ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PNV 3324 FUNDAMENTOS DE CONTROLE EM ENGENHARIA

NOTAS DE AULA*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina. Em especial, consultar qualquer edição da referência abaixo para maiores detalhes.
Ogata, K., Engenharia de Controle Moderno, Prentice-Hall do Brasil.

10 ERRO ESTACIONÁRIO EM SISTEMAS DE CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO

10.1 Introdução

Um dos objetivos do sistema de controle é tentar eliminar os erros em regime permanente. Estes erros podem ocorrer devido às imperfeições ou desgastes dos componentes ou pela própria incapacidade do sistema de acompanhar a referência adequadamente. Nesta disciplina será estudado o erro devido a última alternativa. Nenhum sistema de controle elimina erro para qualquer sinal de entrada. Um sistema pode eliminar erro para entrada degrau unitário e, no entanto, apresentar erro para entrada rampa. Conforme será visto a seguir, estes erros estão associados ao tipo da função de transferência em malha aberta.

10.2 Classificação dos sistemas de controle

Os sistemas de controle podem ser classificados em função da sua capacidade em seguir sinais de entrada em degrau, em rampa, em parábola, etc. Para isto é interessante efetuar uma classificação dos sistemas em função da sua capacidade de eliminar erros em regime permanente. Seja a função de transferência de malha aberta dada por:

$$G'(s) = \frac{K\left(T_1'' s+1\right)(T_2' s+1)..(T_m' s+1)}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)...(T_n s+1)} \qquad 10.1$$

(Obs. É admitido que a função de transferência do sensor é 1)

Um sistema é chamado de tipo 0 para $N = 0$, tipo 1 para $N = 1$, tipo 2 para $N = 2$ e assim por diante. Fisicamente, na medida em que N aumenta melhora o erro em regime permanente, mas tende a aumentar o problema de estabilidade.

10.3 Erros estacionários

Considere um sistema de realimentação unitária com função de transferência de malha aberta $G'(s)$ A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G'(s)}{1+G'(s)} \qquad 10.2$$

A função de transferência entre o erro e a referência é dada por:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G^{'}(s)} \qquad 10.3$$

O erro em regime permanente para um sistema estável é dado por:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G^{'}(s)} \qquad 10.4$$

10.3.1 *Coeficiente de erro estático de posição* $\boldsymbol{K_p}$

O erro estacionário do sistema para uma excitação em degrau unitário é:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G'(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+G'(0)} \qquad 10.5$$

O coeficiente de erro estático de posição $\boldsymbol{K_p}$ é definido como:

$$\boldsymbol{K_p} = \lim_{s\to 0} G'(s) = G'(0) \qquad 10.6$$

ATENÇÃO: Este $\boldsymbol{K_p}$ não tem relação com o ganho K_p do controlador PID.

Assim, substituindo 10.6 em 10.5 pode-se expressar o erro estacionário como:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\boldsymbol{K_p}} \qquad 10.7$$

Os coeficientes de erro estático de posição $\boldsymbol{K_p}$ para diferentes tipos de sistemas são dados por:

Sistemas *Tipo 0*

$$\boldsymbol{K_p} = \frac{K\left(T_1^{\prime\prime} s+1\right)(T_2' s+1)..(T_m' s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)...(T_n s+1)} = K$$

$$\therefore e_{ss} = \frac{1}{1+\boldsymbol{K_p}} = \frac{1}{1+K}$$

Sistema *Tipo 1* ou superior

$$\boldsymbol{K_p} = \frac{K\left(T_1^{\prime\prime} s+1\right)(T_2' s+1)..(T_m' s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)...(T_n s+1)} = \infty \ \ (N \geq 1)$$

$$\therefore e_{ss} = 0$$

Ou seja, em um sistema tipo 0 sempre haverá erro de posição. Para reduzi-lo pode-se aumentar o ganho, mas isto pode prejudicar a estabilidade do sistema.

10.3.2 *Coeficiente de erro estático de velocidade* $\boldsymbol{K_v}$

O erro estacionário do sistema a uma excitação em rampa unitária é:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G^{'}(s)}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG^{'}(s)} \qquad 10.8$$

O coeficiente de erro estático de velocidade $\boldsymbol{K_v}$ é definido por:

$$\boldsymbol{K_v} = \lim_{s\to 0} sG'(s) \qquad 10.9$$

Substituindo 10.9 em 10.8 tem-se:

$$e_{ss} = \frac{1}{\boldsymbol{K_v}}$$

Convém ressaltar que o termo erro de velocidade é usado para designar o erro estacionário para uma excitação em rampa. A dimensão do erro de velocidade é a mesma do erro de posição do sistema, isto é, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, mas um erro na posição devido a uma entrada em rampa.

O coeficiente de erro estático de velocidade $\boldsymbol{K_v}$ para diferentes tipos de sistemas são dados por:

Sistema Tipo 0

$$\boldsymbol{K_v} = \lim_{s\to 0} \frac{sK\left(T_1^{\prime\prime} s+1\right)(T_2' s+1)\ldots(T_m' s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots(T_n s+1)} = 0$$

$$\therefore e_{ss} = \infty$$

Sistema Tipo 1

$$\boldsymbol{K_v} = \lim_{s\to 0} \frac{sK\left(T_1^{\prime\prime} s+1\right)(T_2' s+1)\ldots(T_m' s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots(T_n s+1)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$

Tipo 2 ou superior

$$\boldsymbol{K_v} = \lim_{s\to 0} \frac{sK\left(T_1^{\prime\prime} s+1\right)(T_2' s+1)\ldots(T_m' s+1)}{s^N s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots(T_n s+1)} = \infty \quad (N \geq 2)$$

$$\therefore e_{ss} = \frac{1}{\boldsymbol{K_v}} = 0$$

Os resultados acima estão resumidos na tab. 10.1

Tab. 10.1 Erro estacionário em função do ganho *K*

	Sinal de entrada	
Tipos do sistema	degrau	rampa
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{K}$
Sistema tipo 2	0	0

10.4 Exemplos

Sejam

$$G_0(s) = \frac{s+1}{0.5s+1} \quad \text{(sistema tipo 0)}$$

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s(0.5s+1)} \quad \text{(sistema tipo 1)}$$

Para a função $G_0(s)$ tem-se:

$K = 1$

Portanto, considerando-se uma entrada degrau unitário obtém-se:

$\boldsymbol{K_p = K = 1}$ e $e_{ss} = \dfrac{1}{2}$

Já para o sistema $G_1(s)$ é de esperar $e_{ss} = 0$

Na Fig. 10.1 são mostradas as respostas dos dois sistemas em malha fechada para uma excitação degrau unitário e elas confirmam as expectativas teóricas.

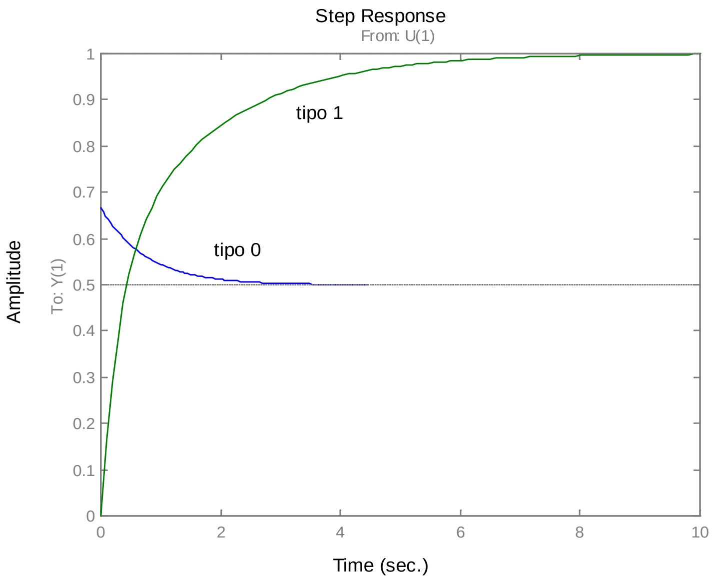

Fig. 10.1 Respostas dos sistemas tipo 0 e 1 em malha fechada com entrada degrau unitário

Considere adicionalmente a seguinte função

$$G_2(s) = \frac{s+1}{s^2(0.5s+1)} \quad \text{(sistema tipo 2)}$$

Considerando-se uma entrada rampa tem-se:

Para $G_0(s)$ $\boldsymbol{K_v} = 0$ e $e_{ss} = \infty$

Para $G_1(s)$ $\boldsymbol{K_p = K = 1}$ e $e_{ss} = 1$

Para $G_{2(}s)$ $\boldsymbol{K_v} = \infty$ e $e_{ss} = 0$

Na Fig. 10.2 são mostradas as respostas dos 3 sistemas em malha fechada para uma entrada rampa.

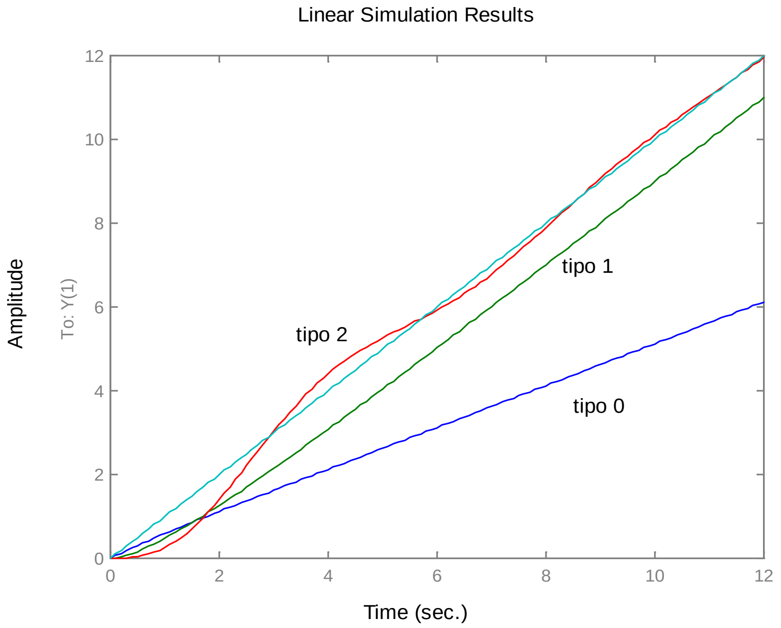

Fig. 10.2 Respostas dos sistemas tipo 0, 1 e 2 em malha fechada com entrada rampa