tag{9}$$

tal que

$$\mathbf{L}\mathcal{Q}_j = \Lambda_j \mathcal{Q}_j, \tag{10}$$

em que $\{\mathcal{Q}_j\}$ é um conjunto de operadores de base, e o conjunto de valores $\{h_j\}$ serve para parametrizar o hamiltoniano inicial. Assim temos

$$\mathcal{K}' = \mathbf{R}\mathcal{K} = \mathcal{K}^* + \sum_j h_j \Lambda_j \mathcal{Q}_j. \tag{11}$$

Vamos também escrever

$$\Lambda_j = b^{\lambda_j} \tag{12}$$

a fim de garantir a propriedade de semi-grupo da transformação $\mathbf{R}$.

Temos agora uma base conceitual para discutir as idéias de universalidade e formular as teorias de escala. O conjunto de valores $\{h_j\}$ parametriza o hamiltoniano inicial, enquanto as sucessivas iterações das relações de recorrência definem linhas de fluxo no espaço dos parâmetros. Aplicando n vezes a transformação de grupo de renormalização temos

$$\mathcal{K}^{(n)} = \mathcal{K}^* + \sum_j h_j b^{n\lambda_j} \mathcal{Q}_j. \tag{13}$$

Quando $\lambda_j > 0$, o operador $\mathcal{Q}_j$ é chamado **relevante**. Quando $\lambda_j < 0$, o operador $\mathcal{Q}_j$ é **irrelevante**. Após um número grande de iterações apenas os operadores relevantes permanecem, conduzindo o hamiltoniano para longe do ponto fixo. Portanto, na criticalidade devemos zerar todos os parâmetros h_j que correspondem a operadores relevantes (o caso de um operador marginal, para o qual $\lambda_j = 0$, precisaria ser tratado separadamente). Diferentes pontos fixos devem corresponder a diferentes **classes de universalidade** crítica: no espaço dos parâmetros há regiões distintas que podem produzir fluxos para cada um destes pontos fixos.

No caso de um ponto crítico simples, há somente dois operadores relevantes. Na linguagem dos ferromagnetos, um deles poderia ser identificado com a energia e o outro com a magnetização. Assim, podemos fazer $h_1 = t = (T - T_c)/T_c$ e $h_2 = H$. Na criticalidade, devemos ter $h_1 = h_2 = 0$, ou seja, $t = 0$ e $H = 0$.

A teoria de escala surge naturalmente a partir desta formulação. Após n iterações, a energia livre dada pela equação (4) pode ser escrita como

$$g(h_1, h_2, h_3, ...) = b^{-dn} g\left(b^{\lambda_1 n} h_1, b^{\lambda_2 n} h_2, b^{\lambda_3 n} h_3, ...\right) =$$

$$= h_1^{d/\lambda_1} g\left(1, \frac{h_2}{h_1^{\lambda_2/\lambda_1}}, \frac{h_3}{h_1^{\lambda_3/\lambda_1}} ....\right). \tag{14}$$

Escolhendo $h_1 = t$ e $h_2 = H$, temos

$$\frac{d}{\lambda_1} = 2 - \alpha, \text{ ou seja, } \lambda_1 > 0, \tag{15}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \Delta = \beta + \gamma > 0, \tag{16}$$

e

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \phi, \tag{17}$$

que é conhecido como expoente de cruzamento. Num ponto crítico usual, $\lambda_3 < 0$, pois há somente dois operadores relevantes. Então, $\phi < 0$, implicando, mesmo com $h_3 \neq 0$, a existência de uma forma assintótica de escala para a energia livre,

$$g\left(h_1, h_2, h_3, ...\right) \approx t^{2-\alpha} g\left(1, \frac{H}{t^{\Delta}}, 0, 0, ...\right). \tag{18}$$

Da mesma forma, é possível construir uma teoria de escala para as correlações críticas,

$$\Gamma\left(\overrightarrow{r}; t, H, h_3, ...\right) = b^{-(d-2+\eta)} \Gamma\left(\frac{1}{b}\overrightarrow{r}; b^{\lambda_1} t, b^{\lambda_2} H, b^{\lambda_3} h_3, ...\right) =$$

$$= t^{(d-2+\eta)/\lambda_1} \Gamma\left(\frac{1}{t^{-1/\lambda_1}}\overrightarrow{r}; 1, \frac{H}{t^{\lambda_2/\lambda_1}}, \frac{h_3}{t^{\lambda_3/\lambda_1}}, ...\right), \tag{19}$$

onde $1/\lambda_1 = \nu$, ou seja, $2 - \alpha = d$, ficando automaticamente satisfeita a relação de hiperescala.

Agora seria interessante aplicar essas ideias ao modelo de brinquedo na rede quadrada. Vamos considerar novamente as relações de recorrência obtidas anteriormente, cujos fluxos e pontos fixos no espaço de parâmetros já foram desenhados. Linearizando estas relações de recorrência nas vizinhanças do ponto fixo não trivial, tínhamos obtido

$$\begin{pmatrix} \Delta K_1' \\ \Delta K_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Diagonalizando esta matriz, obtemos um autovalor assoviado a "operador relevante",

$$\Lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{3} > 1, \tag{21}$$

e outro autovalor, de módulo menor do que a unidade,

$$\Lambda_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3} \qquad \rightarrow \qquad |\Lambda_2| = \left|\frac{2-\sqrt{10}}{3}\right| < 1 \tag{22}$$

Como o comprimento da rede original fica reduzido por um fator $b = \sqrt{2}$ em cada aplicação das relações de recorrência, temos

$$\Lambda_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\lambda_1} \text{ e } |\Lambda_2| = \left(\sqrt{2}\right)^{\lambda_2}. \tag{23}$$

Portanto,

$$\lambda_1 = \frac{2\ln\Lambda_1}{\ln 2} = 1,56609... \tag{24}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{2\ln|\Lambda_2|}{\ln 2} = -2,7360.... \tag{25}$$

Para aplicar a teoria de escala (a campo nulo), basta fazer as identificações mais óbvias: $h_1 = t = (\Delta K_1)_{tr}$, $h_2 = H = 0$ (campo nulo) e $h_3 = (\Delta K_2)_{tr}$, onde os novos parâmetros $(\Delta K_1)_{tr}$ e $(\Delta K_2)_{tr}$ correspondem a combinações lineares de ΔK_1 e ΔK_2 produzidas pela rotação que diagonaliza a matriz da transformação (20). A contribuição dos segundos vizinhos é irrelevante ($\lambda_2 < 0$), corroborando as idéias de universalidade. Como $\lambda_1 > 0$, o operador energia é relevante, com um expoente crítico

$$\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = 2 - \frac{2}{1,566...} = 0,722..., \tag{26}$$

que está certamente muito distante das expectativas para o modelo de Ising bidimensional!