

Lista de Exercícios nº 3 Resolva 5 para 25/10/2018

MAT 0223 I introdução - a teoria dos Números
Período Noturno 2º semestre 2018 Prof Eduardo

- 1) Seja K um corpo finito mostre que existe um primo p e um natural n tal que o nº de elementos de K , $\#K$, é p^n .
- 2) Seja $\theta \in \mathbb{R}$ e n um inteiro positivo.
Calcule em $\mathbb{R}[x]$ o resto da divisão de $(\cos \theta + x \sin \theta)^n$ por $x^2 + 1$.
- 3) Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio de grau n . Mostre que se p/q é uma raiz racional (com p/q na forma irredutível) então $p|a_0$ e $q|a_n$.
- 4) Construa um corpo com 25 elementos.
- 5) Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo não constante e sem raízes racionais.
Suponha que exista um primo p , inteiro, tal que $p \nmid a_n$, $p|a_j$ para todo $0 \leq j < n$ e $p^2 \nmid a_1$. Mostre que $f(x)$ é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$.
- 6) Seja α uma raiz de $x^3 - 3x + 1 = 0$. Mostre que $\alpha^2 - 2$ também é raiz deste polinômio.
- 7) Seja $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ onde $n > 1$ em $\mathbb{Q}[x]$.
Mostre que $f(x)$ é irredutível.