

PNV 3324 FUNDAMENTOS DE CONTROLE EM ENGENHARIA

NOTAS DE AULA*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina.

11 PROJETO DE COMPENSADORES MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

11.1 Introdução

Os controladores são projetados para permitirem que a resposta do sistema atenda as especificações de desempenho. No caso de sistemas de controle em malha fechada o ajuste do ganho é a primeira etapa para tentar atender as especificações. Mas, infelizmente, só um ajuste do ganho, muitas vezes, não permite atender às especificações em regimes transitórios e permanentes. Por exemplo, para reduzir o erro em regime permanente pode-se aumentar o valor do ganho, mas isto acarretaria regime transitório indesejável ou mesmo tornar o sistema instável. Desta forma torna-se necessário introduzir um outro elemento no sistema denominado compensador para que o comportamento do sistema seja o desejado.

Obs. Há autores que diferenciam os termos controlador e compensador, e outros que não fazem esta distinção. Nesta disciplina será adotado que os dois termos são equivalentes.

O compensador mais comum e mais simples é uma função de transferência com um zero e um pólo definida dada por:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + a}{s + b} \quad 11.1$$

Se $0 < a < b$ $G(s)$ é conhecido como **compensador de avanço de fase**.

Se $0 < b < a$ $G(s)$ é conhecido como **compensador em atraso de fase**.

O que determina a utilização de um compensador ou outro é a especificação de controle. Em geral utiliza-se o compensador em avanço para melhorar o regime transitório, isto é, alterar os pólos dominantes, e o compensador em atraso para melhorar o regime permanente.

Pode-se efetuar uma combinação das duas e obter um **compensador avanço-atraso de fase**.

11.2 Compensador de avanço de fase.

No caso do compensador de avanço de fase é conveniente escrever a função de transferência como:

$$G(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1$$

ATENÇÃO: ESTA DEFINIÇÃO DO COMPENSADOR DE AVAÇO DE FASE NÃO É UNIVERSAL.

Conforme dito anteriormente, utiliza-se o controlador de avanço de fase quando se deseja alterar os pólos dominantes do sistema. Com o compensador a equação característica é dada por:

$$1 + G_c(s)G(s) = 0 \quad (1 + G_c(s)G(s) = 0)$$

ou

$$G_c(s)G(s) = |1| \angle -180^\circ$$

onde $G(s)$ é a função de transferência do sistema a ser controlado.

Isto significa que :

$$\angle G_c(s) + \angle G_s(s) = -180^\circ$$

ou seja a contribuição angular ϕ que o compensador de avanço deve fornecer é:

$$\phi = \angle G_c(s) = -180^\circ - \angle G(s)$$

11.2.1 Projeto de Compensadores em avanço através de Lugar das Raízes

O objetivo deste método é alterar o Lugar das Raízes introduzindo pólos e zeros de tal forma que ela passe por uma das raízes especificadas. Existem diversos procedimentos para o projeto do compensador em avanço. Neste curso será apresentado o procedimento geométrico que está sugerido em Ogata (1998).

As etapas do projeto do compensador em avanço pelo método geométrico são:

- determinar o pólo dominante s_1 desejado a partir das especificações de desempenho;
- obter o ângulo $\phi = -180 - \angle G(s_1)$, que é o ângulo que o compensador em avanço precisa contribuir. Se este valor for negativo o compensador em avanço não poderá ser utilizado. A contribuição angular de um compensador em avanço deve ser aproximadamente de 50° a 60° graus. Se for requerida uma contribuição maior de fase deve ser usado mais de um compensador.
- Indicar no plano s o ponto s_1 . A partir deste ponto traçar uma linha paralela ao eixo da abscissa (r_1) e também unir o ponto s_1 com a origem do sistema cartesiano (segmento r_2)
- Obter o ângulo formado por r_1 e r_2 , isto é, $\psi = r_1 \wedge r_2$ e traçar a sua bissetriz.

- e) Somar $\phi/2$ para cada um dos lados da bissetriz e traçar segmento de reta a partir de s_1 de tal modo que eles cruzem o eixo da abscissa. Ou seja, definir

$$\theta_p = \frac{\psi - \phi}{2} \text{ e } \theta_z = \frac{\psi + \phi}{2}$$

- f) Obter o ponto de encontro entre estas retas e o eixo da abscissa para definir o pólo e o zero da função de transferência, isto é,

$$-\frac{1}{\alpha T} = \operatorname{Re}(s_1) - \frac{\operatorname{Im}(s_1)}{\tan \theta_p}$$

$$-\frac{1}{T} = \operatorname{Re}(s_1) - \frac{\operatorname{Im}(s_1)}{\tan \theta_z}$$

- g) Determinar o ganho a partir de $|G_c(s_1)G(s_1)| = 1$

- h) Se o ganho for pequeno e não satisfazer a especificação de regime permanente, escolher um novo s_1 e repetir o procedimento.

11.3 Compensador de atraso de fase

Uma das finalidades do compensador em atraso é diminuir o erro em regime permanente sem afetar o regime transitório. Isto significa que as localizações dos pólos dominantes não devem sofrer grandes alterações e que o ganho deve ser aumentado.

Para projetar o compensador de atraso de fase é conveniente escrever a função de transferência como:

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}; \beta > 1 \quad 11.2$$

Antes de introduzir o procedimento para o seu projeto é interessante avaliar o seu impacto na malha de controle. Seja $G'(s)$ a função de transferência em malha aberta de um sistema sem o controlar. A equação característica é dada então por:

$$1 + G'(s) = 0$$

Admita que s_1 seja um dos pólos dominantes do sistema. Tem-se então:

$$G'(s_1) = |1| \angle -180^\circ \quad 11.3$$

Considere agora o compensador de atraso de fase em série com $G'(s)$. Neste caso deveremos ter:

$$1 + G_c(s)G'(s) = 0$$

$$\left| K_c \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} G(s_1) \right| = \left| K_c \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| |G(s_1)| = 1 \quad 11.4$$

$$\angle [G_c(s_1)G(s_1)] = \angle G_c(s_1) + \angle G(s_1) = -180^\circ \quad 11.5$$

Se o zero e o pólo do compensador forem próximos ($\left| \frac{1}{T} \right| \approx \left| \frac{1}{\beta T} \right|$) e $K_c \approx 1$ a equação 11.4 praticamente atenderá a condição de módulo da equação 11.3 e também a contribuição angular do compensador na equação 11.5 é mínima. Normalmente admite-se que a contribuição angular do compensador de atraso é da ordem de 5° .

Até o presente momento foi visto que se os pólos e zeros do compensador de atraso forem próximos ele não afetará significativamente a localização dos pólos dominantes do sistema. Resta agora verificar a sua contribuição no regime permanente. Seja K_p e K_v , respectivamente, o erro estático de posição e de velocidade do sistema original:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Com o compensador tem-se:

$$\hat{K}_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s) = K_c \beta G(0) = K_c \beta K_p$$

$$\hat{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s)$$

Admitindo que o sistema seja do tipo 1 com ganho K tem-se:

$$\hat{K}_v = K_c \beta K = K_c \beta K_v$$

Como $K_c \approx 1$ os coeficientes de erro estático de posição e de velocidade são aumentados por um fator $\beta > 1$, diminuindo com isto os erros em regime permanente. Normalmente adota-se $1 < \beta < 15$. Convém observar que β é a razão zero/pólo da função de transferência do compensador de atraso de fase.

11.3.1 Projeto de compensadores de atraso através do método do Lugar das Raízes

As etapas do projeto do compensador atraso pelo método geométrico são:

- Construir o lugar geométrico para o sistema não compensado;
- Calcular o valor da constante de erro estático a partir da especificação estabelecida;
- Determinar o acréscimo no valor da constante de erro estático necessário para atender as especificações;
- Determinar o pólo e o zero do compensador por atraso de fase que produzam o aumento no valor da constante de erro estático, sem alterar significativamente o lugar das raízes;
- Traçar o lugar das raízes para o sistema compensado e localizar os pólos dominantes;
- Ajustar o ganho K_c do compensador a partir da condição do módulo de modo que os pólos a malha fechada dominantes estejam na posição desejada.

Não há uma regra formal para a etapa d). A partir da etapa c) pode-se estimar o valor de β e, normalmente, os zeros e pólos são escolhidos arbitrariamente próximos um do outro, porém mantendo o valor de β (em torno de 10) desejada. Isto pode ser obtido selecionando-se os dois números entre 0 e 1. Por exemplo, se o zero for igual a 0.1 e o pólo igual a 0.01, a razão entre eles é 10 mas a sua contribuição para o regime transitório é praticamente nulo porque eles praticamente se anulam mutuamente (ou a sua contribuição angular para alterar o lugar das raízes é praticamente nula). O efeito negativo deste compensador na resposta do sistema é que ele aumenta o tempo de acomodação porque o zero do compensador atrai um pólo para próximo da origem.