Capítulo 6

Referenciais Não Inerciais

Até agora, todas as descrições dos movimentos de partículas foram efetuadas em relação a referenciais inerciais por meio de interpretações das soluções das equações baseadas na segunda lei de Newton. Claro que todas as discussões dos movimentos podem ser efetuadas apenas em relação a referenciais inerciais, se assim desejar. Contudo, *nem sempre um referencial inercial é conveniente ou adequado para esses estudos.* Por exemplo, o movimento de um pêndulo dentro de um vagão acelerado pode ser descrito em relação a um referencial inercial, em geral, fixado no solo, fora do vagão. Mas essa descrição torna-se muito complicada, uma vez que o movimento acelerado do vagão deve ser levado em consideração. Além disso, efetuar as medidas em relação a esse referencial fixo no solo, envolve um esquema bastante elaborado. É, em geral, muito mais simples medir as grandezas necessárias no próprio vagão, mas a transformação dos números obtidos para serem tratados no referencial fixo no solo é, geralmente, complexo. Também é comum considerar como inercial, um referencial fixo na superfície da Terra para estudar os movimentos das partículas nas suas proximidades. Mas, esse referencial está em rotação junto com a Terra e, por isso, não se pode considerá-lo inercial para muitos desses movimentos, como o dos projéteis de um canhão que se movem com altas velocidades, o de um pêndulo de Foucault, o de grandes massas de ar numa região extensa da superfície da Terra etc., em que o efeito de rotação da Terra sobre esses movimentos é significativo. Mesmo esses fenômenos não são impossíveis de serem estudados em um referencial considerado inercial num grau de precisão muito melhor, como por exemplo, aquele fixado no Sol. Mas, ele é muito inconveniente para a descrição desses movimentos porque as suas observações são feitas aqui na Terra. Assim, conseguir escrever uma equação do movimento em um *referencial não inercial* é imperativo. Entretanto, a segunda lei de Newton, que é a base das equações do movimento, foi enunciada, originalmente, para referenciais iner-

ciais. Os procedimentos desenvolvidos com intuito de estender a validade da segunda lei de Newton para os referenciais não inerciais levaram ao conceito de *forças inerciais*. Estas forças são peculiares no sentido que *não têm origem em entidades físicas concretas*, em contraste com as forças gravitacionais e eletromagnéticas, por exemplo, que são provenientes de partículas com massas e de partículas carregadas, respectivamente. Assim, as forças centrífugas ou de Coriolis são *efeitos cinemáticos* e não existem entidades físicas causadoras destas forças. As equações do movimento em referenciais não inerciais e os efeitos das forças inerciais são os assuntos tratados neste capítulo.

6.1 Movimento num Referencial Acelerado

Sejam referenciais S e S' cujas origens são os pontos O e O', respectivamente. Suponha que S seja um referencial inercial e que O' esteja movendo em relação a O. Suponha, além disso, que S' não esteja em rotação. A posição de um ponto P no espaço em relação a O é dada pelo vetor de posição $\mathbf{r}$. Em relação a O', este mesmo ponto é localizado pelo vetor $\mathbf{r}'$. Os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ estão relacionados pela transformação:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}\,, \tag{6.1}$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor de posição de O' em relação a O, como indicado na Fig. 6.1. Segundo a concepção de Newton, mencionada na secção 1.7 do Volume 1, o tem-

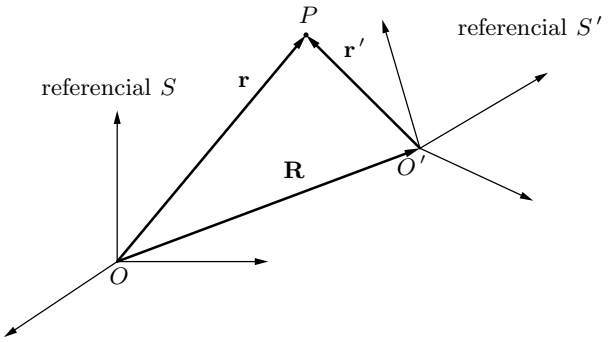

Fig. 6.1:

po t é comum a ambos os referenciais. Derivando-se, então, a equação (6.1) em relação a t obtém-se a equação de transformação da velocidade de movimento do ponto P, dada por:

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}\,. \tag{6.2}$$

O vetor $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$, nesta equação, é a velocidade de O' em relação a O (ou, equivalentemente, a velocidade do referencial S' em relação a S). Derivando-se (6.2) em relação a t chega-se a:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{v}}' = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{V}} \quad \text{ou ainda} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{A}\,. \tag{6.3}$$

Se $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{A} = 0$, o referencial S' está em movimento com velocidade constante em relação a S e as equações (6.1), (6.2) e (6.3) são as Transformações de Galileo da secção 1.7 do Volume 1. Neste caso, o referencial S' também é inercial.

Antes de tratar do movimento de uma partícula em referenciais acelerados, é interessante discurtir a relatividade do movimento entre dois observadores em referenciais inerciais distintos. Em geral, é dada ênfase em determinar as equações horárias para a descrição do movimento de uma partícula, uma vez escolhido um referencial inercial. Essas equações são úteis para se conhecer as posições ocupadas pela partícula em função do tempo, especialmente se se desejar saber onde ela estava num certo instante passado, ou fazer a previsão de onde estará num instante futuro, ou ainda, acompanhar a evolução temporal do movimento. Para se obter as equações horárias, é necessário o conhecimento das condições iniciais que, em geral, são a posição e a velocidade da partícula num instante inicial qualquer. Impondo-se, então, as condições iniciais na solução das equações diferenciais do movimento, provenientes da segunda lei de Newton, obtém-se as equações horárias. A descrição do movimento obtida por meio das equações horárias é bem detalhada. Entretanto, em muitas circunstâncias, não tem grande interesse em descrever o movimento com tanto detalhe. Por exemplo, conhecer a curva descrita pela trajetória da partícula em movimento, que pode ser mais simples de se obter, já poderia ser suficiente e não haveria interesse em acompanhar a evolução temporal. Obviamente, as equações horárias descrevem essa curva como equações paramétricas onde o parâmetro é, geralmente, o próprio tempo. Além disso, eliminando-se o tempo, t, nas equações horárias, obtém-se a equação de uma curva que representa a trajetória em questão; pelo menos em princípio.

Considere, agora, um observador M em um referencial inercial S e um outro, N, em um referencial S', também inercial. O referencial S' está se movendo com uma velocidade constante $\mathbf{V}$ em relação a S. Suponha que ambos os observadores, cada qual em seu próprio referencial, esteja observando o movimento de uma partícula P. Eles poderão ter equações horárias que são diferentes, mas são equivalentes pelas transformações de Galileo (6.1), (6.2) e (6.3) com $\mathbf{A} = 0$. Do ponto de vista do observador M, a trajetória descrita pela partícula é uma curva $\mathbf{r}(\eta)$. Por outro lado, do ponto de vista do observador N, essa mesma trajetória descreve uma curva $\mathbf{r}'(\xi)$, que, geralmente, não

é a mesma curva vista pelo M. É sempre possível transformar a curva $\mathbf{r}(\eta)$ em $\mathbf{r}'(\xi)$ mediante as transformações de Galileo, desde que se conheça o estado de movimento relativo dos referenciais S e S'. Assim, os dois observadores podem trocar informações e dectetar esse estado de movimento relativo. *Se não puder trocar informações, não há maneiras de cada um tomar ciência do seu próprio estado de movimento.* Do que foi dito até aqui, pode-se concluir que a "visão" do movimento da partícula depende do estado do movimento do observador. Tudo isso pode ser ilustrado com o exemplo que se segue.

Exemplo 6.1 Considere um referencial inercial S, cujos eixos são $O\,x$ na direção horizontal e o sentido positivo para a direita, $O\,y$ na direção vertical e sentido positivo para cima, como ilustrado na Fig. 6.2. Suponha que uma partícula de massa m é lançada de uma altura h, com velocidade $\mathbf{v}_0 = v_0\,\mathbf{e}_x$, onde $v_0 > 0$ e $\mathbf{e}_x$ é o vetor unitário apontando para o sentido positivo de $O\,x$. A partir daí, a partícula move sob a ação de uma força da gravidade constante $\mathbf{F} = -\,m\,g\,\mathbf{e}_y$, onde $\mathbf{e}_y$ é o vetor unitário apontando para o sentido positivo de $O\,y$ e g, o módulo da aceleração da gravidade. Considere, agora, um segundo referencial S' movendo-se em relação a S com uma velocidade $\mathbf{V} = V_x\,\mathbf{e}_x - V_y\,\mathbf{e}_y$, onde $V_x > v_0$ e $V_y > 0$, ilustrado também na Fig.6.2. Mostre a trajetória vista por um observador em repouso no referencial S e por um outro observador em repouso no referencial S' quando V_x e V_y são constantes.

Solução: A equação do movimento no referencial S é $m\,\ddot{\mathbf{r}} = -\,m\,g\,\mathbf{e}_y$, pela segunda lei de Newton. A sua decomposição nas direções dos eixos Ox e Oy, resultam no par de equações:

$$m\,\ddot{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad m\,\ddot{y} = -\,m\,g\,. \tag{6.4}$$

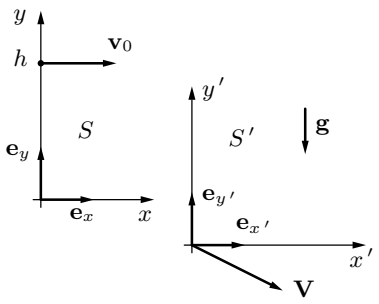

Fig. 6.2:

As soluções dessas equações estão sujeitas às condições iniciais do lançamento da partícula: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = h$ e $\dot{y}(0) = 0$. Após o cancelamento de m, a solução da primeira equação em (6.4) é: $x(t) = C\,t + D$. Com as duas condições iniciais para x, obtém-se: $C = v_0$ e $D = 0$. A segunda equação em (6.4) tem como solução geral: $y(t) = E + F\,t - \dfrac{1}{2}\,g\,t^{\,2}$. Impondo-se as condições iniciais para y, chega-se a: $E = h$ e $F = 0$. Portanto,

$$x(t) = v_0\,t$$

$$\text{e} \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}\,g\,t^{\,2}\,.$$

Eliminando-se t por meio de $x(t)$, a equação da trajetória vista pelo observador em repouso no referencial S é

$$y = h - \frac{g}{2\,v_0^2}\,x^{\,2}\,,$$

que representa a equação de uma parábola[1] ilustrada na Fig. 6.3 (a). Esta parábola é uma função que decresce monotonicamente quando x cresce. O referencial S' é também inercial porque V_x e V_y são constantes (movimento uniforme em relação a S). Portanto, a equação diferencial do movimento em S' é obtida, também, pela segunda

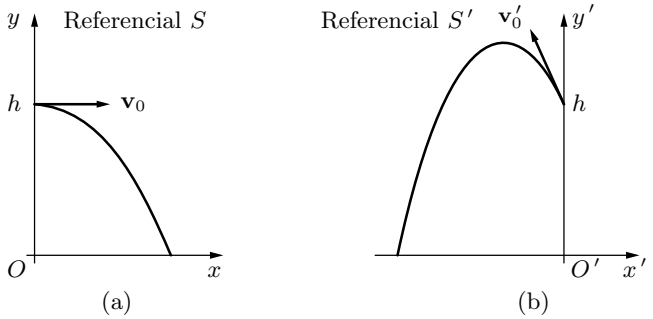

Fig. 6.3: Trajetórias da mesma partícula vistas pelos observadores em movimento relativo.

lei de Newton. Para facilitar, os seus eixos $O'x'$ e $O'y'$ serão tomados com as mesmas direções e os mesmos sentidos dos eixos Ox e Oy, respectivamente[2] (ver Fig. 6.2). Tem-se, com esse arranjo, $m\,\ddot{\mathbf{r}}' = -\,m\,g\,\mathbf{e}_{y'}$, onde $\mathbf{e}_{y'}$ é o vetor unitário na direção do eixo $O'y'$. Após cancelar m, a decomposição desta equação segundo as componentes x' e y' resulta no par de equações diferenciais que são as mesmas do referencial S, ou seja,

$$\ddot{x}' = 0 \qquad \text{e} \qquad \ddot{y}' = -\,g\,.$$

Supondo que no instante inicial ($t = 0$), a origem dos eixos dos referenciais S e S' estavam coincidentes, as transformações (6.1) e (6.2) levam às condições iniciais, no referencial S', dadas por: $x'(0) = 0$, $\dot{x}'(0) = v_0 - V_x = -\,(V_x - v_0)$, $y'(0) = h$ e $\dot{y}'(0) = V_y$. Assim, as soluções das equações do movimento obtidas são:

$$\begin{aligned} & & x'(t) &= -\,(V_x - v_0)\,t \\ \text{e} & & y'(t) &= h + V_y\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^{\,2}\,. \end{aligned}$$

Eliminando-se t da primeira equação e substituindo-se na segunda, obtém-se:

$$y' = h - \frac{V_y\,x'}{V_x - v_0} - \frac{g}{2}\,\frac{x'^{\,2}}{(V_x - v_0)^{\,2}}\,,$$

que é a equação da trajetória no referencial S' procurada. Ela descreve uma curva que é uma parábola com um máximo em $\bar{x}' = -\,\dfrac{V_y\,(V_x - v_0)}{g}$. A Fig. 6.3 (b) mostra o esboço desta trajetória. Note que, na condição estipulada, a trajetória é, também,

[1] Este resultado já deve ser do conhecimento do leitor que cursou disciplina de mecânica em nível elementar.

[2] Essas coincidências das direções e sentidos dos eixos nos dois referenciais não são necessárias, mas são convenientes para muitos propósitos.

parabólica para um observador no referencial S', mas é uma parábola diferente daquela que um observador no referencial S está vendo. *Se a velocidade de S' em relação S for alterada, a trajetória pode ser totalmente diferente das duas.* Por exemplo, considere o caso $V_x = v_0$. Na solução acima, $x'(t) = 0$ para esta condição. Isto significa que, para um observador em S' nesta condição, a trajetória é uma reta que coincide com o eixo dos y'. Para se ter uma idéia mais completa, o leitor deve obter as trajetórias vistas por um observador no referencial S' para diferentes combinações de V_x e V_y. Particularmente, quando $V_x = v_0$ e $V_y = 0$, $V_x = 0$ e $V_y > 0$, $V_x = 0$ e $V_y < 0$, $V_x = v_0$ e $V_y < 0$ são interessantes. Sugere-se tentar também várias outras situações.

Se as equações diferenciais do movimento (ou seja, *as leis físicas*) *são as mesmas em ambos os referenciais, porque as trajetórias são diferentes para os observadores num e noutro referencial? Note que, devido às transformações* (6.1) *e* (6.2), *as condições iniciais são diferentes para observadores em S e em S'.* Esse fato conduz à conclusão que, no caso de se ter S e S' inerciais, um observador em S vê uma das curvas da família de soluções das equações diferenciais do movimento, ao passo que um observador em S' vê uma outra curva da mesma família. *Concluindo, a curva descrita pela trajetória de uma partícula, observada em cada referencial inercial, constitui a realidade do observador no próprio referencial. Repetindo uma vez mais, essas diferenças de realidade entre dois observadores em movimento um em relação ao outro, só pode ser detectado se for possível que eles façam comparações envolvendo os dois referenciais. Se se basear em apenas um deles, é impossível conhecer a realidade do observador em outro referencial. Assim, para cada observador, a trajetória da partícula que ele observa é a realidade dele próprio.*

O exemplo 6.1 mostra as diferenças observadas no movimento de uma mesma partícula do ponto de vista de observadores em referenciais inerciais distintos. Como ficam essas diferenças, se um observador estiver num referencial acelerado em relação a um referencial inercial? Para responder a esta questão, é necessário desenvolver uma maneira de escrever uma equação do movimento em um referencial não inercial.

Como o objetivo desta secção é estudar a descrição do movimento num referencial acelerado, suponha, doravante, que $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{A} \neq 0$ na equação (6.3), salvo menção em contrário.

Suponha, agora, que uma partícula de massa constante, m, esteja movimentando juntamente com o ponto P (Fig. 6.1 da página 12), sob a ação de uma força aplicada $\mathbf{F}$. Então, a equação diferencial do movimento escrita em relação ao referencial S é:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\,, \tag{6.5}$$

de acordo com a segunda lei de Newton (lembrar que S é inercial). Por outro lado, reescrevendo (6.3) como $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' + \mathbf{A}$, (6.5) torna-se:

$$m\,(\ddot{\mathbf{r}}' + \mathbf{A}) = \mathbf{F}\,.$$

Subtraindo-se $m\,\mathbf{A}$ de ambos os membros, obtém-se:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - m\,\mathbf{A}\,. \tag{6.6}$$

Se o membro direito desta equação pudesse ser considerado como uma força resultante efetiva, esta equação está no formato da segunda lei de Newton para uma partícula de massa constante m. Então, *se se interpretar o termo* $-m\,\mathbf{A}$ *como sendo uma força adicional aplicada sobre a partícula, a validade da segunda lei de Newton pode ser estendida para um referencial acelerado por meio da equação* (6.6). Formalmente, significa que se pode utilizar a equação (6.6) como se fosse a segunda lei de Newton, para uma partícula de massa constante, quando se quer descrever o seu movimento num referencial acelerado. Com este artifício, a equação (6.6) torna-se uma lei do tipo "segunda lei de Newton" disponível para um referencial acelerado. O procedimento é apenas adicionar uma força $-m\,\mathbf{A}$ à força $\mathbf{F}$ aplicada à partícula. Em outras palavras, o movimento é, então, descrito como o de uma partícula sob a ação de uma força resultante efetiva, $\mathbf{F} - m\,\mathbf{A}$, regida por uma lei do tipo "segunda lei de Newton".

Que espécie de força é $-m\,\mathbf{A}$? É uma força que aparece quando se adapta a segunda lei de Newton para um referencial acelerado e *não provém de uma entidade física geradora*, como é o caso das forças gravitacionais, por exemplo, que são devidas à presença de corpos com massas. Este tipo de força é muito comum nas experiências cotidianas das pessoas. Por exemplo, se um observador estiver sentado no assento de um automóvel em movimento acelerado numa estrada retilínea, ele terá a sensação que uma força o comprime contra o assento do carro. Se estiver segurando um pacote no colo, sentirá que uma força empurra o pacote contra ele. Se estiver num avião em movimento acelerado para decolagem, a sensação é bem mais intensa. Um outro exemplo. Um ônibus que for bruscamente freado tem uma aceleração $\mathbf{A}$, bastante intensa, apontando no sentido contrário ao do seu movimento (desaceleração). Os passageiros dentro desse ônibus sentem que estão sendo puxados para frente por uma força. Esta é exatamente a força inercial $-m\,\mathbf{A}$ porque o referencial fixo no ônibus é acelerado. Em qualquer dos exemplos mencionados, se se colocasse um dinamômetro adequado, ter-se-ia medidas das intensidades dessas forças. Ou seja, *a intensidade destas forças inerciais é mensurável, como é a intensidade de quaisquer forças provenientes de entidades físicas como massas, cargas etc.*

Como ilustração, a aplicação da equação (6.6) em problemas simples será mostrada em uma série de exemplos. Os movimentos sob o ponto de vista de um observador num referencial acelerado será o alvo da discussão e, também, algumas comparações com o ponto de vista de um observador num referencial inercial serão efetuadas quando for conveniente.

Exemplo 6.2 Suponha que um caminhão esteja em movimento numa rua retilínea e horizontal com aceleração constante, A, em relação ao solo. Suponha também que ele transporta um observador que está em repouso na sua carroçaria. O observador abandona uma partícula de uma altura h em relação ao solo, da extremidade traseira da carroçaria. No instante que essa partícula foi abandonada, a velocidade do caminhão era v_0 em relação ao solo e estava passando em frente de um observador que está em repouso no solo. Qual a trajetória dessa partícula vista pelo observador em repouso em relação ao solo? E pelo observador em repouso na carroçaria do caminhão?

Solução: Considere um eixo $O\,x$ na direção horizontal e o sentido positivo coincidindo com o do movimento do caminhão. Além disso, considere um outro eixo $O\,y$ cuja direção é vertical com sentido positivo para cima. Suponha, para simplificar, que esses eixos cruzem na posição que o observador está em repouso no solo. Este é um referencial inercial S, fixo no solo. O movimento em relação ao referencial fixo no solo é, então, descrito pela segunda lei de Newton:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\,,$$

onde $\mathbf{F} = -\,m\,g\,\mathbf{e}_y$, m é a massa da partícula e $\mathbf{e}_y$ é o vetor unitário que aponta no sentido positivo de $O\,y$. Em termos de componentes segundo as direções $O\,x$ e $O\,y$, esta equação torna-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem seguinte:

$$m\,\ddot{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad m\,\ddot{y} = -\,m\,g\,.$$

As hipóteses a respeito do sistema de eixos e a situação em que a partícula fora abandonada, levam às condições iniciais no referencial S dadas por: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $y(0) = h$ e $\dot{y}(0) = 0$. Note que as equações diferenciais do movimento coincidem com as equações (6.4) do exemplo 6.1 e as condições iniciais também são as mesmas. Dessa forma, a trajetória para um observador em repouso no referencial S, fixo no solo, é a mesma parábola da exemplo 6.1, isto é,

$$y = h - \frac{g}{2\,v_0^2}\,x^2\,,$$

reproduzida na Fig. 6.4 (a) para facilitar a comparação com a trajetória vista pelo observador no referencial fixo na carroçaria do caminhão, que será obtida a seguir. Agora, considere um outro eixo, $O'\,x'$ cuja direção e sentido coincide com a do $O\,x$ e, também, $O'\,y'$ na direção vertical com sentido positivo para cima. Suponha que a origem, O', deste segundo sistema esteja fixa na altura do solo, abaixo da posição do observador em repouso na carroçaria do caminhão. Este é, então, o referencial acelerado, S', fixo no caminhão que está em movimento acelerado. O movimento da partícula é, então, descrito pela solução da equação (6.6) neste referencial, com $\mathbf{A} = A\,\mathbf{e}_{x'}$ e $\mathbf{F} = -\,m\,g\,\mathbf{e}_{y'}$,

sendo $\mathbf{e}_{x'}$ e $\mathbf{e}_{y'}$ os vetores unitários apontando nas direções positivas de $O'x'$ e $O'y'$, respectivamente. Em termos das componentes x' e y' neste referencial, as equações diferenciais do movimento são:

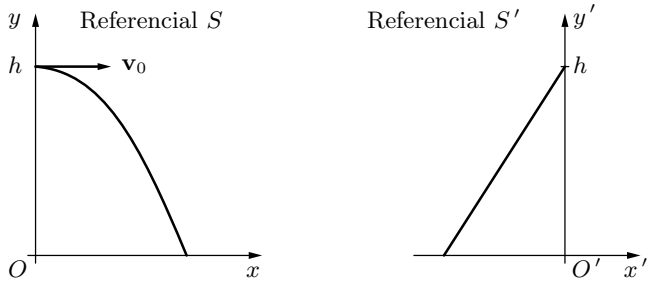

Fig. 6.4: Trajetória da partícula vista pelo observador em: (a) referencial inercial; (b) referencial acelerado.

$$m\,\ddot{x}' = -\,m\,A$$

e

$$m\,\ddot{y}' = -\,m\,g\,.$$

As suas soluções gerais são dadas por

$$x'(t) = C' + D'\,t - \frac{1}{2}\,A\,t^2$$

e

$$y'(t) = E' + F'\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,,$$

sendo C', D', E' e F' constantes de integração, determináveis pelas condições iniciais. Devido às condições do problema e às hipóteses relativas ao referencial, têm-se: $x'(0) = 0$, $\dot{x}'(0) = 0$, $y'(0) = h$ e $\dot{y}'(0) = 0$. Com a imposição destas condições, $C' = D' = 0$, $E' = h$ e $F' = 0$. Portanto, os resultados finais são:

$$x'(t) = -\,\frac{1}{2}\,A\,t^2$$

e

$$y'(t) = h - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,.$$

Procedendo-se a eliminação de t, obtém-se a equação da trajetória

$$y' = h + \frac{g}{A}\,x'\,,$$

ou seja, a trajetória é uma reta de coeficiente angular $\dfrac{g}{A}$ para um observador em repouso na carroçaria do caminhão acelerado, como ilustrada na Fig. 6.4 (b).

Observação 1: Se se aplicar a transformação (6.1) entre os referenciais S e S', teria: $x'(t) = x(t) - x_{O'}(t)$, onde $x_{O'}(t)$ é a posição da origem O' do referencial S' num

dado instante t. Como $x_{O'}(t) = v_0\,t + \frac{1}{2}\,A\,t^2$, segue o resultado $x'(t) = -\frac{1}{2}\,A\,t^2$, que coincide com o obtido, resolvendo-se as equações diferenciais do movimento em S'.

Observação 2: O fato do observador em repouso no referencial acelerado, S' (carroçaria do caminhão acelerado neste problema), ver uma trajetória retilínea, pode ser compreendido se se considerar que a "vertical" para esse observador está inclinado de um ângulo $\theta = \text{arctg}\,\frac{A}{g}$ em relação à direção de $\mathbf{g}$. Então, uma partícula abandonada em repouso, cai seguindo esta "vertical", com aceleração resultante de módulo $\sqrt{g^2 + A^2}$. Assim, o efeito da aceleração constante do referencial, neste problema, foi o de mudar a direção da vertical para um observador que está em repouso nesse referencial. Como enfatizado antes, a trajetória para um observador que está em repouso num referencial inercial é diferente daquela vista por um observador em repouso num outro referencial, particularmente naquele que está acelerado em relação ao primeiro. Entretanto, no último caso, não se trata de diferentes curvas de uma mesma família de soluções, pois, as equações diferenciais do movimento não são as mesmas nos dois referenciais.

Neste ponto, é bom chamar a atenção do leitor que *as forças resultantes*, que aparecem na segunda lei de Newton, *envolvem apenas aquelas que proveêm de entidades físicas*, como força gravitacional, por exemplo, que é devida à presença de partículas com massas. Trata-se, obviamente, da segunda lei de Newton utilizada num *referencial inercial*. Portanto, as forças inerciais não aparecem para um observador que está em repouso em um referencial inercial. É possível que Newton tenha escolhido os referenciais inerciais, ao enunciar a sua segunda lei, para poder lidar somente com as forças oriundas de entidades físicas. Contudo, *as forças inerciais* (incluindo as que aparecem num referencial em rotação) *existem para um observador que está num referencial não inercial*.

Note que *não se deve misturar referenciais diferentes* quando se discute um movimento de uma partícula. *Deve-se fixar apenas em um e sempre ter em mente qual referencial está em uso*. As equivalências das descrições entre dois observadores em referenciais distintos podem ser estabelecidas pelas equações de transformação de um referencial a outro, *se não houver impedimento*. Portanto, nunca esqueça de enfatizar em que referencial o movimento está sendo discutido.

Exemplo 6.3 Um plano, inclinado de um ângulo α com a horizontal, foi montado sobre um carrinho que está em um movimento horizontal com aceleração constante $\mathbf{A}$, numa região onde a aceleração da gravidade é vertical e vale $\mathbf{g}$. Um bloco de massa m movimenta-se sem atrito neste plano inclinado, como mosta a Fig. 6.5. Sabendo-se que, inicialmente, o bloco estava em repouso na origem do referencial fixo no plano inclinado, discutir os possíveis movimentos em relação a esse referencial em função de $A = |\mathbf{A}|$, $g = |\mathbf{g}|$ e α. Supor que o contato entre o bloco e o plano inclinado é mantido durante o movimento.

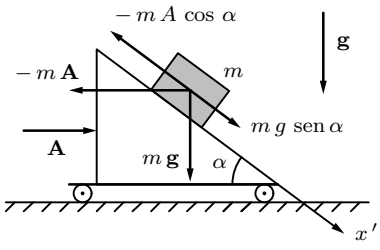

Fig. 6.5:

Solução: Já que o contato entre o bloco e o plano inclinado é mantido, considere o movimento unidimensional ao longo do eixo x' (mostrado na figura 6.5) do aludido referencial fixo no plano inclinado. Aqui, as forças que agem sobre o bloco são: o peso $m\,\mathbf{g}$ e a força inercial $-\,m\,\mathbf{A}$. Elas podem ser decompostas na direção do eixo x' e estão ilustradas na Fig. 6.5. A componente da equação (6.6) adaptada a esta situação é:

$$m\,\ddot{x}' = m\,g\,\mathrm{sen}\,\alpha - m\,A\,\cos\,\alpha\,.$$

Esta equação fica independente de m após o seu cancelamento, ou seja,

$$\ddot{x}' = g\,\mathrm{sen}\,\alpha - A\,\cos\,\alpha\,. \tag{6.7}$$

Se α e A forem tais que a condição $A = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ esteja satisfeita, então, $\ddot{x}' = 0$. Nessa situação, a solução de (6.7) é $x'(t) = C + D\,t$. As condições iniciais $x'(0) = \dot{x}'(0) = 0$ aplicadas a esta solução, resultam em: $C = D = 0$. Com isso, a equação horária do movimento é $x'(t) = 0$, para qualquer $t \geq 0$, e o bloco vai permanecer em repouso na origem do referencial fixo no plano inclinado. Por outro lado, a solução da equação (6.7) é: $x'(t) = C' + D'\,t + \dfrac{1}{2}\,(g\,\mathrm{sen}\,\alpha - A\,\cos\,\alpha)\,t^{\,2}$, se $A > g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Impondo-se as condições iniciais, obtém-se: $C' = D' = 0$. A equação horária é, agora,

$$x'(t) = \frac{1}{2}\,(g\,\mathrm{sen}\,\alpha - A\,\cos\,\alpha)\,t^{\,2}\,. \tag{6.8}$$

Como $g\,\mathrm{sen}\,\alpha - A\,\cos\,\alpha < 0$, o bloco move-se para cima, isto é, sobe o plano inclinado. Finalmente, se $A < g\,\mathrm{tg}\,\alpha$, então, a solução de (6.7) terá a mesma expressão do caso anterior, isto é, de (6.8); mas, desta vez, $g\,\mathrm{sen}\,\alpha - A\,\cos\,\alpha > 0$ e o bloco move-se para baixo, ou seja, desce o plano inclinado. A componente da força resultante perpendicular ao plano inclinado (direção do eixo dos y') não foi considerada na resolução deste problema. Pense o porquê. Como exercício, será deixado para o leitor obter a reação do plano inclinado sobre o bloco em termos de g, A e α.

Observação: Num referencial inercial fixo no plano horizontal, fora do plano inclinado, as forças existentes são: o peso, $m\,\mathbf{g}$, e a força normal sobre o bloco, $\mathbf{N}$, que o plano inclinado exerce. Tomando-se o eixo dos x na direção horizontal no sentido da aceleração $\mathbf{A}$ e o eixo dos y na vertical com o sentido positivo para cima, as componentes

da equação diferencial do movimento nas direções Ox e Oy são:

$$m\,\ddot{x} = N\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$\text{e} \qquad m\,\ddot{y} = -\,m\,g + N\,\cos\,\alpha\,,$$

sendo N a magnitude do vetor $\mathbf{N}$. Os movimentos nas direções x e y são vinculados devido à condição que o bloco e o plano inclinado mantêm-se em contato durante o movimento. Este vínculo é expresso pela equação da reta, que representa a intersecção do plano inclinado com o plano xy:

$$y - y_{O'} = -\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(x - x_{O'})\,, \tag{6.9}$$

onde $(x_{O'}, y_{O'})$ são as coordenadas da origem do referencial S', fixo no plano inclinado, tendo $y_{O'} =$ constante e $x_{O'}$, dependente do tempo, dada por:

$$x_{O'} = \frac{1}{2}\,A\,t^{\,2} + V_{O'}\,t + X_{O'}\,.$$

Aqui, $V_{O'}$ e $X_{O'}$ são, respectivamente, a velocidade e a posição de O' no instante inicial. Dessa forma, (6.9) representa um plano em movimento acelerado na direção do eixo dos x. Calculando-se a segunda derivada de (6.9), obtém-se:

$$\ddot{y} + \,\mathrm{tg}\,\alpha\,\ddot{x} = A\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Multiplicando-se a primeira equação diferencial do movimento, do final da página anterior, por $\mathrm{tg}\,\alpha$ e adicionando-se à segunda, resulta em:

$$m(\ddot{y} + \,\mathrm{tg}\,\alpha\,\ddot{x}) = m\,A\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\,m\,g + \frac{N}{\cos\,\alpha}\,,$$

ou seja,

$$N = m\,(g\,\cos\,\alpha + A\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,.$$

Substituindo-se na primeira equação diferencial do movimento, chega-se a:

$$\ddot{x} = (g\,\cos\,\alpha + A\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,$$

cuja solução é:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,(g\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha + A\,\mathrm{sen}^{\,2}\alpha)\,t^{\,2} + V_{O'}\,t + X_{O'}\,.$$

Subtraindo-se $x_{O'}$ deste resultado e substituindo-se em (6.9), obtém-se:

$$y = y_{O'} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(g\,\mathrm{sen}\,\alpha - A\,\cos\,\alpha)\,t^{\,2}\,,$$

cujo detalhe da álgebra será deixado para o leitor verificar. Este resultado pode ser também obtido diretamente se substituir a expressão de N na segunda equação diferencial do movimento, da página anterior. É recomendado ao leitor fazer a transformação para S' para verificar se reproduz o resultado obtido naquele referencial. Para saber se

o bloco sobe ou desce o plano inclinado, deve-se examinar se y aumenta ou diminui em relação a $y_{O'}$. Isto é feito examinando-se o fator $g \operatorname{sen}\alpha - A \cos\alpha$, como foi no caso do referencial S'. Note que, a descrição desse movimento foi possível também num referencial inercial. Entretanto, nem sempre é fácil lidar com as forças que aparecem no problema, principalmente se envolver vínculos dependentes de tempo (plano inclinado em movimento acelerado neste exemplo). A resolução para o caso que se considera os eixos dos x e dos y nas direções paralela e perpendicular, respectivamente, ao plano inclinado será deixada como exercício para o leitor. Este exemplo ilustra um caso que o uso de um referencial não inercial é muito mais conveniente. Existem situações onde a dificuldade de se considerar as forças envolvidas, num referencial inercial, é enorme.

Exemplo 6.4 Uma plataforma horizontal foi montada na carroçaria de um caminhão movendo-se numa estrada retilínea com aceleração constante **A**. Uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ foi presa horizontalmente nessa plataforma, conforme ilustrado na Fig. 6.6. Tomando-se o cuidado que não a estique nem a comprima, fixou-se um bloco de massa m, na outra extremidade dessa mola, e foi abandonada em repouso. Descreva o movimento desse bloco em relação ao referencial fixo no caminhão, desprezando-se a massa da mola e o atrito entre o bloco e a plataforma.

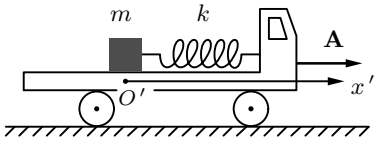

Fig. 6.6:

Solução: Considere a posição de abandono do bloco como sendo a origem O' do referencial fixo no caminhão. Considere, também, um eixo $O'x'$, cujo sentido positivo é dirigido no sentido da aceleração, conforme esquematizado na Fig. 6.6. A versão unidimensional da equação (6.6) para esta situação é:

$$m\,\ddot{x}' = -\,k\,x' - m\,A\,, \tag{6.10}$$

onde $-\,k\,x'$ é a força de restituição da mola e x', a sua elongação. Reescrevendo esta equação como:

$$m\,\ddot{x}' + k\,x' = -m\,A\,,$$

ela é uma equação linear não homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução[3] é:

$$x'(t) = C\,\cos\omega_0\,t + D\,\operatorname{sen}\omega_0\,t - \frac{m\,A}{k}\,,$$

com $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ sendo a freqüência angular natural do oscilador harmônico simples (sistema massa mola deste problema), C e D são constantes arbitrárias. Ao impor uma das condições iniciais, $x'(0) = 0$, obtém-se: $C = \dfrac{m\,A}{k}$; ao passo que a outra

[3]Ver Apêndice B do volume 1.

condição inicial, $\dot{x}'(0) = 0$, leva a: $D = 0$. Assim, a equação horária da posição do bloco em estudo é dada por:

$$x'(t) = \frac{m\,A}{k}\left(\cos\omega_0\,t - 1\right). \tag{6.11}$$

Este resultado mostra que o bloco oscila no domínio $-\dfrac{2\,m\,A}{k} \leq x' \leq 0$. Em particular, se $\bar{t} = \dfrac{\pi}{2\,\omega_0}$, tem-se: $x'(\bar{t}) = -\dfrac{m\,A}{k}$. Qual o significado de $-\dfrac{m\,A}{k}$? Substituindo-se x' por $-\dfrac{m\,A}{k}$ em (6.10), resulta em $\ddot{x}' = 0$, o que significa que a aceleração do bloco nesta posição é nula. Também, se as condições iniciais fossem $x'(0) = -\dfrac{m\,A}{k}$ e $\dot{x}'(0) = 0$, teriam: $x'(0) = C - \dfrac{m\,A}{k} = -\dfrac{m\,A}{k}$ e $\dot{x}'(0) = \omega_0\,D = 0$, de onde obtêm-se $C = 0$ e $D = 0$. Assim, $x'(t) = -\dfrac{m\,A}{k}$. De todas essas discussões, conclui-se que $-\dfrac{m\,A}{k}$ é a nova posição de equilíbrio. Com a transformação $\xi = x' + \dfrac{m\,A}{k}$, (6.11) torna-se:

$$\xi(t) = \frac{m\,A}{k}\,\cos\omega_0\,t\,.$$

Dessa forma, o bloco oscila com amplitude $\dfrac{m\,A}{k}$ na vizinhança da nova posição de equilíbrio. Portanto, a posição $-\dfrac{m\,A}{k}$ é o seu centro de oscilação. Observe que isto é semelhante ao movimento da partícula quando se instala um sistema massa mola na posição vertical num campo de gravidade g e todas as discussões acima são válidas, com a diferença que aparece g em vez de A nas equações acima.

Exemplo 6.5 Considere uma plataforma plana e horizontal sendo acelerada para a direita com uma aceleração constante, $\mathbf{A}$. Uma partícula é lançada da origem do sistema de eixos fixos na plataforma, com uma velocidade cujo módulo é v_0, formando um ângulo θ com a direção da aceleração (eixo x'), conforme ilustrado na Fig. 6.7. Supondo que não há atrito entre a plataforma e a partícula, as duas equações oriundas da decomposição de (6.6) segundo as componentes nas direções dos eixos x' e y' ficam, respectivamente:

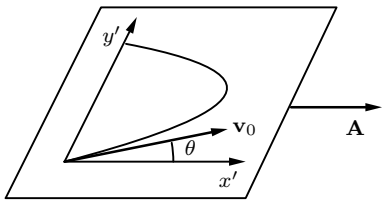

Fig. 6.7:

$$m\,\ddot{x}' = -\,m\,A$$

$$\text{e} \qquad m\,\ddot{y}' = 0\,,$$

onde m é a massa da partícula. As condições iniciais para estas equações são: $x'(0) = 0$, $\dot{x}'(0) = v_0\,\cos\theta$, $y'(0) = 0$ e $\dot{y}'(0) = v_0\,\operatorname{sen}\theta$. Cancelando-se m, a primeira equação torna-se $\ddot{x}' = -A$ e a solução geral é: $x'(t) = B\,t + C - \dfrac{1}{2}\,A\,t^2$, onde B e C são

constantes de integração. A primeira das condições iniciais leva a: $C = 0$; a segunda, a $B = v_0 \cos\theta$. Então, a solução da primeira equação diferencial é:

$$x'(t) = (v_0 \cos\theta)\, t - \frac{1}{2}\, A\, t^2 .$$

A segunda equação diferencial pode ser reescrita como: $\ddot{y}' = 0$. A sua solução geral é: $y'(t) = B'\, t + C'$. Obtém-se ao aplicar as duas últimas condições iniciais: $B' = v_0 \operatorname{sen}\theta$ e $C' = 0$. Portanto, a solução da segunda equação diferencial do movimento é:

$$y'(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\, t .$$

Então, o movimento composto tem aceleração uniforme dirigida para o sentido negativo da direção do eixo x', e tem velocidade constante dirigida para o sentido positivo da direção do eixo y'. A equação da trajetória pode ser obtida eliminando-se t da segunda equação horária, isto é, $t = \dfrac{y'}{v_0 \operatorname{sen}\theta}$, e, substituindo-se na primeira equação horária. O resultado é:

$$x' = (\operatorname{cotg}\theta)\, y' - \frac{A}{2\, v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, y'^2 ,$$

que é equação de uma parábola que passa pela origem, no plano $x'y'$, conforme ilustrado na mesma Fig. 6.7. Note que este é, fisicamente, o mesmo resultado quando se estuda a trajetória de uma partícula lançada numa região onde a força de atração da gravidade é $m\, g$, em módulo. Verifique como exercício. Também, a determinação da trajetória vista de um observador em repouso num referencial inercial fixo fora da plataforma será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 6.6 Um vagão está em um movimento acelerado com aceleração constante de módulo A, na direção horizontal, numa região onde a aceleração da gravidade, g, é vertical e dirigida para baixo. Prende-se uma das extremidades de um fio ideal (inextensível e perfeitamente flexível) no teto do vagão e uma partícula de massa m na outra extremidade. Suponha que, depois disso, o comprimento efetivo do fio seja ℓ. Se se soltar a partícula bem devagar, ela fica em equilíbrio. Determine esta posição de equilíbrio em termos de A e g. O fio é cortado com a partícula em equilíbrio. Qual será a trajetória do seu movimento após o corte do fio?

Solução: O sistema massa-fio é um pêndulo. Considerando-se um referencial fixo no vagão, as forças que agem sobre a partícula são: $m\,\mathbf{g}$ e $-\,m\,\mathbf{A}$ e a tração do fio, $\mathbf{T}$. A Fig. 6.8 (a) é um esboço da porção do vagão acelerado que interessa, onde as forças envolvidas estão esquematizadas. Como $m\,\mathbf{g}$ e $-\,m\,\mathbf{A}$ são perpendiculares, a intensidade da força resultante sobre a partícula, $\mathbf{F}_R$, é dada, simplesmente, pelo teorema de Pitágoras, isto é, $F_R = m\sqrt{g^2 + A^2}$ (a regra usual do paralelogramo, de adição de vetores, foi utilizada aqui). Esta força resultante é equilibrada pela tração $\mathbf{T}$ devido ao fio, que deve ser de mesma intensidade e sentido contrário a $\mathbf{F}_R$. A direção de $\mathbf{F}_R$ forma um ângulo ϕ com a vertical dado por: $\phi = \operatorname{arctg}\dfrac{A}{g}$. O sentido é

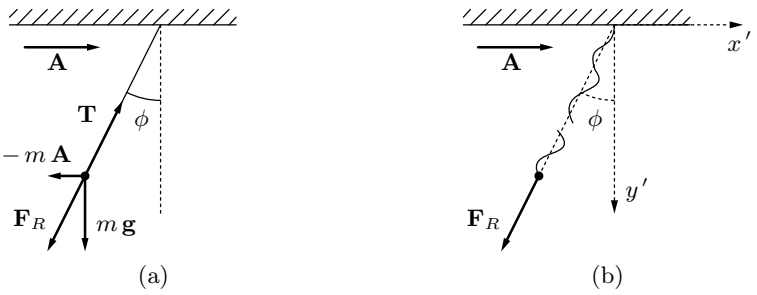

Fig. 6.8:

o indicado na Fig. 6.8 (a). Note que, na posição de equilíbrio, é possível determinar a intensidade da aceleração do vagão por meio da medida do ângulo formado entre a vertical e esse pêndulo. A Fig. 6.8 (b) mostra o momento que o fio foi cortado. Neste instante, a tração $\mathbf{T}$, do fio, deixou de existir e a partícula está, agora, sob a ação apenas da força resultante $\mathbf{F}_R$. Segundo as componentes ao longo dos eixos x' e y' da Fig. 6.8 (b), a equação (6.6) torna-se um par de equações diferenciais:

$$\ddot{x}' = -A$$

e

$$\ddot{y}' = g\,.$$

Ora, este par de equações são as mesmas do exemplo 6.2, a menos do sinal da segunda devida à diferença na orientação do eixo y'. Então, a partícula passa a se movimentar na direção e sentido da força resultante, $\mathbf{F}_R$, numa trajetória retilínea, com a aceleração resultante de módulo $\sqrt{A^2 + g^2}$.

Exemplo 6.7 Considere novamente o pêndulo do vagão do exemplo 6.6. Em vez de ser na posição de equilíbrio, a partícula é, agora, abandonada em repouso na posição verticalmente abaixo do ponto de suspensão, que dista ℓ do teto. Qual será o movimento subseqüente do pêndulo?

Solução: Considere um eixo x' que parte do ponto de suspensão do pêndulo, orientada para a direção do seu equilíbrio, formando um ângulo ϕ com a vertical, como mostra a Fig. 6.9. A partícula vai descrever uma trajetória representado por um arco de circunferência. Tomando-se o eixo x' como o polar e os vetores unitários adequados para coordenadas polares como indicados na mesma figura, pode-se projetar as forças segundo estas direções. As forças sobre a partícula são as indicadas na Fig. 6.8 (a), ou seja, $m\,\mathbf{g}$, $-m\,\mathbf{A}$ e a tração no fio, $\mathbf{T}$. Note que numa posição angular genérica, φ, do pêndulo, a tração $\mathbf{T}$ não coincide com a tração na posição de equilíbrio, como é evidente pela Fig. 6.9. Nessa figura, $m\,\mathbf{g}$ e $-m\,\mathbf{A}$ não estão desenhadas, mas $\mathbf{F}_R$, que é a resultante

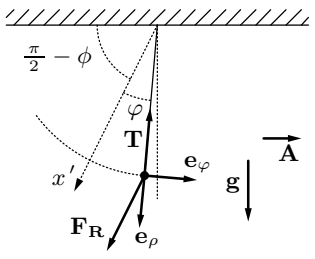

Fig. 6.9:

dessas duas, está. Nessas coordenadas polares, as equações de movimento são, então,

$$m(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^{\,2}) = m\,g\,\cos(\phi - \varphi) + m\,A\,\mathrm{sen}(\phi - \varphi) - T$$

e $$m(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}) = m\,g\,\mathrm{sen}(\phi - \varphi) - m\,A\,\cos(\phi - \varphi)\,.$$

Dividindo-se essas equações por m e levando-se em conta que $\rho = \ell = \text{constante}$, a segunda equação torna-se:

$$\begin{aligned}\ell\,\ddot{\varphi} &= g\,\mathrm{sen}(\phi - \varphi) - A\,\cos(\phi - \varphi) = \\ &= g\,\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\,\varphi - g\,\cos\,\phi\,\mathrm{sen}\,\varphi - A\,cos\,\phi\,\cos\,\varphi - A\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\varphi = \\ &= -\,(g\,\cos\,\phi + A\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\mathrm{sen}\,\varphi + (g\,\mathrm{sen}\,\phi - A\,\cos\,\phi)\cos\,\varphi\,.\end{aligned}$$

De acordo com o resultado do exemplo 6.6, $g\,\mathrm{sen}\,\phi = A\,\cos\,\phi$. Então, o segundo termo do membro direito é nulo e a equação resultante fica:

$$\ddot{\varphi} = -\,\frac{\sqrt{g^{\,2} + A^{\,2}}}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,$$

que é a equação de movimento de um pêndulo simples. Aqui, foi utilizado o fato que: $\cos\,\phi = \dfrac{g}{\sqrt{g^{\,2} + A^{\,2}}}$ e $\mathrm{sen}\,\phi = \dfrac{A}{\sqrt{g^{\,2} + A^{\,2}}}$. Do resultado acima, conclui-se que a partícula oscilará com amplitude angular ϕ em torno do eixo x' (que, como antes, pode ser interpretado como a direção da nova vertical para um observador no vagão), com uma freqüência angular $\omega_0^2 = \dfrac{\sqrt{g^{\,2} + A^{\,2}}}{\ell}$. A determinação da expressão que fornece a tração no fio em função do ângulo φ será deixada para o leitor como exercício.

Os exemplos 6.2 a 6.7 mostraram que, em um referencial acelerado com aceleração constante, os fenômenos observados são idênticos àqueles que ocorrem sob uma força gravitacional constante. Foi suposto implícita ou explicitamente que, nesses exemplos, os observadores em referencial S e em S' sabiam que S' era acelerado em relação a S e tinham conhecimento da aceleração da gravidade $\mathbf{g}$. Portanto, sabiam distinguir as direções vertical e horizontal em relação à superfície da Terra. Dessa forma, eles podiam distinguir entre a força peso ($m\,\mathbf{g}$) e a força inercial ($-\,m\,\mathbf{A}$). Mas, suponha que o referencial S' estivesse no interior de uma cabine hermética, com excelentes isolamentos acústicos e mecânicos. Um observador no interior desta cabine não pode ver o exterior e, portanto, não tem acesso a qualquer referencial que esteja fixado no exterior desta cabine. Será que este observador é capaz de distinguir entre a força peso e a força inercial apenas com observações e medidas efetuadas no interior da cabine? A resposta é não, pelo fato que os procedimentos de medida para ambas as forças são as mesmas. E, também, tanto a força inercial quanto a força peso

é proporcional à massa do corpo em estudo, o que mostra que um referencial acelerado e uma atração gravitacional têm o mesmo efeito sobre o corpo em estudo. Além disso, ambas as forças agindo sobre esse corpo podem ser descritas como proveniente de um campo de acelareção $\mathbf{a}$. Nessa descrição, a força que age sobre qualquer corpo em movimento na região desse campo é simplesmente $m\,\mathbf{a}$, e, não há necessidade de se fazer distinção se a força é de origem cinemática ou se é devido à presença de um outro corpo qualquer na vizinhança. Em outras palavras, não importa se o campo de aceleração $\mathbf{a}$ é proveniente de um referencial acelerado ou é proveniente de um campo gravitacional ($\mathbf{g}$). Note que, em ambos os casos, $\mathbf{a}$ não é necessariamente constante. Mais ainda, a equivalência "exata" entre as massas inercial e gravitacional, tanto quanto foi possível constatar experimentalmente, levou a uma identidade "exata" entre as forças inercial e gravitacional. Isso levou Einstein a considerar que não há uma distinção física entre ambas as forças, pelo menos em uma região limitada do espaço, o que levou ele a formular o princípio da equivalência. Prosseguindo sob esta hipótese, Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral.

Exercícios

6.1) Os exemplos dados nesta secção dão subsídios teóricos para construir um acelerômetro (instrumento para medir aceleração). Explique o mecanismo deste instrumento e mostre como se mede a aceleração de um referencial[4].

6.2) Um homem, cuja massa é $80\,\mathtt{kg}$, entra num elevador e sobe numa balança que ele levou. O elevador parte com a aceleração de $1\,\mathtt{m/s^2}$ e a mantém até o terceiro andar[5]. A partir daí, continua subindo com velocidade constante até o oitavo andar, quando começa a desacelerar na razão de $1\,\mathtt{m/s^2}$ até parar no décimo. Diga as leituras da balança que esse homem terá a respeito do seu peso nos diversos trechos durante o movimento de ascensão do elevador. Suponha que a balança esteja calibrada em newton. Use $g = 10\,\mathtt{m/s^2}$.

6.3) No problema anterior, quais seriam as leituras se o movimento fosse descendente, em vez de ascendente, num esquema semelhante de aceleração e desaceleração?

6.4) Considere o sistema do exemplo 6.3. Suponha que, agora, existe um atrito entre o bloco e o plano inclinado com coeficiente de atrito estático igual a μ. A magnitude da aceleração $\mathbf{A}$ é aumentada gradualmente até o bloco, inicialmente em repouso em relação ao plano inclinado, começar a escorregar para cima.

   a) Esboce as forças agindo sobre o bloco em relação ao referencial não inercial, fixo no plano inclinado.

   b) Determine a magnitude da aceleração $\mathbf{A}$, no instante que o bloco começa a escorregar.

[4] Obviamente, isto só tem sentido quando se sabe que se trata de um referencial acelerado.
[5] A contagem do andar começa com Térreo, primeiro andar, segundo andar etc.

c) Esboce as forças agindo sobre o bloco em relação a um *referencial inercial* fixo no solo.

6.5) Um passageiro num avião retirou a sua gravata e deixou-a pendurada entre os seus dedos. Ele observou que durante o movimento de decolagem, que durou 30 s, a gravata formava um ângulo de 15^o com a vertical.

a) Qual a velocidade do avião no instante que decolou da pista? (Lembre que o avião parte do repouso e entra em movimento acelerado para decolar.)

b) Qual a distância percorrida na pista até decolar?

6.6) Um trem está movendo-se com uma velocidade constante de 20 m/s. Ao aproximar de uma estação, o maquinista diminui a velocidade a uma razão constante e o trem para após percorrer uma distância de 100 m. Um copo com água está sobre uma mesa do vagão restaurante. Qual o ângulo que a superfície da água do copo forma com a horizontal antes do trem parar?

6.7) No mesmo trem do problema anterior, num outro vagão, um passageiro havia deixado uma mala de 10 kg no corredor. Ao iniciar a frenagem, ela começa a deslizar. Supondo que o coeficiente de atrito cinético entre a mala e o corredor é $\mu = 0,15$, determine a velocidade da mala no instante que o trem parou. Mesmo com o trem parado, a mala ainda desliza uma certa distância adicional pelo corredor. Determine a distância total percorrida pela mala até ela parar.

6.8) Um elevador está em movimento descendente com aceleração A, de valor absoluto menor que o de g. No teto desse elevador, fixou-se uma roldana de massa e atrito desprezíveis, de maneira que o plano que a contém seja vertical. Amarrados nas extremidades de uma corda, de comprimento ℓ, perfeitamente flexível e de massa desprezível, dois corpos de massas m e $3\,m$ foram pendurados passando pela roldana (este arranjo é chamado máquina de Atwood).

a) Determine as acelerações do movimento dos dois corpos em relação ao referencial fixo no elevador.

b) Esboce as forças que agem sobre os dois corpos. Determine também a força que a roldana exerce sobre o ponto de sua fixação no teto do elevador.

c) Como um observador no elevador pode explicar a aceleração adquirida pelo corpo de massa m, dispondo de uma medida de força exercida sobre ele por meio de um dinamômetro?

6.9) Um corpo de massa m é pendurado no teto de um elevador por uma corda que suporta um peso máximo P. Quando o elevador começa a subir, a corda se rompe. Qual a aceleração mínima do elevador?

6.10) Num vagão, inicialmente em repouso, um corpo de 6 kg foi pendurado do teto por uma mola de comprimento 0,5 m e de constante elástica 10 N/cm. Aplica-se uma aceleração de $5\,\mathrm{m/s^2}$ no vagão. De quanto a mola estica? Em que direção? Considere a massa da mola desprezível e $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

6.11) Quando um corpo é imerso num fluido, ele está sujeito à força peso e ao *empuxo*. Empuxo é a força que um fluido exerce sobre um corpo nele mergulhado e é igual, em módulo, ao peso do volume desse fluido deslocado (princípio de Arquimedes). Isto vale também num referencial acelerado se considerar um peso efetivo como resultante de $m\,\mathbf{g}$ mais a força inercial $-\,m\,\mathbf{A}$, sendo $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade e $\mathbf{A}$ a aceleração do referencial. Considere, então, um frasco contendo água, onde se mergulha uma rolha.

a) Se abandonar o frasco de uma certa altura, a partir do repouso, qual o empuxo exercido sobre a rolha durante a queda, em relação ao referencial do frasco?

b) Se a rolha estava no fundo do frasco antes de ser abandonado, discuta o movimento da rolha em relação ao frasco.

c) Esse frasco é colocado numa mesa de um vagão de trem que está se movendo com uma aceleração $\mathbf{A}$ na direção horizontal. Determine o empuxo sofrido pela rolha, no referencial do trem.

d) Considere, agora, essa rolha atada no fundo do frasco com um fio de certo comprimento, mas suficientemente curto para que a rolha fique submersa na água. Em relação ao referencial do trem, discuta a posição de equilíbrio da rolha, em relação àquela que seria se o trem não estivesse acelerado.

6.2 Movimento num Referencial em Rotação

Considere um referencial inercial S com os três eixos $O\,x_1$, $O\,x_2$ e $O\,x_3$. Considere também um referencial S' com os eixos $O'\,x'_1$, $O'\,x'_2$ e $O'\,x'_3$. Suponha que a origem O' de S' coincide com a de S, isto é, com O, e que S' esteja em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, em relação a S, ao redor de um eixo $\overline{O\,Q}$, conforme ilustrado na Fig. 6.10. Na secção anterior, foram obtidas transformações cinemáticas entre os vetores de posição, velocidade e aceleração de um ponto P, quando se passa de um referencial inercial para um referencial acelerado. Agora, em vez disso, transformações cinemáticas dessas mesmas grandezas entre um referencial S' em rotação com relação a um referencial inercial S são necessárias. Para obtê-las, é necessário determinar a transformação da derivada de um vetor quando se passa de um referencial inercial para referencial em rotação. Então, considere um vetor $\mathbf{A}$ *que é constante em*

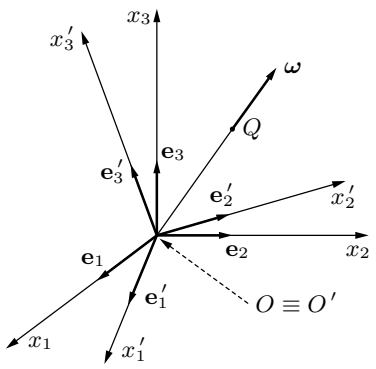

Fig. 6.10:

relação ao referencial S'. Esse mesmo vetor executa uma rotação ao redor do eixo $\overline{OQ}$ em relação ao referencial S, mas tem módulo constante ($|\mathbf{A}| = \text{constante}$). Por enquanto, suponha que $\mathbf{A}$ tenha sua cauda[6] fixa na origem; para simplificar o raciocínio. Nestas condições, a sua ponta descreve uma circunferência com centro no eixo $\overline{OQ}$, que forma a base de um cone cujo vértice está na sua cauda, conforme ilustração da Fig. 6.11. Considere também $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \overline{OQ}\,\mathbf{n} = (\mathbf{n}\times\mathbf{A})\times\mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$. O vetor auxiliar $\mathbf{B}$ definido assim é perpendicular ao vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e está contido no plano da circunferência descrita pela ponta do vetor $\mathbf{A}$. No referencial S, o vetor $\mathbf{A}$ varia de $\mathbf{A}(t)$ para $\mathbf{A}(t+\Delta t)$ num intervalo de tempo Δt. Esta variação, que será denotada por $\Delta\mathbf{A}$, pode ser expressa também como diferença de $\mathbf{B}$ nos instantes t e $t+\Delta t$, isto é,

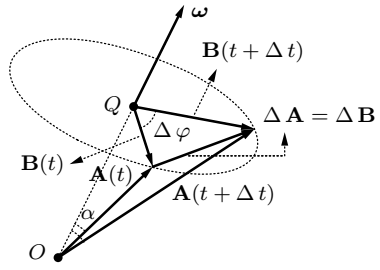

Fig. 6.11:

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t) = \mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t) = \Delta\mathbf{B}\,.$$

Note que a ponta do vetor $\mathbf{B}(t)$ varre a mesma circunferência varrida pela ponta de $\mathbf{A}(t)$. Como $\big|\mathbf{A}\big|$ e $\big|\mathbf{B}\big|$ são constantes e $\big|\mathbf{B}\big| = \big|\mathbf{n}\times\mathbf{A}\big| = A\,\mathrm{sen}\,\alpha$ por construção, tem-se:

$$\Delta\mathbf{A} \approx \mathbf{n}\times\mathbf{A}\,\Delta\varphi \tag{6.12}$$

para Δt pequeno. Aqui α é o ângulo formado pelos vetores $\boldsymbol{\omega}$ (ou $\mathbf{n}$) e $\mathbf{A}$; $\Delta\varphi$, o ângulo varrido pelo $\mathbf{B}$ durante o intervalo considerado. A equação (6.12) provém do fato que, quando Δt é pequeno, $\big|\Delta\mathbf{B}\big|$ e, portanto, $\big|\Delta\mathbf{A}\big|$ deve ser aproximadamente igual ao arco de circunferência varrido pela ponta de $\mathbf{B}$ (e, portanto, pela ponta de $\mathbf{A}$). Divindo-se ambos os membros de (6.12) por Δt e tomando-se o limite $\Delta t \to 0$, obtém-se:

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}\,, \tag{6.13}$$

onde, $\dfrac{d\,\varphi}{d\,t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ foi identificado como o módulo do vetor velocidade angular, ω. Com isso, $\omega\,\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}$ e segue-se a equação (6.13).

[6] A fim de evitar a confusão que a palavra *origem* pode gerar quando se usa os termos *origem do referencial* e *origem do vetor* próximos um do outro, a última será chamada *cauda* do vetor neste livro. Assim, a distinção torna-se clara e facilita a redação. Pelo motivo análogo, a *extremidade* do vetor será chamada *ponta* do vetor.

Para a dedução da derivada de um vetor $\mathbf{A}$ que *não* tem cauda fixa na origem, considere dois vetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ que têm suas caudas fixas na origem de tal maneira que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{B}\,.$$

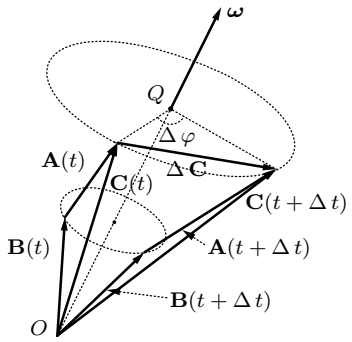

Fig. 6.12:

Suponha que todos esses três vetores sejam constantes no referencial S'. No referencial S, todos eles têm módulos constantes, mas executam rotação ao redor do eixo $\overline{OQ}$, como ilustrado na Fig. 6.12. Então, a variação do vetor $\mathbf{A}$ durante um intervalo de tempo Δt é:

$$\begin{aligned}\Delta\,\mathbf{A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t) = \big[\mathbf{C}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t+\Delta t)\big] - \big[\mathbf{C}(t) - \mathbf{B}(t)\big] = \\ = \big[\mathbf{C}(t+\Delta t) - \mathbf{C}(t)\big] - \big[\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)\big] = \Delta\,\mathbf{C} - \Delta\,\mathbf{B}\,,\end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta\,\mathbf{A} = \Delta\,\mathbf{C} - \Delta\,\mathbf{B}\,.$$

Dividindo-se ambos os membros por Δt e tomando-se o limite $\Delta t \to 0$, obtém-se a seguinte relação entre as derivadas:

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t} = \frac{d\,\mathbf{C}}{d\,t} - \frac{d\,\mathbf{B}}{d\,t}\,.$$

Lembrando que $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ têm suas caudas fixas na origem, O, e seus módulos constantes, vale o resultado (6.13) para cada uma das suas derivadas. Assim,

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{C} - \mathbf{B}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\,.$$

Isto mostra que *o resultado* (6.13) *continua valendo, contanto que* $\mathbf{A}$ *tenha módulo constante no referencial* S (*lembrar que* $\mathbf{A}$ *é um vetor constante no referencial* S'), *tendo ou não a cauda fixa na origem.*

No referencial S', considere, agora, uma função vetorial $\mathbf{A}(t)$ *com a cauda fixa na origem.* A sua derivada em relação a t, nesse referencial, é:

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{S'} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta\,t}\right)_{S'}\,, \tag{6.14}$$

conforme a definição (A.1) apresentado no Apêndice A do volume 1. Os vetores $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{A}(t+\Delta t)$ e $\Delta\,\mathbf{A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)$, envolvidos nesta operação, estão ilustrados na Fig. 6.13 (a).

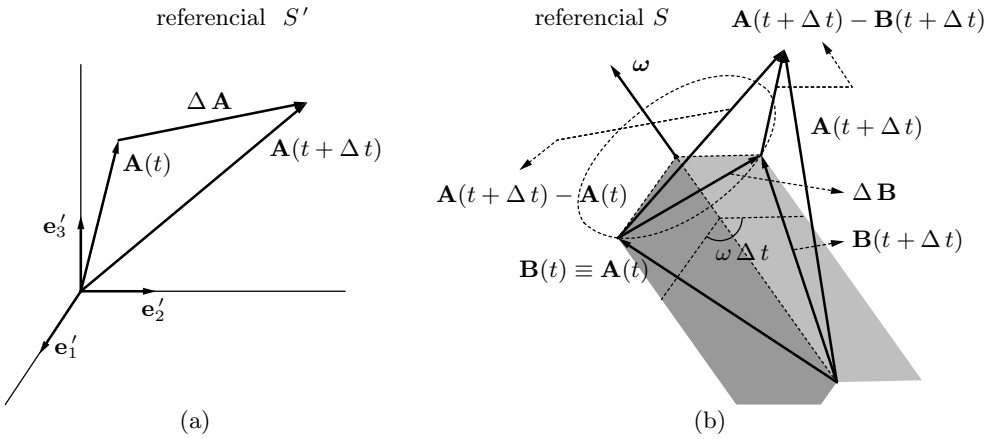

Fig. 6.13:

No referencial S, a derivada em relação a t tem expressão semelhante a (6.14), isto é,

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_S = \left(\lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta\,t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta\,t}\right)_S .$$

Entretanto, em relação ao referencial S, além de variar com t, $\mathbf{A}(t)$ está também executando uma rotação ao redor do mesmo eixo que o referencial S' executa sua rotação em relação ao referencial S. Para obter uma relação entre $\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_S$ e $\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{S'}$, considere um vetor $\mathbf{B}$ que é constante no referencial S'. No referencial S, ele tem módulo constante mas executa uma rotação ao redor do eixo $\overline{OQ}$, como antes. Suponha, além disso, que $\mathbf{B}$ coincide com $\mathbf{A}$ num dado instante t. Com isso,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t+\Delta\,t)-\mathbf{A}(t) &= \mathbf{A}(t+\Delta\,t)-\mathbf{B}(t+\Delta\,t)+\mathbf{B}(t+\Delta\,t)-\underbrace{\mathbf{A}(t)}_{\equiv\mathbf{B}(t)} = \\ &= \mathbf{A}(t+\Delta\,t)-\mathbf{B}(t+\Delta\,t)+\underbrace{\mathbf{B}(t+\Delta\,t)-\mathbf{B}(t)}_{\approx(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B})\,\Delta\,t}\approx \\ &\approx \mathbf{A}(t+\Delta\,t)-\mathbf{B}(t+\Delta\,t)+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B})\,\Delta\,t\,, \qquad (6.15)\end{aligned}$$

para $\Delta\,t$ pequeno. A Fig. 6.13 (b) mostra a relação entre todos os vetores utilizados até aqui. Qual o significado de $\mathbf{A}(t+\Delta\,t)-\mathbf{B}(t+\Delta\,t)$ que aparece no segundo membro da equação (6.15)? Observe que, no referencial S, o plano que contém $\mathbf{A}(t)$ e o eixo de rotação $\overline{OQ}$ sofreu uma rotação de um ângulo $\omega\,\Delta\,t$ durante o intervalo de tempo $\Delta\,t$, conforme ilustrado na Fig. 6.13 (b)

com áreas sombreadas. Assim, no instante $t + \Delta t$, o plano passa a ser aquele que contém $\mathbf{B}(t + \Delta t)$ e o eixo $\overline{OQ}$. *Então, no referencial* S', $\mathbf{B}(t + \Delta t)$ *é cópia do vetor* $\mathbf{A}(t)$. Portanto, $\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t + \Delta t)$ é exatamente o vetor $\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$ no referencial S'. Então a identidade (6.15) pode ser reinterpretado como:

$$\big[\Delta\,\mathbf{A}\big]_S \approx \big[\Delta\,\mathbf{A}\big]_{S'} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})\,\Delta t\,,$$

onde os índices S e S' nesta expressão indicam $\Delta\,\mathbf{A}$ em relação aos referenciais S e S', respectivamente. Dividindo-se por Δt, tomando-se o limite $\Delta t \to 0$, levando-se em conta (6.14) e, também, que $\mathbf{B}(t) \to \mathbf{A}(t)$ nesse limite, obtém-se:

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_S = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\,, \tag{6.16}$$

conforme as definições das derivadas nos dois referenciais dadas na página anterior. Em outras palavras, a derivada de uma função vetorial de t no referencial S é igual à derivada dessa mesma função vetorial no referencial S' acrescida de uma variação devido à rotação do referencial S' em relação a S.

Utilizando-se a construção da Fig. 6.12 e procedendo-se de maneira análoga à que levou a (6.13), pode ser demonstrado que *o resultado* (6.16) *continua valendo para a função vetorial* $\mathbf{A}(t)$ *que não tem a cauda fixa na origem.*

Nas referências futuras, a equação (6.16) será, também, denotada por:

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{\text{iner}} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\,, \tag{6.17}$$

onde o índice "iner" indica o referencial inercial S e "rot", o referencial S' que está em rotação com relação a S.

Note que se $\mathbf{A}(t)$ for *um vetor que permanece paralelo a* $\boldsymbol{\omega}$, tem-se sempre:

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{\text{iner}} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,t}\right)_{\text{rot}}\,, \qquad \text{quando} \quad \mathbf{A} \parallel \boldsymbol{\omega}\,, \tag{6.18}$$

o que significa que, para qualquer vetor paralelo a $\boldsymbol{\omega}$, a derivada em relação ao tempo calculada no referencial S é igual à calculada no S'. Em particular,

$$\left(\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{d\,t}\right)_{\text{iner}} = \left(\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{d\,t}\right)_{\text{rot}}\,. \tag{6.19}$$

Com a aplicação sucessiva de (6.16) [ou (6.17)], obtém-se uma equação que relaciona a segunda derivada entre os referenciais S e S'. De fato,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)_S &= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_S\right]_S = \left\{\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}\right]\right\}_S = \\ &= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'}\right]_S + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_S\times\mathbf{A} = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'} + \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}\times\left[\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}\right] + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_S\times\mathbf{A} = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)_{S'} + 2\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}) + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_S\times\mathbf{A}\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)_S = \left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)_{S'} + 2\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}) + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{S'}\times\mathbf{A}\,, \quad (6.20)$$

onde (6.19) foi utilizada no último termo.

Um ponto P no espaço pode ser localizado por vetor de posição $\mathbf{r}$ no referencial S. No referencial S', que está em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em relação a S, esse mesmo ponto é localizado pelo vetor de posição $\mathbf{r}'$. Entretanto, $\mathbf{r}'$ coincide com $\mathbf{r}$ porque foi escolhida origem comum para os dois referenciais. Assim, a localização do ponto P pode ser efetuada nos dois referenciais pelo mesmo vetor de posição $\mathbf{r}$. Se uma partícula estiver movendo juntamente com o ponto P, as suas velocidade e aceleração, em relação ao referencial S, podem ser obtidas derivando-se, sucessivamente, o vetor de posição $\mathbf{r}$ em relação a t. Substituindo-se $\mathbf{A}$ por $\mathbf{r}$ em (6.16), obtém-se a relação entre as velocidades em relação aos referenciais S' e S, dada por:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,. \quad (6.21)$$

A velocidade do movimento da partícula em relação a S' é dada somente pelo primeiro termo do membro direito. O segundo termo é a componente rotacional da velocidade quando se observa do referencial S. Da mesma maneira, obtém-se a transformação da aceleração por meio de (6.20):

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_S = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{S'} + 2\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{S'}\times\mathbf{r}\,. \quad (6.22)$$

O primeiro termo do membro direito é a aceleração da partícula em relação ao referencial S'. O último termo (também do membro direito) é uma aceleração que aparece quando a rotação do referencial S' em relação a S não for uniforme. O terceiro termo sempre é perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ e aponta para o eixo de rotação, isto é, para $\boldsymbol{\omega}$ (verifique como exercício) e, por isso, é conhecido como aceleração centrípeta. Finalmente, o segundo termo está relacionado com a aceleração de Coriolis, que será estudada adiante.

Se uma partícula de massa m estiver em movimento sob a ação de uma força resultante $\mathbf{F}$, a segunda lei de Newton pode ser aplicada somente se o referencial for inercial, que no caso é o S. Então, neste referencial, a equação diferencial do movimento dessa partícula é dada por:

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_S = \mathbf{F}\,.$$

Substituindo-se a aceleração pela expressão do membro direito de (6.22), resulta em:

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{S'} + 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'} + m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right) + m\left(\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{S'}\times\mathbf{r} = \mathbf{F}\,.$$

Rearranjando, esta equação toma a forma:

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{S'} = \mathbf{F} - 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'} - m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right) - m\left(\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{S'}\times\mathbf{r}\,. \quad (6.23)$$

Se se interpretar o membro direito desta equação como uma *força efetiva* resultante, (6.23) pode ser reescrita como:

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{S'} = \mathbf{F}_{\text{efetiva}}\,, \quad (6.24)$$

onde

$$\mathbf{F}_{\text{efetiva}} = \mathbf{F} - 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'} - m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right) - m\left(\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{S'}\times\mathbf{r}\,. \quad (6.25)$$

Note que, com esta interpretação, a equação (6.24) tem a mesma forma de uma equação oriunda da segunda lei de Newton. Ou seja, como no caso da secção anterior, chegou-se a uma lei do tipo segunda lei de Newton, que pode ser utilizada diretamente num referencial que está em rotação em relação a um referencial inercial. Observe também que, se $\boldsymbol{\omega} = 0$, o segundo, o terceiro e o quarto termo do membro direito de (6.23) desaparecem e (6.24) volta a ser a equação proveniente da segunda lei de Newton num referencial inercial.

Do segundo ao quarto termo do membro direito de (6.25), são também *as forças inerciais*, mas de naturezas diferentes da força inercial da secção anterior.

O *último termo* do membro direito de (6.25) é uma força que aparece devido à velocidade angular da rotação do referencial S' em relação a S *não* ser constante. Aparentemente, não há interesse algum neste termo, pois, é dificílimo encontrar qualquer comentário sobre ele[7]. É possível que existam pouquíssimos sistemas de interesse (talvez nenhum) na natureza que seja necessário levar em conta a variação da velocidade angular de rotação do referencial S' em relação S. Isto pode significar que considerar $\boldsymbol{\omega}$ constante é uma ótima aproximação na grande maioria das aplicações dos referenciais em rotação.

6.2.1 Força Centrífuga

O terceiro termo do membro direito de (6.25) tem o seu módulo dado por:

$$\left|m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\right| = m\,\omega^2\,r\,\operatorname{sen}\theta\,, \tag{6.26}$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{r}$. Conforme a ilustração da Fig. 6.14 (a), $r\,\operatorname{sen}\theta$ é a distância entre a posição em questão e o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ (ou, pode também pensar como sendo a projeção de $\mathbf{r}$ na direção perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$). Então, interpretando este termo como uma força,

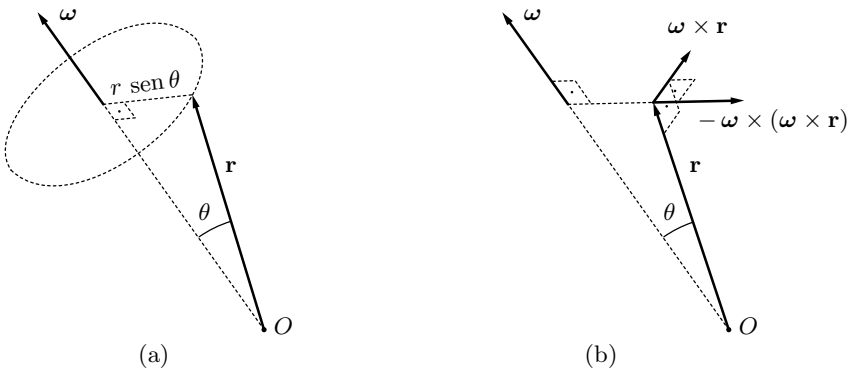

Fig. 6.14:

a sua intensidade cresce à medida que se afasta do eixo de rotação; ou seja, *quanto mais longe do eixo de rotação estiver, maior é a intensidade desta força sobre a partícula.* Se $\mathbf{r}$ for um vetor fixo no referencial S', o ângulo θ entre $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\omega}$ também será fixo e, em relação a S, $r\,\operatorname{sen}\theta$ é o raio do movimento circular

[7]Nenhum estudo deste termo foi encontrado, pelo menos nas referências pesquisadas pelo autor.

da partícula ao redor do eixo de rotação do referencial S' em relação a S. Neste caso, $v_r = \omega\, r\, \mathrm{sen}\,\theta$ é a velocidade escalar da partícula nesse movimento circular ao redor do eixo de rotação. Assim, (6.26) pode ser reescrita como:

$$\left|m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\right| = \frac{m\,\omega^2\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{r\ \mathrm{sen}\,\theta} = \frac{m\,v_r^2}{r\ \mathrm{sen}\,\theta}\,.$$

Note que a velocidade escalar $v_r = \omega\, r\, \mathrm{sen}\,\theta$ também cresce à medida que se afasta do eixo de rotação. Além disso, o vetor $-\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ é normal a $\boldsymbol{\omega}$, saindo deste eixo de rotação, conforme ilustrado na Fig. 6.14 (b). Por isso, o terceiro termo da equação (6.25),

$$\mathbf{F}_{cf} = -\,m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,, \tag{6.27}$$

é uma força perpendicular ao eixo de rotação do referencial S' em relação a S e o sentido é de afastar deste eixo, ou seja, tem a mesma direção e o mesmo sentido de $-\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, obviamente. Ela é conhecida como *força centrífuga*[8] e é uma das forças inerciais importantes num referencial em rotação. Será denotada como $\mathbf{F}_{cf}$ para abreviar.

Para uma visualização desta força, uma análise comparativa de um movimento típico de uma partícula sob o ponto de vista de um referencial inercial e, também, de um referencial em rotação é interessante. Considere, então, uma plataforma horizontal executando um movimento de rotação em relação ao solo,

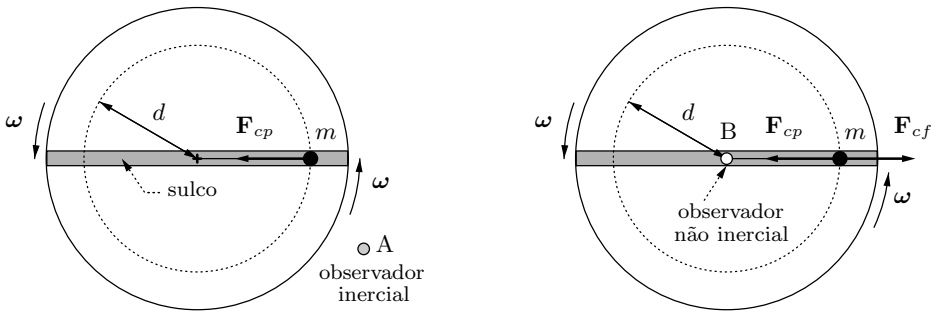

Fig. 6.15:

com uma velocidade angular $\omega =$ constante. Como ilustrado na Fig. 6.15 (a), suponha que esta plataforma possui um sulco retilíneo que passa pelo seu eixo de

[8] O nome *centrífuga* é composto de duas palavras do Latim: *centrum* que significa centro e *fugere* cujo significado é fugir.

rotação. Se se colocar uma partícula, de massa m, ela só pode se mover ao longo deste sulco. O desenho desta figura é a visão de quem está olhando a plataforma por cima dela. Supondo que não há atrito entre a partícula e o sulco, considere a partícula presa ao eixo de rotação por meio de um fio inextensível de massa desprezível e de comprimento d. Para um observador inercial, indicado por A na Fig. 6.15 (a), esta partícula está executando um movimento circular uniforme e, portanto, sofre uma aceleração de módulo constante e igual a $\omega^2 d$, sempre dirigida para o eixo de rotação. Esta aceleração é causada pela força centrípeta $\mathbf{F}_{cp}$ [mostrada também na Fig. 6.15 (a)], de módulo $m\omega^2 d$ e é suprida pelo fio. Por outro lado, para um observador B que está em repouso na posição do eixo de rotação da plataforma (e, portanto, está em rotação junto com a plataforma), a partícula está em repouso a uma distância d do eixo. Assim, a aceleração da partícula é zero. Nesta situação, para a partícula permanecer em repouso, a força resultante sobre ela deve ser nula. Isto só é possível se existir uma outra força aplicada sobre a partícula, além de $\mathbf{F}_{cp}$, de mesma intensidade, dirigida para o sentido oposto desta (apontando para longe do eixo de rotação). Esta segunda força é justamente a força centrífuga, $\mathbf{F}_{cf}$, ilustrada na Fig. 6.15 (b). Com isso, tem-se:

$$\mathbf{F}_{cp} + \mathbf{F}_{cf} = 0\,, \qquad \text{ou seja} \qquad \mathbf{F}_{cf} = -\,\mathbf{F}_{cp}\,.$$

Dessa forma, a força centrífuga tem também módulo $m\omega^2 d$. Se se substituir o fio por uma mola de constante k conhecida, poder-se-ia medir a intensidade dessa força centrífuga medindo a variação do comprimento dessa mola em relação ao seu comprimento natural. Assim, um observador B, que está em rotação junto com a plataforma, concluirá que essa força é proporcional à massa e à distância da partícula em relação ao eixo de rotação.

Considere, novamente, a situação original da Fig. 6.15 (b), isto é, da partícula presa por meio de um fio. Como o atrito entre o sulco e a partícula é desprezível, para o observador não inercial, B, existe uma única força agindo sobre a partícula, que é a centrífuga, quando o fio for cortado. Nesse instante, surge uma aceleração $\omega^2 d$ sobre a partícula e ela começa a se movimentar. É claro que, à medida que ela se afasta do eixo de rotação, a sua aceleração cresce porque a distância aumenta. Então, se o sulco for bastante longo, a equação direrencial do movimento é dada por:

$$m\,\ddot{x}' = m\,\omega^2\,x'\,,$$

onde x' é a distância da partícula, ao longo do sulco, em relação ao eixo de rotação tomado como origem. A solução exata que satisfaz as condições iniciais $x'(0) = d$ e $\dot{x}'(0) = 0$ é:

$$x'(t) = d\,\cosh\,\omega\,t\,.$$

Observe que a equação horária é $x'(t) \approx d + \frac{1}{2}(\omega^2 d)t^2$ enquanto $\omega t \ll 1$, mediante a aproximação $\cosh \xi \approx 1 + \frac{1}{2}\xi^2$ para $\xi \ll 1$. A condição $\omega t \ll 1$ ocorre no início do movimento. Então, num intervalo de tempo Δt pequeno, no início do movimento, o observador B notará que o deslocamento da partícula pode ser descrito, aproximadamente, pela equação $\dfrac{1}{2}(\omega^2 d)(\Delta t)^2$.

A aceleração acima aludida pode, também, ser explicada sob o ponto de vista do observador inercial A. Para isso, suponha que o fio fora cortado no instante $t = 0$. A Fig. 6.16 (a), abaixo, é o esquema da situação que estava nesse instante. Após decorrido um intervalo de tempo Δt, o sulco rodou de um ângulo $\Delta\varphi$. Como o observador A está no referencial inercial (portanto, não há força agindo sobre a partícula), nesse mesmo intervalo de tempo, a partícula moveu-se em linha reta segundo a trajetória $\overline{PR}$, se $\Delta\varphi$ for pequeno (que é o caso para Δt pequeno), conforme a ilustração da Fig. 6.16 (b) para o instante $t = \Delta t$. Mas, isto significa que a distância da partícula em relação à origem (eixo de rotação) aumentou de $\overline{QR}$, sendo que $\overline{OQ}$ é a distância em relação

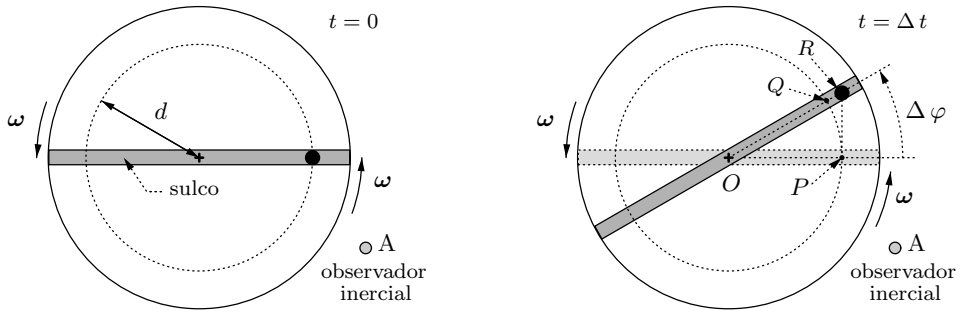

Fig. 6.16:

à origem se a partícula fosse mantida presa por um fio durante o movimento e tem-se: $\overline{OQ} = \overline{OP} = d$. Observe que o segmento $\overline{PR}$ é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ e, por isso, tem-se:

$$\overline{OR} = \frac{\overline{OP}}{\cos(\Delta\varphi)} = \frac{d}{\cos(\Delta\varphi)}\,.$$

Mas, $\overline{OR} = \overline{OQ} + \overline{QR} = d + \overline{QR}$. Assim,

$$\overline{OR} = d + \overline{QR} = \frac{d}{\cos(\Delta\varphi)}\,,$$

isto é,

$$\overline{QR} = d\left(\frac{1}{\cos(\Delta\varphi)} - 1\right).$$

Para $\Delta\varphi$ pequeno, $\cos(\Delta\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2$. Então,

$$\overline{QR} \approx d\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2} - 1\right) \approx d\left(1 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}d(\Delta\varphi)^2.$$

Como a rotação do sulco está sendo executada com uma velocidade angular constante igual a ω, $\Delta\varphi$ pode ser expressa como $\Delta\varphi = \omega(\Delta t)$, porque o movimento em questão foi executado num intervalo de tempo Δt. Portanto, para o observador inercial A, o deslocamento da partícula pode ser descrito pela equação

$$\overline{QR} \approx \frac{1}{2}(\omega^2 d)(\Delta t)^2,$$

bem no início do movimento, e essa equação coincide com a descrição no referencial em rotação (ou seja, com a do observador não inercial B). Com isso, é possível compreender que, para o observador não inercial B, a partícula adquire uma aceleração $\omega^2 d$ por meio da ação de uma força centrífuga $F_{cf} = m\omega^2 d$.

Deve-se enfatizar neste ponto que esta coincidência de descrições vale somente para o início do movimento, uma vez que, aumentando o intervalo de tempo, a trajetória deixa de ser retilínea para o observador inercial A enquanto ela continua retilínea para o observador não inercial B até terminar o sulco. A comparação das descrições do movimento posterior, entre os dois observadores, começa a ficar muito complicada, mesmo que a partícula ainda esteja no sulco.

6.2.2 Força de Coriolis

O segundo termo do membro direito da equação (6.25), conhecido como *força de Coriolis*, é $-2m\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'}$. Note que ela é sempre perpendicular à velocidade angular de rotação do referencial S' em relação a S e, também, à velocidade da partícula com relação a S'. Esta força inercial provoca efeitos importantes sobre os movimentos das partículas nas proximidades da superfície da Terra. Alguns destes efeitos serão estudados nas secções futuras.

Antes de estudar efetivamente a força de Coriolis, é interessante analisar uma situação específica para compreender o seu efeito. Com esta finalidade em mente, considere uma plataforma circular horizontal de raio R suficientemente grande.

Ela gira com uma velocidade angular constante, $\boldsymbol{\omega}$, ao redor do eixo perpendicular que passa pelo seu centro. Um referencial inercial S, fixo fora desta plataforma, será adotado. Ele é munido de um sistema de eixos ortogonais x e y, paralelos ao plano da plataforma tendo a origem O coincidente com o eixo de rotação [ver Fig. 6.17]. Um referencial S' de eixos ortogonais x' e y' com origem em O' que coincide com O, fixo na plataforma será também considerado. É óbvio que o referencial S' está em rotação junto com a plataforma. Uma partícula de massa m que pode deslizar sem atrito na superfície dessa plataforma está, inicialmente, presa numa posição que dista $h < R$ do eixo de rotação (origem O dos eixos das coordenadas em ambos os referenciais). Então, esta partícula executa um movimento circular uniforme de raio h em relação ao referencial S, enquanto permanece em repouso em relação ao referencial S'. Esta partícula é liberada quando a sua posição coincide com a coordenada $(h, 0)$ do plano xy do referencial S (a posição a na Fig. 6.17). A partir desse instante, todas as forças que estavam agindo sobre a partícula desaparecem e ela se move com velocidade constante, igual a $\omega\, h$, seguindo a reta $x = h$ que é a tangente à circunferência no instante da liberação. Atribuindo-se $t = 0$ para esse instante, a descrição do movimento subseqüente, no referencial S, é dada pelo par de equações horárias:

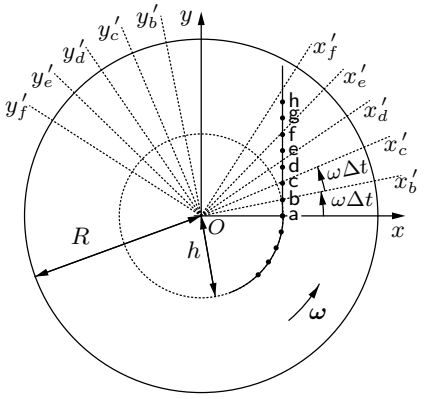

Fig. 6.17:

$$x = h = \text{constante} \qquad \text{e} \qquad y(t) = h\,\omega\,t\,.$$

Por outro lado, devido à rotação do referencial S' em relação a S, o eixo dos x' forma um ângulo $\omega\, t$ com o eixo dos x, supondo que elas coincidiam no instante $t = 0$ (acontece o mesmo com o eixo dos y', mas é irrelevante para esta discussão). A intersecção do eixo dos x' com a reta $x = h$ é dada pelo par de equações:

$$x = h \qquad \text{e} \qquad \overline{y}(t) = h\ \mathrm{tg}\,(\omega\, t)\,.$$

Como $\xi < \mathrm{tg}\,\xi$ no intervalo $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, tem-se:

$$y(t) < \overline{y}(t)\,, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2\,\omega}\,.$$

Este resultado mostra que, num instante t, o eixo dos x' sempre intercepta a reta $x = h$ numa posição adiantada em relação à da partícula no mesmo

instante. Esta afirmação está ilustrada na Fig. 6.17, que será explicada a seguir. As posições rotuladas como b, c, d, e, f, g e h correspondem àquelas ocupadas pela partícula nos instantes Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, $4\Delta t$, $5\Delta t$, $6\Delta t$ e $7\Delta t$, respectivamente, fornecida pela equação de $y(t)$. Os eixos pontilhados, rotulados como x'_b, x'_c, x'_d, x'_e e x'_f correspondem às direções do eixo dos x' em relação ao eixo dos x nos instantes: Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, $4\Delta t$ e $5\Delta t$, respectivamente. Note que a intersecção de x'_b com a reta $x = h$ é quase coincidente com o ponto rotulado como b na escala adotada para a figura. Já a intersecção de x'_c com a mesma reta está visivelmente avançada em relação à posição do ponto rotulado como c, embora esteja ainda muito próximo. Este fato torna-se muito mais evidente para as intersecções de x'_d, x'_e e x'_f com relação aos pontos rotulados como d, e e f. Note também que a intersecção, ora em discussão, afasta-se cada vez mais da origem comum de ambos os referencias. Dessa forma, do ponto de vista do referecial S', a posição da partícula afasta-se cada vez mais da origem e ao mesmo tempo desvia-se para a direita do eixo dos x' nos instantes subseqüentes. Mas, o referencial S' está em rotação em relação a S. Assim, existe um força centrífuga, que acelera a partícula para longe da origem, e uma força de Coriolis, que desvia a sua trajetória para a direita, no caso.

No referencial S, as aludidas posições da partícula são dadas pelas coordenadas $x = h$ e $y(t) = h\,\omega\,t$. Essas mesmas posições podem ser obtidas no referencial S' mediante a transformação de coordenadas entre dois sistemas de eixos rodados, um em relação ao outro, apresentada no Apêndice D do volume 2. De acordo com a equação (D.9), se (x, y) forem as coordenadas de um ponto P em relação a um sistema de eixos fixos, então, as coordenadas (x', y') deste mesmo ponto, em relação a um outro sistema de eixos, rodados de um ângulo φ em relação ao primeiro, estão relacionadas com (x, y) por:

$$\begin{aligned} & & x' &= x\,\cos\varphi + y\,\operatorname{sen}\varphi \\ \text{e} & & y' &= -x\,\operatorname{sen}\varphi + y\,\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

A Fig. 6.18 (a) ilustra os dois sistema de eixos, mostrando também as coordenadas do ponto P em cada um deles. É óbvio que no caso dos referenciais, ora em discussão, o sistema de eixos com "linha" está em rotação em relação ao sistema sem "linha" e tem-se: $\varphi = \omega\,t$. Substituindo-se as coordenadas $(h, h\,\omega\,t)$ da partícula no lugar de (x, y) na transformação acima fica:

$$\begin{aligned} & & x' &= h\,\cos(\omega\,t) + (h\,\omega\,t)\,\operatorname{sen}(\omega\,t) \\ \text{e} & & y' &= -h\,\operatorname{sen}(\omega\,t) + (h\,\omega\,t)\,\cos(\omega\,t)\,. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Isto leva à curva esboçada na Fig. 6.18 (b). Para as posições ilustradas na Fig. 6.17, toma-se $x = h$, $y = y_n = h\,\omega\,n\,\Delta t$ e $\varphi = n\,\omega\,\Delta t$, onde n é um

inteiro positivo ou igual a zero. Aplicando-se a referida transformação para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, as posições em relação aos eixos $x'y'$ do referencial

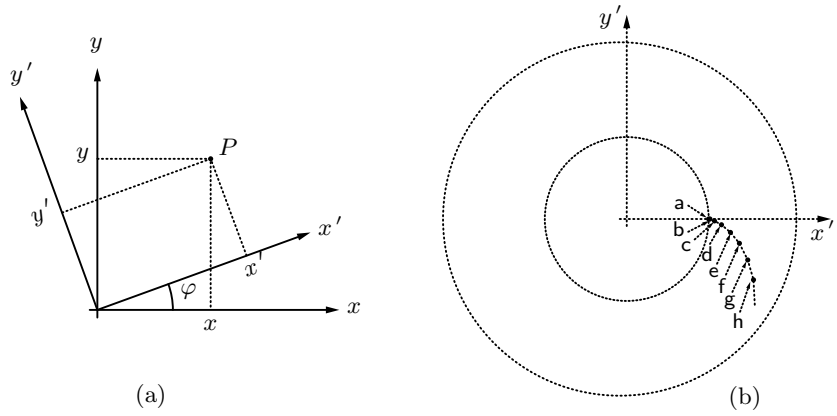

Fig. 6.18:

S' ficam como as esboçadas na Fig. 6.18 (b), onde os mesmos rótulos da Fig. 6.17 foram utilizados. Note que a trajetória torna-se curva e a patícula desvia-se cada vez mais do eixo dos x'.

No referencial S', esta mesma partícula estava em repouso até ser liberada no instante $t = 0$. A partir do instante que foi liberada, ela começa a afastar-se da origem sob ação da força centrífuga, na direção e sentido positivo do eixo dos x', com uma aceleração $\omega^2 h$. Se a força centrífuga fosse a única que agisse, o movimento da partícula seria retilíneo e acelerado na direção do eixo dos x'. Entretanto, assim que iniciar o movimento a sua velocidade torna-se diferente de zero e aparece uma força de Coriolis na direção perpendicular à da velocidade (no início é também perpendicular ao eixo dos x'). À medida que aumenta a velocidade, essa força aumenta a sua magnitude, estando sempre perpendicular ao vetor velocidade. A trajetória do movimento dessa partícula é dada pela solução da equação do movimento, proveniente da lei tipo "segunda lei de Newton":

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = -\,m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\,m\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}\,. \tag{6.29}$$

A velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é perpendicular ao plano $x'y'$ e pode ser escrita como $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_{z'}$, sendo $\mathbf{e}_{z'}$, um vetor unitário e perpendicular à plataforma. Cancelando m e efetuando a decomposição da equação (6.29) em componentes x' e y', resulta em:

$$\ddot{x}' = \omega^2\,x' + 2\,\omega\,\dot{y}'$$

e

$$\ddot{y}' = \omega^2\,y' - 2\,\omega\,\dot{x}'\,.$$

Multiplicando-se a segunda equação por i e adicionando-se à primeira obtém-se:

$$(\ddot{x}' + \mathrm{i}\,\ddot{y}') = \omega^2\,(x' + \mathrm{i}\,y') - \mathrm{i}\,2\,\omega(\dot{x}' + \mathrm{i}\,\dot{y}')\,.$$

Introduzindo-se $u = x' + \mathrm{i}\,y'$, esta equação fica:

$$\ddot{u} + \mathrm{i}\,2\,\omega\,\dot{u} - \omega^2\,u = 0\,.$$

A sua equação característica[9] é $r^2 + \mathrm{i}\,2\,\omega\,r - \omega^2 = 0$, que possui somente uma raiz, $r = -\,\mathrm{i}\,\omega$. Então, as duas soluções fundamentais são:

$$u_1(t) = e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t} \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = t\,e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t}\,.$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$u(t) = e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t}(A + B\,t)\,, \tag{6.30}$$

tendo A e B como constantes de integração que são complexas. As condições iniciais desse problema são: $x'(0) = h$, $y'(0) = 0$, $\dot{x}'(0) = 0$ e $\dot{y}'(0) = 0$. Com isso, $u(0) = h$ e $\dot{u}(0) = 0$. Impondo essas condições resultam em: $A = h$ e $B = \mathrm{i}\,\omega\,h$. A solução final é, então,

$$u(t) = e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t}(h + \mathrm{i}\,\omega\,h\,t)\,.$$

As partes real e imaginária desta expressão levam às equações horárias:

$$\begin{aligned} & x'(t) = h\,\cos\,\omega t + h\,\omega t\,\operatorname{sen}\omega t \\ \text{e} \qquad & y'(t) = -\,h\,\operatorname{sen}\omega t + h\,\omega t\,\cos\,\omega t\,. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Note que elas coincidem com as equações (6.28). Essas equações são representações paramétricas da trajetória, cuja curva correspondente ao início do movimento está esboçada na Fig. 6.18 (b). Cada uma das equações acima pode ser elevada ao quadrado e adicionadas, membro a membro. Extraindo-se a raiz quadrada do resultado, obtém-se:

$$\rho(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = h\,\sqrt{1 + \omega^2\,t^2}\,, \tag{6.32}$$

que expressa a distância da partícula em relação à origem do sistema de coordenadas em função do tempo. Note que depois de um intervalo de tempo longo, tem-se: $\rho \approx h\,\omega\,t$, o que significa que a velocidade que a partícula se afasta da

[9] Ver Apêndice B do volume 1

origem tende a $h\,\omega$. Por outro lado, o ângulo polar, em relação ao eixo dos x' é dado por:

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\omega\,t - \operatorname{tg}\omega\,t}{1 + \omega\,t\,\operatorname{tg}\omega\,t}\,.$$

Para simplificar esta expressão, considere $\operatorname{tg}\xi = \omega\,t$. Com isso, tem-se:

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{\operatorname{tg}\xi - \operatorname{tg}\omega\,t}{1 + \operatorname{tg}\xi\,\operatorname{tg}\omega\,t} = \operatorname{tg}(\xi - \omega\,t)\,.$$

Dessa forma, a equação horária para φ é dada por:

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\omega\,t - \omega\,t\,. \tag{6.33}$$

Com esta expressão, pode ser calculada $\dot\varphi$ e mostrar que ela tende a $-\omega$ quando t for muito grande. Note que essas informações mostram que, quando a partícula estiver longe, a trajetória aproxima-se de uma espiral de passo constante. Então, a força de Coriolis deve estar quase na mesma direção da força centrífuga, mas com sentido contrário. O esboço dessas forças ponto a ponto, bem como a trajetória neste limite será deixado para o leitor como exercícicio.

Exemplo 6.8 Considere um disco horizontal, de raio R, girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante, $\boldsymbol{\omega}$. O eixo de rotação é vertical e passa pelo seu centro. Sejam dois pontos distintos P e Q, situados na borda desse disco

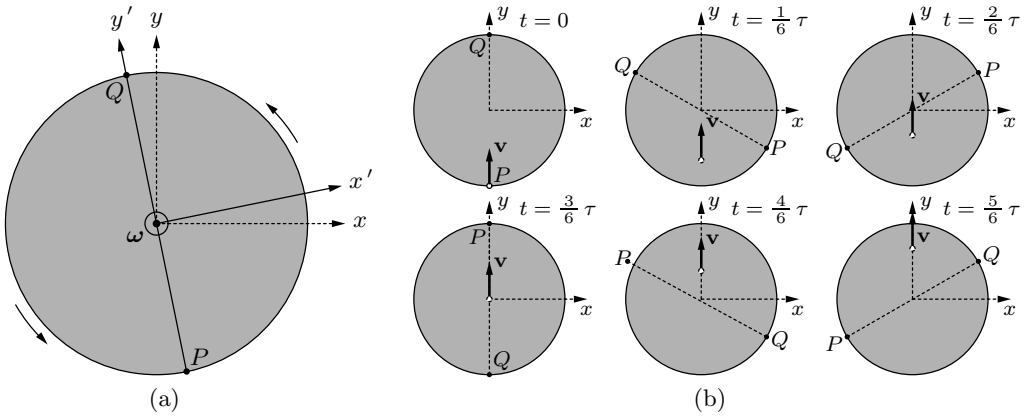

Fig. 6.19: (a) Referencial Inercial e Não Inercial. (b) Alguns passos do movimento relativo ao referencial inercial, em fração do período $\tau = \frac{2\,\pi}{\omega}$, para $N = 1$.

nas posições diametralmente opostas, como ilustra a Fig. 6.19 (a). Deseja-se lançar uma partícula de massa m de tal maneira que parta do ponto P e chegue no ponto Q. Considerando o raio do disco suficientemente grande, descreva o movimento desta

partícula para um observador inercial que está fora desse disco e para um outro observador que está em rotação junto com o disco. Despreze o atrito entre a partícula e a superfície do disco.

Solução: Considere um referencial inercial, com origem no centro do disco, representado pelo sitema de eixo dos x e dos y, respectivamente. Para um observador, fora do disco, a força resultante que age sobre a partícula é nula. Por isso, não há força alguma a considerar e, assim, basta lançá-la diretamente em direção ao ponto Q a partir do ponto P (e sentido de P para Q), e o movimento será retilíneo. Mas, o ponto Q, assim como o P, está em movimento de rotação. Dessa forma, para que a partícula chegue ao ponto Q, é necessário lançá-la com uma velocidade que percorra a distância de um diâmetro ($2\,R$) num intervalo de tempo que o ponto Q dê, no mínimo, uma volta completa, retornando assim ao ponto de partida. O intervalo de tempo necessário para que a partícula chegue ao ponto Q após o disco dar N voltas completas é $\dfrac{2\,\pi}{\omega}\,N$, onde $\dfrac{2\,\pi}{\omega}$ é o intervalo de tempo de *uma* volta completa. Então, a velocidade de lançamento é: $v_{\text{iner}} = \dfrac{\omega\,R}{\pi\,N}$. O índice "iner" no v_{iner} é para enfatizar que se trata da velocidade em relação ao referencial inercial. As posições da partícula e dos pontos P e Q estão mostradas na Fig. 6.19 (b) para o caso $N = 1$. Os instantes da figura correspondem a multiplos de intervalo de tempo de $\dfrac{1}{6}\,\dfrac{2\,\pi}{\omega}$, onde $\dfrac{2\,\pi}{\omega} = \tau$ é o período de uma rotação completa do disco.

Considere, agora, um referencial em rotação junto com o disco, representado pelo sistema de eixos dos x' e dos y', ilustrado também na Fig. 6.19 (a). A força resultante que age sobre a partícula é, agora, a soma de força centrífuga e de Coriolis. A equação diferencial do movimento é dada por (6.29), reproduzida abaixo:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}}' = -\,m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') - 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}'\,.$$

A sua decomposição em componentes x' e y' e a resolução do sistema de equações diferenciais resultante segue o mesmo procedimento já desenvolvido no texto. Assim, a solução geral é dada por (6.30), isto é,

$$u(t) = e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t}\,(A + B\,t)$$

(lembrar que $u = x' + \mathrm{i}\,y'$). Resta, agora, impor as condições iniciais deste problema para determinar as constantes A e B. Em relação aos eixos cartesianos adotados [Fig. 6.19 (a)], têm-se:

$$x'(0) = 0\,, \qquad\qquad y'(0) = -\,R\,,$$
$$\dot{x}'(0) = -\,\omega\,R \qquad \text{e} \qquad \dot{y}'(0) = \frac{\omega\,R}{\pi\,N}\,,$$

sendo $t = 0$ o instante do lançamento da partícula. A componente da velocidade inicial na direção y' vem do fato que a partícula deve percorrer a distância $2\,R$ num intervalo de tempo de dar N voltas completas, isto é, $\dfrac{2\,\pi\,N}{\omega}$ (quando o ponto Q passa nova-

mente pela posição que estava no instante inicial). Como o ponto P já tem uma velocidade $\mathbf{v}_P$, de magnitude ωR, no sentido da esquerda para a direita (quando se vê o disco por cima), esta deve ser compensada no ato do lançamento, caso contrário, a partícula não chega no ponto Q, pois, é desviada pela força de Coriolis. Então, a componente x' da velocidade da partícula deve ter a mesma magnitude da do ponto P, mas com o sentido contrário, no instante do lançamento. Essas condições iniciais estão ilustradas na Fig. 6.20. Derivando-se $u(t)$ em relação a t, obtém-se:

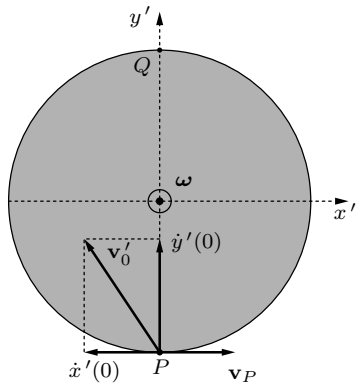

Fig. 6.20:

$$\dot{u}(t) = -\,\mathrm{i}\,\omega\,u(t) + B\,e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t}\,.$$

Impondo, então, as condições iniciais para $u(t)$ e $\dot{u}(t)$, têm-se:

$$u(0) = A = -\,\mathrm{i}\,R$$

$$\text{e} \qquad \dot{u}(0) = -\,\omega\,R + B = -\,\omega\,R + \mathrm{i}\,\frac{\omega\,R}{\pi\,N} \qquad \Longrightarrow \qquad B = \mathrm{i}\,\frac{\omega\,R}{\pi\,N}\,.$$

A solução final é, portanto,

$$u(t) = \mathrm{i}\,e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t}\left(\frac{\omega\,R}{\pi\,N}\,t - R\right) = \left(\frac{\omega\,t}{\pi\,N} - 1\right) R\big(\,\mathrm{sen}\,\omega\,t + \mathrm{i}\,\cos\,\omega\,t\big)\,,$$

de onde a parte real e a parte imaginária desta expressão resultam num par de equações horárias:

$$x'(t) = \left(\frac{\omega\,t}{\pi\,N} - 1\right) R\,\mathrm{sen}\,\omega\,t$$

$$\text{e} \qquad y'(t) = \left(\frac{\omega\,t}{\pi\,N} - 1\right) R\,\cos\,\omega\,t\,.$$

Se se elevar ambos os membros destas equações ao quadrado, adicioná-las membro a membro e extrair a raiz quadrada, resulta em:

$$\rho(t) = \sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}} = \left|\frac{\omega\,t}{\pi\,N} - 1\right| R\,,$$

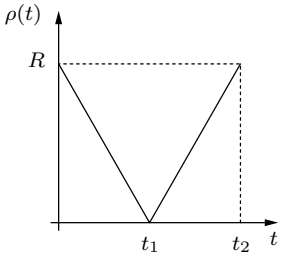

Fig. 6.21:

que é o comportamento temporal da distância da partícula à origem do referencial em questão. Ela diminui com o tempo até o instante $t_1 = \dfrac{\pi\,N}{\omega}$, quando se torna nulo, e depois cresce até o instante $t_2 = \dfrac{2\,\pi\,N}{\omega}$ (quando a partícula chega ao ponto Q), conforme mostra o gráfico da Fig. 6.21. Note que $x'(t_1) = 0$ e $y'(t_1) = 0$, o que significa que a partícula está passando pela origem no instante t_1. Por outro lado, as componentes

das velocidades são dadas por:

$$\dot{x}'(t) = \frac{\omega\, R}{\pi\, N}\, \operatorname{sen}\omega\, t + \left(\frac{\omega\, t}{\pi\, N} - 1\right) R\,\omega\, \cos\,\omega\, t$$

$$\text{e} \qquad \dot{y}'(t) = \frac{\omega\, R}{\pi\, N}\, \cos\,\omega\, t - \left(\frac{\omega\, t}{\pi\, N} - 1\right) R\,\omega\, \operatorname{sen}\omega\, t\,.$$

Em particular, para $t = t_1$, têm-se:

$$\dot{x}'(t_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}'(t_1) = \frac{\omega\, R}{\pi\, N}\, \cos\,\pi\, N = \frac{\omega\, R}{\pi\, N}\, (-1)^{\,N}\,,$$

o que mostra que $t = t_1$ é um zero duplo de $x'(t)$. Portanto, nesse instante, a componente x' da velocidade é sempre nula mas a componente y' é não nula, podendo ser positiva ou negativa, dependendo se N é par ou é ímpar. Conclui-se, dessas discussões, que a trajetória da partícula tangencia o eixo dos y' na origem do referencial no instante $t = t_1$. Introduzindo-se uma variável n_x que pode tomar apenas os valores inteiros $n_x = 0, 1, \ldots, 2\,N$, $x'(t)$ anula-se nos instantes $t_x = \dfrac{\pi\, n_x}{\omega}$. Observe que t_x inclui o t_1 (quando $n_x = N$). Assim, $x'(t)$ anula-se $2\,N + 1$ vezes durante o movimento. Da mesma maneira, $y'(t)$ anula-se $2\,N + 1$ vezes, durante o movimento, nos instantes $t_y = \dfrac{\pi}{\omega}\left(n_y - \dfrac{1}{2}\right)$, com $n_y = 1, 2, \ldots, 2\,N$, e também em $t = t_1$. Lembrando que os zeros do cosseno estão sempre intercalados com os zeros do seno, é fácil ver que não há instantes em que $x'(t)$ e $y'(t)$ se anulam simultâneamente, excetuando o caso de $t = t_1$. Nos instantes $t = t_y$, isto é, nos zeros de y', os valores de $x'(t_y)$ são:

$$x'(t_y) = \left[\frac{1}{N}\left(n_y - \frac{1}{2}\right) - 1\right]\, (-1)^{\,n_y+1}\, R\,, \qquad n_y = 1, \ldots, 2\,N\,.$$

Entretanto, note, por meio desta expressão, que nos instantes t_y que correspondem aos pares de n_y: $(1, 2\,N)$, $(2, 2\,N - 1)$, $\ldots$, $(N, N + 1)$, $x'(t_y)$ têm mesmos valores (fica como exercício para o leitor fazer essa verificação). Isto indica que a trajetória da partícula cruza com o eixo dos x' duas vezes, no mesmo ponto. A origem do referencial é uma excessão, pois, cruza apenas uma vez. As expressões das componentes das velocidades mostram que $\dot{y}'(t_x) \neq 0$ para qualquer dos t_x e $\dot{x}'(t_x) \neq 0$, exceto $t_x = t_1$. Mostram, também, que $\dot{x}'(t_y) \neq 0$ e $\dot{y}'(t_y) \neq 0$. Toda a análise efetuada até agora permite inferir que a trajetória da partícula, em relação ao referencial em rotação, é uma curva com laços complicados. Essas trajetórias para quatro primeiros N mais baixos estão esboçadas na Fig. 6.22 abaixo. Note o cruzamento da trajetória com o eixo dos x'. Para finalizar este exemplo, será deixada uma questão para o leitor pensar. Por que a trajetória sempre tangencia o eixo dos y' na origem?

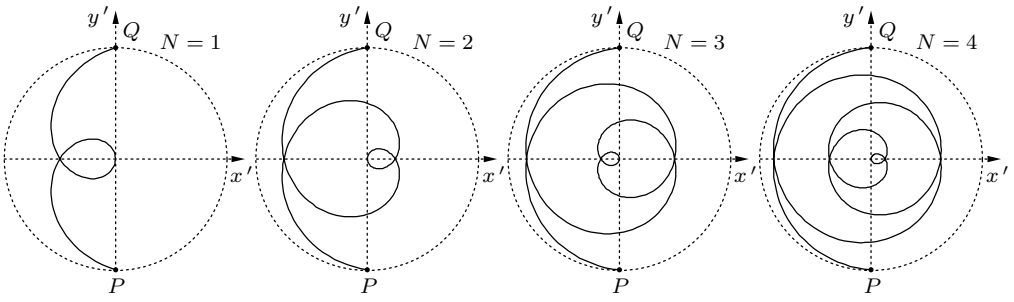

Fig. 6.22:

Exercícios

6.12) Repita a dedução de (6.13), mostrando que ela vale também para vetores que não têm caudas fixas na origem do referencial.

6.13) Discuta a argumentação utilizada no texto para dedução da transformação (6.16).

6.14) Prove que (6.16) continua valendo para vetores que não têm cauda fixa na origem do referencial.

6.15) Com suas próprias palavras, faça um resumo da secção 6.2.1.

6.16) Considere a partícula discutida na secção 6.2.2. Adote um sistema de coordenadas polares no plano da plataforma, com a origem no eixo de rotação e a direção do ângulo polar como o do segmento que une a origem ao ponto onde a partícula fora liberada. Denote, então, essas coordenadas polares por (ρ, φ) e suponha que este sistema de coordenadas esteja rodando junto com a plataforma.

a) Mostre que as equações diferenciais que rege o movimento da partícula, em termos de ρ e de φ, são dadas por:

$$\begin{aligned} & \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^{\,2} = \omega^{\,2}\,\rho + 2\,\omega\,\rho\,\dot{\varphi} \\ \text{e} \qquad & \rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi} = -\,2\,\omega\,\dot{\rho}\,, \end{aligned} \tag{6.34}$$

onde a direção do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ foi considerado a do eixo z, seguindo a regra da mão direita [10].

b) Mostre que a segunda equação de (6.34) pode ser integrada uma vez e determine a constante de integração, lembrando que as condições iniciais são: $\rho(0) = h$, $\dot{\rho}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$.

c) Isole $\dot{\varphi}$ do resultado do item b) e mostre que a primeira equação de (6.34) também pode ser integrada uma vez. Determine a constante de integração sob as mesmas condições iniciais.

d) A partir do resultado do item c), obtenha $\rho(t)$ e compare com (6.32).

[10] Ver (3.47) do volume 2.

e) Obtenha, também, $\varphi(t)$ e compare com (6.33).

f) Combinando os resultados dos itens d) e e), obtenha a equação da trajetória. Mostre que esta curva aproxima-se de uma espiral de Arquimedes[11] quando $\rho \to \infty$.

g) Esboce esta trajetória. Iniciando do ponto de partida, escolha vários pontos sobre esta trajetória e esboce as forças centrífuga e de Coriolis nesses pontos. Isto deve dar uma idéia da força de Coriolis tendendo a contrabalançar a força centrífuga.

6.17) Determine todos $\dot{x}'(t_x)$ e $\dot{y}'(t_y)$ do exemplo 6.8.

6.18) Baseado na análise efetuada no exemplo 6.8, esboce a trajetória para o caso $N = 5$, fazendo discussões minuciosas da característica dessa trajetória.

6.19) No exemplo 6.8, suponha, agora, que se quer lançar a partícula de maneira que ela retorne ao ponto P após N meias voltas.

a) Escreva as condições iniciais, isto é, escreva $x'(0)$, $y'(0)$, $\dot{x}'(0)$ e $\dot{y}'(0)$.

b) Determine as equações horárias, $x'(t)$ e $y'(t)$, do movimento.

c) Esboce as trajetórias para $N = 1, 2$ e 3.

6.20) Num parque de diversões há um carrossel de raio R girando ao redor do seu eixo central com uma velocidade angular de módulo ω no sentido anti-horário. Uma pessoa parada num ponto A da borda desse carrossel observa um poste localizado a uma distância D do centro do carrossel, sendo $D > R$.

a) Escolha um sistema de eixos (referencial) com a origem fixa no ponto A do carrossel e determine as equações horárias das coordenadas de posição do poste. Considere que no instante $t = 0$ a origem A estava sobre o segmento de reta que une o eixo de rotação do carrossel ao poste.

b) Determine a velocidade e aceleração do poste em relação ao sistema de coordenadas do item a).

c) Esboce a trajetória descrita pelo poste em relação ao mesmo referencial.

6.21) Uma plataforma circular tem o plano do seu círculo disposto horizontalmente e o seu raio é igual a $5\,\mathtt{m}$. Ela gira ao redor do eixo vertical que passa pelo seu centro, no sentido horário, com uma velocidade angular igual a $0{,}2\,\mathtt{rad/s}$. Um homem cuja massa é $100\,\mathtt{kg}$ anda ao longo do diâmetro dessa plataforma com uma velocidade constante de $1\,\mathtt{m/s}$. No instante $t = 0$ ele cruza o centro e em $t = 5\,\mathtt{s}$ ele cai para fora da plataforma pela sua borda.

a) Esboce um gráfico da força centrífuga que age sobre o homem em função do tempo no intervalo de $t = 0$ até $t = 5\,\mathtt{s}$.

b) No mesmo gráfico e na mesma escala, esboce um gráfico da força de Coriolis agindo sobre o homem, no mesmo intervalo de tempo.

[11] Espiral de Arquimedes tem a equação, em coordenadas polares, na forma: $\rho = a + b\,\varphi$, onde a e b são constantes reais.

c) Esboce a direção e o sentido de ambas as forças acima, ao longo da trajetória do homem.

6.22) Um disco horizontal está girando, no sentido anti-horário, em relação a um referencial inercial com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ ao redor de um eixo vertical que passa pelo seu centro O. Um automóvel, de massa m, desloca-se sobre um diâmetro desse disco com uma velocidade constante $\mathbf{v}$, em relação ao disco. O coeficiente de atrito estático entre o automóvel e o disco é μ e este sistema está numa região onde o campo de gravidade é constante e igual a $\mathbf{g}$. Considere o disco suficientemente grande e que o automóvel partiu do ponto O no instante $t = 0$.

a) Em relação a um referencial fixo no disco, determine todas as forças (direção, sentido e intensidade) que age sobre o automóvel numa posição genérica.

b) Até que distância em relação a O o automóvel pode deslocar sem deslizar? Em que direção ele se move no momento que começa a deslizar?

c) Calcule a distância para $\omega = 0,2\ \mathtt{rad/s}$, $v = 9\ \mathtt{m/s}$ e $\mu = 0,4$. Considere $g = 10\ \mathtt{m/s}^2$.

6.23) Seja um referencial inercial S com origem em O. Seja um outro referencial S', com origem em O', que está em movimento de translação e de rotação em relação a S. O vetor de posição de O' em relação a O é $\mathbf{R}$; o vetor de posição de um ponto genérico P em relação a O é $\mathbf{r}$ e em relação a O' é $\mathbf{r}'$ (ver Fig. 6.1). Se uma partícula de massa m estiver movendo junto com o ponto P, mostre que a lei tipo "segunda lei de Newton" no referencial S' é dada por:

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{S'} = \mathbf{F} - m\left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right)_S - m\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' - m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') - 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{S'}, \tag{6.35}$$

ou seja, a única diferença em relação à equação (6.23) é o termo $-m\left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right)_S$, que é a força inercial discutida na secção 6.1.

6.3 Movimento nas Proximidades da Superfície da Terra

A velocidade angular de rotação da Terra em torno do seu eixo, representada por $\boldsymbol{\omega}$, é aproximadamente constante. Por isso, nos estudos de movimentos de uma partícula em relação a um referencial fixo na da superfície da Terra, a força inercial que depende de $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ pode ser desconsiderada. Assim, será sempre adotada $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ nos desenvolvimentos que se seguem.

Para uma partícula de massa m, movendo-se nas proximidades da superfície da Terra, a segunda lei de Newton fornece:

$$m\,\frac{d^2\,\mathbf{r}}{d\,t^2} = \mathbf{F} + m\,\mathbf{g}\,, \tag{6.36}$$

em relação a um referencial inercial, S, fixo no espaço. Aqui, $\mathbf{F}$ representa uma força de origem não gravitacional. Efetuando-se a transformação da equação (6.36), para representá-la num referencial fixo na Terra, resulta em:

$$m\,\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\,[\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] - 2\,m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'\,, \tag{6.37}$$

onde as variáveis com "linha" nesta equação é para reforçar que se trata de vetores de posição, velocidade e aceleração em relação a um referencial S' fixo na superfície da Terra. A chamada aceleração centrífuga refere-se ao termo $-\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ que sempre é perpendicular ao eixo de rotação da Terra ($\boldsymbol{\omega}$), apontando no sentido de afastar desse eixo. Então, quando se mede a aceleração da gravidade num laboratório fixo na Terra, está medindo $\mathbf{g}_{ef}$, chamada

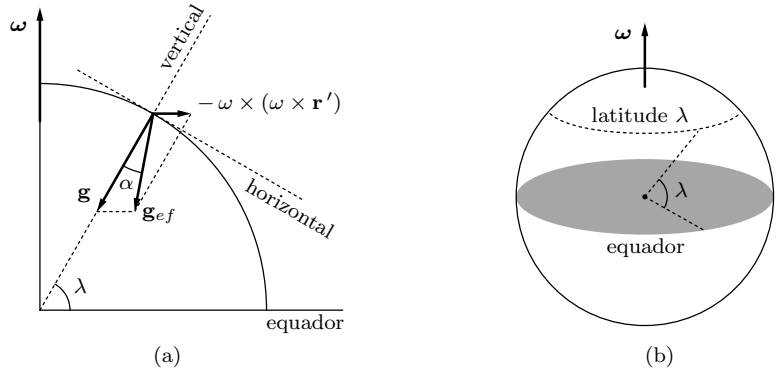

Fig. 6.23:

aceleração da gravidade efetiva, dada por:

$$\mathbf{g}_{ef} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\,, \tag{6.38}$$

e não é o $\mathbf{g}$, como esquematizado na Fig. 6.23 (a). Assim, a vertical, que deveria ser a direção de $\mathbf{g}$, tem um desvio na prática. Esse desvio é bastante pequeno e pode ser estimado como segue. Em um ponto da superfície da Terra de latitude λ, do hemisfério norte [Fig. 6.23 (b)], o módulo da aceleração centrífuga é:

$$|-\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')| = \omega_T\,|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'| = \omega_T^2\,R_T\,\cos\,\lambda\,.$$

Um dia ou $86400\,\mathtt{s}$ ($24 \times 3600\,\mathtt{s}$) é o período de rotação da Terra relativo ao Sol[12]. A freqüência angular de rotação da Terra é, então,

$$\omega_T = \frac{2\,\pi}{86400} \approx 7,3 \times 10^{-5}\,\mathtt{s}^{-1}.$$

Tomando o raio da Terra como $R_T = 6368\,\mathtt{km}$ (média entre o raio polar e o equatorial), tem-se:

$$\omega_T^2\, R_T \approx 3,4\,\mathtt{cm\,s}^{-2}\,.$$

Esta aceleração centrífuga, que é pequena em relação a $g = 980\,\mathtt{cm\,s}^{-2}$, é multiplicada por $\cos\lambda$ que diminui ainda mais o valor numérico de $\omega_T^2\, R_T$. Projetando-se $\mathbf{g}_{ef}$ segundo as direções vertical e horizontal, obtém-se:

$$g_h = \omega_T^2\, R_T\, \cos\,\lambda\, \operatorname{sen}\lambda \tag{6.39}$$

e

$$g_v = g - \omega_T^2\, R_T\, \cos^2\lambda\,, \tag{6.40}$$

cujos gráficos em função da latitude estão esboçados na Fig. 6.24. Note que a

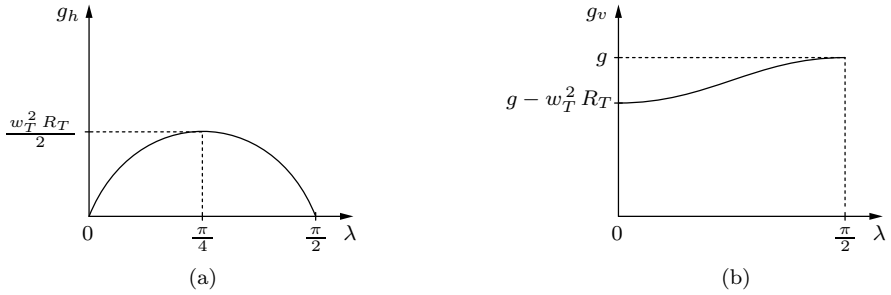

Fig. 6.24: Comportamento de g_h e de g_v.

componente horizontal de $\mathbf{g}_{ef}$ refere-se à projeção no plano horizontal (que é o plano tangente ao ponto da superfície da Terra na latitude λ em questão), ilustrada na Fig. 6.23 (a). Note também que a direção vertical referido na mesma figura é a direção de $\mathbf{g}$. O desvio da vertical é, então, dado pelo ângulo α cuja tangente é:

$$\tan\,\alpha = \frac{g_h}{g_v} = \frac{\omega_T^2\, R_T\, \cos\,\lambda\, \operatorname{sen}\lambda}{g - \omega_T^2\, R_T\, \cos^2\lambda}\,.$$

Como $g = 980\,\mathtt{cm\,s}^{-2}$ é muito maior do que o $\omega_T^2\, R_T = 3,4\,\mathtt{cm\,s}^{-2}$, o denominador pode ser aproximado como: $g - \omega_T^2\, R_T\, \cos^2\lambda \approx g$. Assim,

$$\tan\,\alpha \approx \frac{\omega_T^2\, R_T\, \cos\,\lambda\, \operatorname{sen}\lambda}{g} \approx \alpha\,.$$

[12]Existe também o dia sideral. Ele tem a duração de $86164\,\mathtt{s}$ e é o período de rotação da Terra em relação às estrelas fixas. Ele é menor que o dia relativo ao Sol por uma parte em 366.

O valor máximo dessa expressão ocorre para $\lambda = 45^o$. Nessa latitude, o ângulo de desvio, α, é aproximadamente $6'$ do arco, que é pequeno, como comentado anteriormente. Conclui-se daí que *a direção da vertical permanece quase inalterada mesmo sob efeito da força centrífuga*. Portanto, se se considerar a direção de $\mathbf{g}$ como sendo a vertical, o erro que se comete é muito pequeno.

Por outro lado, no polo norte, $\lambda = 90^o$. Então, $g_{polo} = g_v(90^o) = g$, porque $g_h(90^o) = 0$. Mas, $\lambda = 0^o$ no equador e, por isso, $g_{eq} = g_v(0^o) = g - \omega_T^2 R_T$ [$g_h(0^o) = 0$ também]. Com isso, a diferença das acelerações da gravidade entre polo e equador fica:

$$g_{polo} - g_{eq} = \omega_T^2 R_T = 3,4\,\mathtt{cm\,s}^{-2}.$$

O valor dessa diferença medido experimentalmente é $5,2\,\mathtt{cm\,s}^{-2}$. Esta diferença entre os valores calculado e medido é devido ao fato que a Terra não é uma esfera perfeita, mas é aproximadamente um esferóide, ligeiramente achatado nos polos. Quer dizer que, mesmo excluindo a aceleração centrífuga, g é maior nos polos do que no equador. Como o achatamento da Terra é uma conseqüência da sua rotação, os dois efeitos não são independentes. Sendo a Terra deformável, a sua superfície tende a ficar perpendicular a $\mathbf{g}_{ef}$ e, por isso, acaba por alongar nos equadores como conseqüência imediata do desvio em relação à vertical definida pelo $\mathbf{g}$. Assim, a sua forma aproxima-se de um elipsóide de revolução.

Observação: Todas as discussões acima a respeito do efeito da aceleração centrífuga sobre $\mathbf{g}$ foram baseadas em um ponto da Terra situado no hemisfério norte. Para efetuar as mesmas discussões em relação a um ponto situado no hemisfério sul, basta estender os valores de λ das equações desenvolvidas para o intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq 0$, convencionando-se que os valores negativos de λ significa que está em um ponto do hemisfério sul de latitude λ. As expressões (6.39) para g_h e (6.40) para g_v continuam as mesmas. Como não foi estabelecido o sentido positivo da horizontal, a mudança de sinal na componente g_h deve ser interpretado como segue: *quando estiver na latitude λ positiva (hemisfério norte), a componente g_h é sempre positiva e aponta no sentido polo norte para equador; quando estiver na latitude λ negativa (hemisfério sul), a componente horizontal g_h torna-se negativa, mas tem o mesmo módulo e significa apenas que aponta no sentido polo sul para equador.* Ou seja, em qualquer um dos dois hemisférios, a componente horizontal de $\mathbf{g}_{ef}$ sempre aponta para o equador. Por outro lado, a componente vertical, g_v, permanece positivo e sempre aponta para o centro da Terra.

Exercícios

6.24) Faça um esboço semelhante ao da Fig. 6.23 para a latitude λ referente ao hemisfério Sul da Terra.

6.25) Repita a análise da variação da aceleração da gravidade efetuada no texto, mas para o hemisfério Sul da Terra.

6.26) Como seria o desvio da vertical em relação à direção de $\mathbf{g}$ no hemisfério Sul da Terra?

6.27) Complete o esboço de g_h e de g_v da Fig. 6.24, incluindo a parte concernente ao hemisfério sul. Interprete.

6.28) Determine $g_{ef} = \sqrt{g_h^2 + g_v^2}$ e mostre que ele pode ser aproximado por:

$$g_{ef} = g(1 - 3,5 \times 10^{-3} \cos^2 \lambda)\,.$$

Esboce o gráfico para $-\dfrac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \dfrac{\pi}{2}$ e interprete o resultado.

6.29) Se os objetos que estão no equador tivessem peso nulo, qual seria o período de rotação da Terra (duração de um dia)?

O último termo da equação (6.37), $-2\,m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, representa a *força de Coriolis*. É uma força que depende da velocidade da partícula e da velocidade angular de rotação da Terra e o seu módulo é:

$$\left| -2\,m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \right| = 2\,m\,\omega\,v'\,\operatorname{sen}\beta\,,$$

onde β é o ângulo entre $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}'$. É interessante que se compare o peso de uma partícula de massa m com a força de Coriolis que age sobre essa partícula durante o seu movimento. Tomando-se, então, a razão entre essas forças, tem-se:

$$\frac{\left|\mathbf{F}_{\text{Cor}}\right|}{\left|\mathbf{F}_{\text{peso}}\right|} = \frac{2\,m\,\omega\,v'\,\operatorname{sen}\beta}{m\,g} \leq \frac{2\,\omega\,v'}{g}\,.$$

A menos que v' seja muito grande, esta razão é muito pequena. Para uma velocidade típica de $30\,\mathtt{m/s}$ ($108\,\mathtt{km/h}$) é menor que $4,5 \times 10^{-4}$, isto é, a magnitude da força de Coriolis representa menos de $0,05\,\%$ do peso da partícula. Se a velocidade for da ordem de $1000\,\mathtt{m/s}$, essa razão é menor que $0,015$. Isto mostra que, mesmo a essa velocidade, a magnitude da força de Coriolis é menor do que $1,5\,\%$ do peso da partícula. A conclusão que pode ser tirada desta comparação é que *a força de Coriolis tem uma magnitude realmente pequena quando age sobre as partículas em movimento nas proximidades da superfície da Terra. Ela pode ser desprezada em muitos problemas*, especialmente naqueles que envolvem *intervalo de tempo curto, velocidade baixa, extensão espacial*

e massa da partícula pequenas. Entretanto, *existem situações que envolvem intervalo de tempo longo, velocidade alta, massa e extensão espacial grandes* em que os efeitos da força de Coriolis *são apreciáveis* e, às vezes, até devastadores. Portanto, é importante que se conheça as situações em que os efeitos das forças de Coriolis sobre o movimento das partículas, nas proximidades da superfície da Terra, são apreciáveis.

Considere um observador em repouso num referencial inercial S fora da Terra. Ele observa uma partícula movendo-se em linha reta passando por cima do polo norte terrestre, como esquematizado do lado esquerdo da Fig. 6.25 (a). O mesmo movimento, quando visto por um observador em repouso no polo norte (referencial S'), a trajetória da partícula é desviada para a direita por causa do efeito da força de Coriolis. O esboço do lado direito da Fig. 6.25 (a) é a da trajetória que o observador no polo norte vê. Esse efeito de desviar a tra-

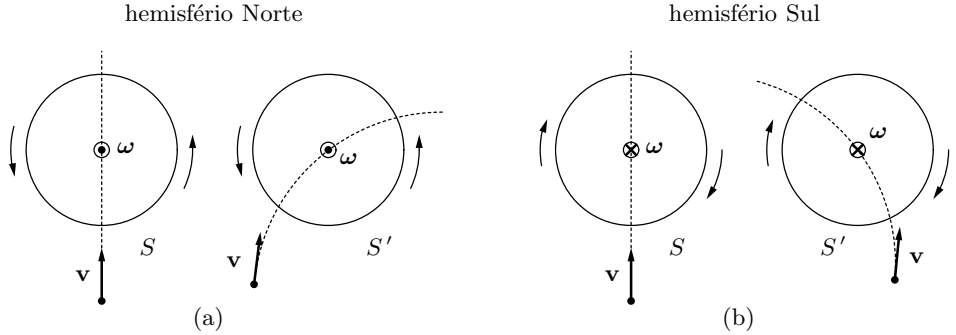

Fig. 6.25:

jetória da partícula para a direita persiste em todos os movimentos que ocorrem no hemisfério norte. Os esboços da Fig. 6.25 (b) são os esquemas análogos do movimento acima com um observador inercial (referencial S) e com um observador no referencial da Terra (referencial S') estando, agora, no polo sul. Note que enquanto o observador inercial vê a partícula movendo-se numa trajetória retilínea, o observador terrestre vê essa mesma trajetória desviando-se para a esquerda, ou seja, o efeito da força de Coriolis é no sentido contrário ao do hemisfério norte. Como no hemisfério norte, o efeito de desviar a trajetória para a esquerda é observado em todos os movimentos da partícula que ocorrem no hemisfério sul. Todas estas descrições serão desenvolvidas formalmente a seguir.

Para os estudos do movimento de uma partícula nas proximidades da superfície da Terra, as distâncias percorridas pela partícula serão consideradas suficientemente pequenas, mesmo que envolvam extensões razoáveis, para que as variações da força gravitacional e da centrífuga possam ser desprezadas. Dian-

te desta hipótese, o efeito combinado dessas duas forças será resumido em $\mathbf{g}_{ef}$, dada por (6.38), e será considerado $\mathbf{g}_{ef} = \text{constante}$. O maior desvio da direção de $\mathbf{g}_{ef}$ em relação à de $\mathbf{g}$ é $6'$ e a diferença na magnitude é menor do que $0,4\%$. Por isso, se tomar $\mathbf{g}_{ef} \approx \mathbf{g}$, o erro que se comete é, ainda, bastante pequeno. Assim, esta hipótese será mantida no resto da secção e a geometria da Terra será aproximada por uma esfera de raio R_T. Nessas condições, a equação diferencial (6.37) que descreve o movimento da partícula, no referencial fixo na superfície da Terra, passa a ser:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}}' = m\,\mathbf{g} - 2\,m\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{F}\,. \tag{6.41}$$

Existem diversas maneiras de se proceder para aplicar esta equação. Aqui será considerado o procedimento comum de se adotar um referencial com três eixos cartesianos ortogonais de uma maneira especial. Considere, então, um ponto O da superfície da Terra de latitude λ. Este ponto é a origem do sistema de eixos cartesianos ortogonais que será adotado a partir de agora. Os eixos Ox_1', Ox_2' e Ox_3' são escolhidos da seguinte maneira. A partir do ponto O, o eixo Ox_1' aponta para o leste, o eixo Ox_2' aponta para o norte e, finalmente, o eixo Ox_3' aponta verticalmente para cima. Os vetores unitários $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ da Fig. 6.26 representam as respectivas direções e os sentidos destes três eixos. Escolhidos desta maneira, o plano $x_1'x_2'$ tangencia a superfície da Terra e qualquer direção sobre este plano é a da *horizontal*. A orientação dos eixos ora adotada será mantida, independentemente do hemisfério que se encontra para se estudar os movimentos de uma partícula. Deve-se lembrar que foi adotada a convenção que a latitude λ varia no intervalo $-\dfrac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \dfrac{\pi}{2}$. Aém disso, os valores positivos de λ representam o hemisfério norte e os negativos o hemisfério sul. Neste sistema, a velocidade angular de rotação da Terra, $\boldsymbol{\omega}$, pode ser escrita em termos das componentes como:

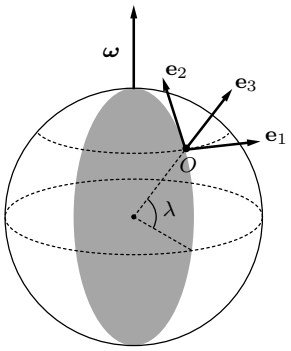

Fig. 6.26:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_2\,\omega\,\cos\,\lambda + \mathbf{e}_3\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,. \tag{6.42}$$

A Fig. 6.27 é um corte da Terra num plano que passa pelo seu centro e por um dos meridianos. Esta figura, mostra o sistema de eixos no hemisfério norte e no sul e as componentes de $\boldsymbol{\omega}$ em relação a esse sistema de eixos, nos dois hemisférios. Note que a componente vertical de $\boldsymbol{\omega}$ muda o sentido em relação à orientação de $\mathbf{e}_3$, quando se passa de um hemisfério para o outro, ao passo que

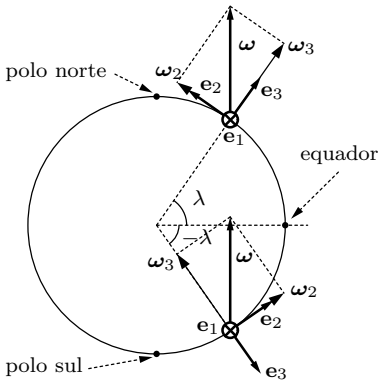

Fig. 6.27:

a componente horizontal (só tem na direção de $\mathbf{e}_2$) *não* muda o sentido em relação à orientação de $\mathbf{e}_2$. Utilizando-se (6.42), a força de Coriolis pode ser escrita em termos de componentes neste sistema de eixos como:

$$-\,2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{e}_1\,m(2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_2' - 2\,\omega\,\cos\lambda\,\dot{x}_3')+ \\ -\,\mathbf{e}_2\,m\,2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_1' + \mathbf{e}_3\,m\,2\,\omega\,\cos\lambda\,\dot{x}_1'\,. \qquad (6.43)$$

Observe que, em contraste com as componentes de $\boldsymbol{\omega}$, a componente vertical da força de Coriolis *não* muda o sentido em relação à orientação de $\mathbf{e}_3$, mas a componente horizontal na direção de $\mathbf{e}_2$ sempre muda o sentido em relação ao de $\mathbf{e}_2$, quando se muda de um hemisfério a outro. Já a componente na direção de $\mathbf{e}_1$ possui um termo que não muda o sentido e um outro que muda. Substituindo-se (6.42) e (6.43) em (6.41), as suas componentes resultam no sistema de equações diferenciais de segunda ordem seguinte:

$$\ddot{x}_1' = 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_2' - 2\,\omega\,\cos\lambda\,\dot{x}_3' + \frac{F_1}{m}\,,$$

$$\ddot{x}_2' = -\,2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_1' + \frac{F_2}{m} \qquad (6.44)$$

$$\text{e} \qquad \ddot{x}_3' = -\,g + 2\,\omega\,\cos\lambda\,\dot{x}_1' + \frac{F_3}{m}\,,$$

onde F_1, F_2 e F_3 são as componentes de $\mathbf{F}$. A equação (6.41), escrita nesta forma, deixa evidente que a componente vertical da força de Coriolis pode reforçar ou diminuir a aceleração da gravidade, g, embora ela seja desprezível se $\dot{x}_1'$ não for grande. Para se ter uma idéia da importância do papel da força de Coriolis, é necessário que se tenha em mente a ordem de grandeza da sua magnitude em cada situação do movimento em estudo. Geralmente, ela é pequena quando comparada com outras forças envolvidas e só tem importância, como mencionado antes, quando o movimento se processa em grandes distâncias, intervalos de tempo longos, grandes massas ou velocidades razoavelmente altas.

O sistema (6.44) é o conjunto de *equações básicas* para se estudar qualquer movimento de uma partícula nas proximidades da superfície da Terra. Algumas situações serão analisadas com a aplicação de (6.44).

6.3.1 Partícula em Queda Livre

Suponha que, de uma altura h em relação à superfície da Terra, uma partícula de massa m foi abandonada em repouso. As equações (6.44) para este caso ficam:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1' = 2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda\,\dot{x}_2' - 2\,\omega\ \cos\,\lambda\,\dot{x}_3'\,, \\ &\ddot{x}_2' = -\,2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda\,\dot{x}_1' \\ \text{e}\qquad &\ddot{x}_3' = -\,g + 2\,\omega\ \cos\,\lambda\,\dot{x}_1'\,. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Se se escolher a origem do referencial no ponto da superfície situado na mesma vertical da partícula, as condições iniciais deste movimento são:

$$\begin{aligned} &x_1'(0) = 0\,, \qquad &&\dot{x}_1'(0) = 0\,; \\ &x_2'(0) = 0\,, \qquad &&\dot{x}_2'(0) = 0 \\ \text{e}\qquad &x_3'(0) = h\,, \qquad &&\dot{x}_3'(0) = 0\,. \end{aligned} \tag{6.46}$$

No caso do sistema de equações diferenciais (6.45) é possível obter uma solução exata sem grandes dificuldades. Entretanto, se se observar que nas equações diferenciais (6.45), têm-se: $|2\,\omega\ \cos\,\lambda| \leq 2\,\omega$ e $|2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda| \leq 2\,\omega$ e, também, que $2\,\omega \approx 1,5 \times 10^{-4}\,\mathtt{s}^{-1}$, as acelerações devidas à força de Coriolis devem ser pequenas, especialmente no início do movimento, porque as velocidades envolvidas não são grandes por causa das condições iniciais nas velocidades em (6.46). Assim, é preferível adotar uma solução pela técnica de aproximações sucessivas onde as correções são introduzidas sucessivamente.

Se se denotar por $x_1'^{(0)}$, $x_2'^{(0)}$ e $x_3'^{(0)}$ como primeira aproximação das soluções (isto é, a aproximação de ordem zero) do sistema (6.45), as soluções com correções de primeira ordem, denotadas por $x_1'^{(1)}$, $x_2'^{(1)}$ e $x_3'^{(1)}$, são obtidas introduzindo-se $x_1'^{(0)}$, $x_2'^{(0)}$ e $x_3'^{(0)}$ no membro direito do sistema (6.45). De maneira semelhante, as soluções $x_1'^{(2)}$, $x_2'^{(2)}$ e $x_3'^{(2)}$, com segunda correção (correção de segunda ordem), são obtidas substituindo-se $x_1'^{(1)}$, $x_2'^{(1)}$ e $x_3'^{(1)}$ no membro direito de (6.45). E, assim, repete-se o procedimento sucessivamente. Observe que, nesta notação, o índice superior aumenta à medida que novas correções são introduzidas. Dessa forma, para as soluções com $k-$ésima correção $x_1'^{(k)}$, $x_2'^{(k)}$ e $x_3'^{(k)}$, o sistema de equações diferenciais (6.45) pode ser escrita, formalmente, como:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1'^{(k)} = 2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda\,\dot{x}_2'^{(k-1)} - 2\,\omega\ \cos\,\lambda\,\dot{x}_3'^{(k-1)}\,, \\ &\ddot{x}_2'^{(k)} = -\,2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda\,\dot{x}_1'^{(k-1)} \\ \text{e}\qquad &\ddot{x}_3'^{(k)} = -\,g + 2\,\omega\ \cos\,\lambda\,\dot{x}_1'^{(k-1)}\,. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Como $\dot{x}_i'(0) = 0$ para $i = 1, 2, 3$ no presente problema [ver (6.46)], as equações diferenciais de partida são:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_1'^{(0)} = 0\,, \\ & \ddot{x}_2'^{(0)} = 0 \\ \text{e} \qquad & \ddot{x}_3'^{(0)} = -\,g\,. \end{aligned}$$

A primeira integração destas equações resultam em:

$$\dot{x}_1'^{(0)}(t) = c_1\,, \qquad \dot{x}_2'^{(0)}(t) = c_2 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}_3'^{(0)}(t) = c_3 - g\,t\,.$$

Impondo as condições iniciais (6.46) das velocidades, obtém-se:

$$\dot{x}_1'^{(0)}(t) = 0\,, \qquad \dot{x}_2'^{(0)}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}_3'^{(0)}(t) = -\,g\,t\,.$$

Estas equações podem ser facilmente integradas mais uma vez e chega-se a:

$$x_1'^{(0)}(t) = d_1\,, \qquad x_2'^{(0)}(t) = d_2 \qquad \text{e} \qquad x_3'^{(0)}(t) = d_3 - \frac{1}{2}\,g\,t^{\,2}\,.$$

As condições iniciais (6.46) das posições conduzem a conjunto de soluções na aproximação de ordem zero dado por:

$$x_1'^{(0)}(t) = 0\,, \qquad x_2'^{(0)}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad x_3'^{(0)}(t) = h - \frac{1}{2}\,g\,t^{\,2}\,,$$

que nada mais é do que as soluções para queda livre quando não se considera a força de Coriolis. O que pode ser afirmado, então, é que a descrição principal da queda livre de uma partícula provém da solução usual das equações diferenciais que contém apenas a força da gravidade.

A primeira correção será introduzida agora. Ao substituir as velocidades $\dot{x}_1'^{(0)}(t)$, $\dot{x}_2'^{(0)}(t)$ e $\dot{x}_3'^{(0)}(t)$, obtidas acima, no membro direito do sistema (6.47), as equações diferenciais (6.47) para a primeira correção ficam:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_1'^{(1)} = -\,2\,\omega\,\cos\,\lambda\,(-\,g\,t) = 2\,\omega\,\cos\,\lambda\,g\,t\,, \\ & \ddot{x}_2'^{(1)} = 0 \\ \text{e} \qquad & \ddot{x}_3'^{(1)} = -\,g\,. \end{aligned}$$

As integrações destas equações são, também, triviais. As soluções que satisfazem as condições iniciais (6.46) são:

$$\dot{x}_1'^{(1)}(t) = \omega\,(\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,2}\,, \qquad \dot{x}_2'^{(1)}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}_3'^{(1)}(t) = -\,g\,t\,.$$

para velocidades e

$$x_1'^{(1)}(t) = \frac{1}{3}\,\omega\,(\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,3}\,, \qquad x_2'^{(1)}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad x_3'^{(1)}(t) = h - \frac{1}{2}\,g\,t^{\,2}\,,$$

para as coordenadas. Observe que, após a primeira correção, apareceu um termo na solução que indica um *desvio para leste*, representado por $x_1'^{(1)}(t)$. Impondo que $x_3'^{(1)}(t_q) = 0$, obtém-se o tempo gasto para atingir o solo, t_q, dado por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,.$$

Substituindo-se este resultado em $x_1'^{(1)}(t_q)$, tem-se esse desvio em termos da altura, h, na qual a partícula fora abandonada. Assim, o desvio para o leste é:

$$x_1'^{(1)} = \sqrt{\frac{2\,h^3}{g}}\;\frac{2}{3}\,\omega\,\cos\,\lambda\,.$$

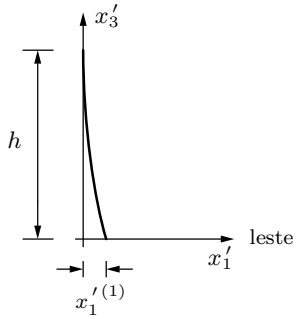

Fig. 6.28:

O que significa este desvio para leste? Significa que a partícula cai a leste do ponto verticalmente abaixo de onde ela foi abandonada, como ilustrado na Fig. 6.28. Para se ter uma idéia da ordem de grandeza deste desvio, considere uma partícula abandonada a $100\,\mathtt{m}$ de altura, em algum lugar de latitude 45^o. O tempo de queda para esta altura é $t_q \approx 4,5\,\mathtt{s}$ e o desvio para leste neste caso é $\approx 1,6\,\mathtt{cm}$. Este número é realmente pequeno comparado com os $10000\,\mathtt{cm}$ de queda. Em termos percentuais ele representa apenas 0,016% de h neste caso. A Fig. 6.28 mostra, também, a trajetória da partícula em queda em relação ao referencial fixo na superfície da Terra. É claro que o desvio do desenho está exagerado.

Antes de prosseguir na obtenção das soluções com as correções de ordem superior, é interessante notar que o desvio para leste, que apareceu na primeira correção acima, pode ser, também, avaliado em relação a um referencial inercial fixo no espaço, fora da Terra. Nesse referencial não há força de Coriolis, mas o cálculo mostra esse desvio e o resultado que se chega é o mesmo do obtido acima.

Considere, então, um referencial inercial qualquer fixo fora da Terra. A partícula foi abandonada no ponto A da Fig. 6.29 (a) da página 63. Em relação a este referencial, a velocidade inicial (instante $t = 0$) da partícula é $\mathbf{v}_0$ que aponta para o leste e é perpendicular ao plano que contém o eixo de rotação da Terra e o ponto A [plano α, em cinza escuro, na Fig. 6.29 (a)]. Enquanto

a partícula cai, este plano roda e chega na posição do plano β no instante t_q que a partícula atinge o solo. O ponto verticalmente abaixo de A, que é o O, roda também junto com o plano α e chega na posição do C do plano β no instante t_q. Depois de ser abandonada no ponto A, a partícula move-se num

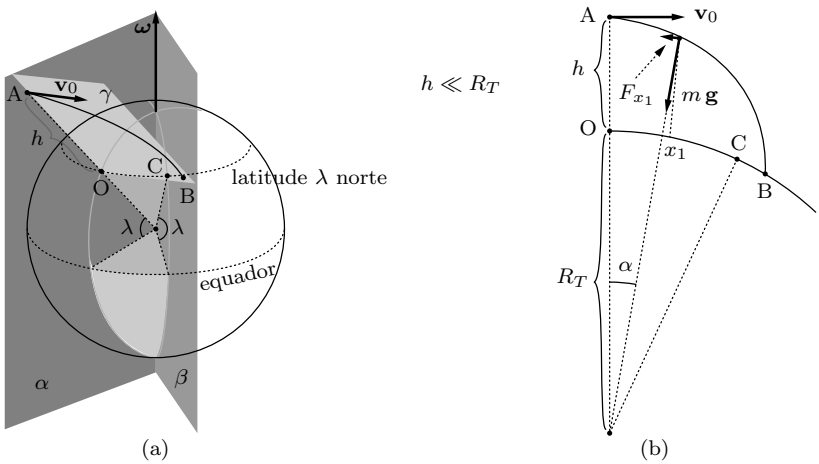

Fig. 6.29: Queda Livre em Relação ao Referencial Inercial.

plano γ, que contém a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ e é perpendicular ao plano α, como mostrado na Fig. 6.29 (a). O ponto B, do plano γ, é onde a partícula atinge o solo. Além de não estar em escala, o esboço da trajetória da partícula neste plano está exagerada para tornar a representação clara. A Fig. 6.29 (b) mostra o plano γ com os detalhes relevantes ampliados. Obviamente, aqui também não estão em escala; mas, o esboço permite dar uma idéia correta da situação. O ponto A dista (R_T+h) cos λ do eixo de rotação da Terra. Por isso, a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ da partícula tem módulo

$$|\mathbf{v}_0| = v_{01} = \omega\,(R_T + h)\,\cos\,\lambda\,,$$

neste ponto. Como $h \ll R_T$, após um intervalo de tempo t, a partícula percorreu uma distância horizontal x_1 dada aproximadamente por:

$$x_1 = w\,(R_T + h)\,(\cos\,\lambda)\,t \approx w\,R_T\,(\cos\,\lambda)\,t\,.$$

Com isso, aparece uma componente muito pequena da força da gravidade, na direção da linha de latitude, que é:

$$F_{x_1} \approx -\,m\,g\,\operatorname{sen}\alpha \approx -\,m\,g\,\frac{x_1}{R_T} = -\,m\,g\,\omega\,(\cos\,\lambda)\,t\,,$$

conforme ilustrado na Fig. 6.29 (b). Portanto, a equação diferencial do movimento nesta direção fica:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = - g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t \, .$$

Integrando-se uma vez com a condição $\dot{x}_1 = v_{01}$, obtém-se:

$$\frac{d x_1}{d t} = \omega \, (R_T + h) \, \cos \, \lambda - \frac{1}{2} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t^2 \, .$$

A segunda integração, sob a condição $x_1(0) = 0$, resulta em:

$$x_1(t) = \omega \, (R_T + h) \, (\cos \, \lambda) \, t - \frac{1}{6} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t^3 \, .$$

Entretanto, a superfície da Terra também está em movimento com uma velocidade $\omega \, R_T$. Se se considerar o intervalo de tempo t_q da partícula atingir o solo, o ponto O (que estava verticalmente abaixo de A) chegou até o ponto C . Assim, a distância $\overline{\mathrm{OC}} = \omega \, R_T \, (\cos \, \lambda) \, t_q$. Mas, a partícula atingiu o solo no ponto B que é obtido de $x_1(t_q)$. Portanto, tem-se:

$$\overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{CB}} = \text{deslocamento efetivo para leste} = \text{desvio para leste} \, .$$

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{CB}} &= \omega \, (R_T + h) \, (\cos \, \lambda) \, t_q - \frac{1}{6} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t_q^3 - \omega \, R_T \, (\cos \, \lambda) \, t_q = \\ &= \omega \, h \, (\cos \, \lambda) \, t_q - \frac{1}{6} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t_q^3 \, . \end{aligned}$$

Lembre que a partícula cai uma distância h no intervalo de tempo t_q , o que significa que $h = \dfrac{1}{2} \, g \, t_q^2$. Substituindo na expressão acima, tem-se:

$$\overline{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t_q^3 - \frac{1}{6} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t_q^3 = \frac{1}{3} \, g \, \omega \, (\cos \, \lambda) \, t_q^3 \, ,$$

que é o resultado obtido anteriormente. Como já foi afirmado antes, tanto a descrição do referencial inercial S quanto a do referencial fixo na Terra (não inercial) S' prevêem um desvio para o leste e os resultados são coincidentes.

Correções de Ordem Superior

Para se obter as soluções que incluem as correções de segunda ordem, substitui-se $\dot{x}_1'^{(1)}$, $\dot{x}_2'^{(1)}$ e $\dot{x}_3'^{(1)}$ no membro direito de (6.47), chegando-se ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1'^{(2)} = -\,2\,\omega\,\cos\,\lambda\,(-\,g\,t) = 2\,\omega\,(\cos\,\lambda)\,g\,t\,, \\ &\ddot{x}_2'^{(2)} = -\,2\,\omega^{\,2}\,(\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,2} \\ \text{e}\qquad &\ddot{x}_3'^{(2)} = -\,g + 2\,\omega^{\,2}\,(\cos^{\,2}\lambda)\,g\,t^{\,2}\,. \end{aligned}$$

A primeira integração com as condições sobre as componentes da velocidade resulta em:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1'^{(2)} = \omega\,(\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,2}\,, \\ &\dot{x}_2'^{(2)} = -\,\frac{2}{3}\,\omega^{\,2}\,(\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,3} \\ \text{e}\qquad &\dot{x}_3'^{(2)} = -\,g\,t + \frac{2}{3}\,\omega^{\,2}\,(\cos^{\,2}\lambda)\,g\,t^{\,3}\,. \end{aligned}$$

Uma nova integração com as condições iniciais para as posições levam a:

$$\begin{aligned} &x_1'^{(2)} = \frac{1}{3}\,\omega\,(\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,3}\,, \\ &x_2'^{(2)} = -\,\frac{1}{6}\,\omega^{\,2}\,(\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\cos\,\lambda)\,g\,t^{\,4} \\ \text{e}\qquad &x_3'^{(2)} = h - \frac{1}{2}\,g\,t^{\,2} + \frac{1}{6}\,\omega^{\,2}\,(\cos^{\,2}\lambda)\,g\,t^{\,4}\,. \end{aligned}$$

Note que apareceu uma correção $\frac{1}{6}\,\omega^{\,2}\,(\cos^{\,2}\lambda)\,g\,t^{\,4}$ no termo da vertical, $x_3'^{(2)}(t)$. Para $\lambda = 45^{\,o}$ ela é $\dfrac{1}{6}\,(7{,}3\times10^{\,-\,5})^{\,2}\,\dfrac{1}{2}\,9{,}8\,t^{\,4} \approx 4{,}4\times10^{\,-\,9}\,t^{\,4}$, que é muito pequeno. Embora pequeníssima, apareceu um efeito da força de Coriolis neste problema no sentido de diminuir a aceleração da gravidade. A segunda correção mostra, também, que existe um desvio para o sul. Ele é obtido por $x_2'^{(2)}(t_q)$. Substituindo-se t_q em $x_2'^{(2)}$ acima, obtém-se:

$$x_2'^{(2)} = -\,\frac{2\,\omega^{\,2}\,h^{\,2}}{3\,g}\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\cos\,\lambda\,.$$

Para $\lambda = 45^{\,o}$ e $h = 100\,\mathtt{m}$, isto é da ordem de $-\,2\times10^{\,-\,4}\,\mathtt{cm}$, que representa um desvio para o sul realmente pequeno.

Solução Exata

O sistema de equações (6.45) para queda livre possui solução exata que pode ser obtida com o procedimento a seguir.

Em primeiro lugar, calcula-se a derivada em relação ao tempo da primeira equação de (6.45) que resulta em:

$$\dddot{x}'_1 = 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\ddot{x}'_2 - 2\,\omega\,\cos\lambda\,\ddot{x}'_3\,.$$

Agora, buscando $\ddot{x}'_2$ e $\ddot{x}'_3$ da segunda e da terceira equação de (6.45) e substituindo-as na equação acima, obtém-se:

$$\dddot{x}'_1 = -\,4\,\omega^{\,2}\,\operatorname{sen}^{\,2}\lambda\,\dot{x}'_1 + 2\,\omega\,g\,\cos\lambda - 4\,\omega^{\,2}\,\cos^{\,2}\lambda\,\dot{x}'_1\,.$$

Um pouco de rearranjo algébrico chega-se a:

$$\dddot{x}'_1 + 4\,\omega^{\,2}\,\dot{x}'_1 = 2\,\omega\,g\,\cos\lambda\,, \tag{6.48}$$

ou seja, as três equações diferenciais acopladas foram completamente desacopladas e reduziram-se a uma única equação diferencial linear de segunda ordem, não homogênea, em $\dot{x}'_1$. A solução desta equação[13] é:

$$\dot{x}'_1(t) = A\,\cos(2\,\omega\,t) + B\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + \frac{g}{2\,\omega}\,\cos\lambda\,, \tag{6.49}$$

onde A e B são constantes de integração. Integrando-se em relação a t, o resultado é:

$$x'_1(t) = \frac{A}{2\,\omega}\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) - \frac{B}{2\,\omega}\,\cos(2\,\omega\,t) + \Big(\frac{g}{2\,\omega}\,\cos\lambda\Big)\,t + D_1\,, \tag{6.50}$$

sendo D_1, uma outra constante de integração. Substituindo-se (6.49) na segunda e na terceira equação de (6.45), têm-se:

$$\ddot{x}'_2 = -\,2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\Big[A\,\cos(2\,\omega\,t) + B\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + \frac{g}{2\,\omega}\,\cos\lambda\Big]$$

e

$$\begin{aligned}\ddot{x}'_3 &= -\,g + 2\,\omega\,\cos\lambda\Big[A\,\cos(2\,\omega\,t) + B\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + \frac{g}{2\,\omega}\,\cos\lambda\Big] = \\ &= -\,(\operatorname{sen}^{\,2}\lambda)\,g + 2\,\omega\,\cos\lambda\big[A\,\cos(2\,\omega\,t) + B\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t)\big]\,.\end{aligned}$$

Ao integrar estas equações em relação a t, obtém-se, respectivamente,

$$\dot{x}'_2(t) = -\,\operatorname{sen}\lambda\big[A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) - B\,\cos(2\,\omega\,t) + g\,(\cos\lambda)\,t\big] + D_2$$

e

$$\dot{x}'_3(t) = -\,(\operatorname{sen}^{\,2}\lambda)\,g\,t + \cos\,\lambda\big[A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) - B\,\cos(2\,\omega\,t)\big] + D_3\,,$$

[13] Ver Apêndice B do volume 1.

onde D_2 e D_3 são constantes de integração. Uma segunda integração conduz a

$$x_2'(t) = \operatorname{sen}\lambda\Big[\frac{A}{2\,\omega}\,\cos(2\,\omega\,t) + \frac{B}{2\,\omega}\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) - \frac{1}{2}\,g\,(\cos\lambda)\,t^{\,2}\Big] + \\ + D_2\,t + D_2'$$

e

$$x_3'(t) = -\,\frac{1}{2}\,(\operatorname{sen}^{\,2}\lambda)\,g\,t - \cos\lambda\Big[\frac{A}{2\,\omega}\,\cos(2\,\omega\,t) + \frac{B}{2\,\omega}\,\cos(2\,\omega\,t)\Big] + \\ + D_3\,t + D_3'\,,$$

tendo D_2' e D_3' como novas constantes de integração. Junto com (6.50) as duas funções acima são soluções exatas de (6.45). Note, no entanto, que há sete constantes de integração, mas apenas seis condições iniciais para determiná-las. Por que aconteceu isso? A resposta está no fato que o sistema de equações (6.45) e a equação (6.48) não são completamente equivalentes. O que pode ser afirmado com certeza é que *toda* solução de (6.45) é também solução de (6.48). Mas, a recíproca não é verdadeira, isto é, *nem toda* solução de (6.48) é solução de (6.45). Então, dentre as soluções de (6.48) acima, deve-se selecionar aquelas que são também soluções de (6.45). Isto é feito impondo que $x_1'(t)$, $x_2'(t)$ e $x_3'(t)$ acima satisfaçam a primeira equação de (6.45), ou seja,

$$\ddot{x}_1' = 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_2' - 2\,\omega\,\cos\lambda\,\dot{x}_3'\,.$$

Usando $\ddot{x}_1'(t)$, $\dot{x}_2'(t)$ e $\dot{x}_3'(t)$ obtidos acima, tem-se:

$$-\,2\,\omega\,A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + 2\,\omega\,B\,\cos(2\,\omega\,t) = -\,2\,\omega\,\operatorname{sen}^{\,2}\lambda\,A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + \\ + 2\,\omega\,\operatorname{sen}^{\,2}\lambda\,B\,\cos(2\,\omega\,t) - (2\,\omega\,g\,\operatorname{sen}^{\,2}\lambda\,\cos\lambda)\,t + \\ + 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,D_2 + (2\,\omega\,\cos\lambda\,\operatorname{sen}^{\,2}\lambda)\,g\,t + \\ - 2\,\omega\,(\cos^{\,2}\lambda)\,A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + 2\,\omega\,(\cos^{\,2}\lambda)\,B\,\cos(2\,\omega\,t) + \\ - 2\,\omega\,(\cos\lambda)\,D_3$$

No membro direito há dois termos que se cancelam. Reagrupando os que sobraram, chega-se a:

$$-\,2\,\omega\,A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + 2\,\omega\,B\,\cos(2\,\omega\,t) = -\,2\,\omega\,(\operatorname{sen}^{\,2}\lambda + \cos^{\,2}\lambda)\,A\,\operatorname{sen}(2\,\omega\,t) + \\ + 2\,\omega\,(\operatorname{sen}^{\,2}\lambda + \cos^{\,2}\lambda)\,B\,\cos(2\,\omega\,t) + 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,D_2 - 2\,\omega\,\cos\lambda\,D_3$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}\lambda\,D_2 - D_3 = 0\,. \tag{6.51}$$

Então, as constantes D_2 e D_3 estão relacionadas por esta equação. Impondo as condições iniciais $\dot{x}_2'(0) = 0$ e $\dot{x}_3'(0) = 0$, obtém-se, respectivamente,

$$D_2 = -\,\operatorname{sen}\lambda\,B$$

e

$$D_3 = \cos\lambda\,B\,.$$

Dividindo a primeira pela segunda e rearranjando, resulta em:

$$D_2 + \operatorname{tg}\lambda\, D_3 = 0\,;$$

que, juntamente com (6.51) forma um sistema linear e homogêneo. Como o determinante dos coeficientes é:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\lambda & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\lambda \end{vmatrix} = \operatorname{tg}^2\lambda + 1 = \sec^2\lambda \neq 0\,,$$

este sistema admite somente solução trivial, ou seja, $D_2 = 0$ e $D_3 = 0$. As relações de B com D_2 e D_3 implicam que $B = 0$ também. A condição inicial $x_1'(0) = 0$ conduz à equação $D_1 = \dfrac{B}{2\,\omega}$. Disto, resulta que $D_1 = 0$. Impondo o restante das condições iniciais: $\dot{x}_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$ e $x_3'(0) = h$, obtêm-se:

$$A = -\frac{g}{2\,\omega}\,\cos\lambda\,, \qquad D_2' = \frac{g}{4\,\omega^2}\,\operatorname{sen}\lambda\,\cos\lambda \qquad \text{e} \qquad D_3' = h - \frac{g}{4\,\omega^2}\,\cos^2\lambda\,.$$

Portanto, as soluções exatas de (6.45) são:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \frac{g\,\cos\lambda}{4\,\omega^2}\,\big[2\,\omega\,t - \operatorname{sen}(2\,\omega\,t)\big]\,, \\ x_2'(t) &= \frac{g\,\cos\lambda\,\operatorname{sen}\lambda}{4\,\omega^2}\,\big[1 - \cos(2\,\omega\,t)\big] - \frac{g\,\cos\lambda\,\operatorname{sen}\lambda}{2}\,t^2 \qquad (6.52) \\ \text{e} \qquad x_3'(t) &= h - \frac{g\,\operatorname{sen}^2\lambda}{2}\,t^2 + \frac{g\,\cos^2\lambda}{4\,\omega^2}\,\big[\cos(2\,\omega\,t) - 1\big]\,. \end{aligned}$$

A primeira impressão desta solução exata é que não tem relação alguma com as soluções obtidas pelas aproximações sucessivas. Mas, se se lembrar que se tem $2\,\omega \approx 1,5 \times 10^{-4}\,\mathtt{s}^{-1}$, o argumento dos senos e cossenos são pequenos. Então, utilizando-se o fato que $\operatorname{sen}\xi \approx \xi - \dfrac{1}{6}\,\xi^3$ obtém-se a aproximação:

$$x_1'(t) \approx \frac{g\,\cos\lambda}{4\,\omega^2}\,\Big[2\,\omega\,t - 2\,\omega\,t + \frac{1}{6}\,(2\,\omega\,t)^3\Big] = \frac{1}{3}\,g\,\omega\,(\cos\lambda)\,t^3\,,$$

que coincide com a solução por meio da correção de primeira ordem, $x_1'^{(1)}(t)$. Se se utilizar $\cos\xi \approx 1 - \dfrac{1}{2}\,\xi^2 + \dfrac{1}{24}\,\xi^4$, chega-se aos mesmos resultados obtidos com correção de segunda ordem para $x_2'(t)$ e $x_3'(t)$, ou seja, $x_2'^{(2)}(t)$ e $x_3'^{(2)}(t)$.

6.3.2 Lançamento de um projétil

O problema de lançamento de um projétil estudado em curso de Mecânica em nível básico envolvia somente a força de gravidade, $m\,\mathbf{g}$. A descrição do

movimento de um projétil com apenas esta força é razoávelmente precisa, desde que a extensão do movimento não seja muito grande. A descrição do movimento de uma pedra atirada por um indivíduo pode ser citado como um exemplo deste caso. É claro que, aqui, o efeito do ar, presente na atmosfera, que gera uma força resistiva não está sendo considerado. Em problemas envolvendo um tiro de certas armas de fogo como um rifle ou um canhão, por exemplo, o alcance e a velocidade inicial do projétil é grande. Então, o efeito da força de Coriolis torna-se visível. Nesta subsecção será estudado o efeito desta força no movimento de um projétil lançado nessas condições. Contudo, o efeito da força resistiva gerado pela presença do ar não será considerado por fugir do escopo desta subsecção.

Em algum lugar da latitude λ do hemisfério norte, considere um projétil de massa m lançado contra um alvo localizado no norte a uma distância d, pequena comparada ao raio da Terra. Suponha que o ângulo de lançamento é α em relação à horizontal. A Fig. 6.30 ilustra a projeção do movimento no plano $x_2' x_3'$. As forças que agem nesse projétil são: o peso, $m\,\mathbf{g}$, e a força de Coriolis. Fixando-se o sistema padrão de eixos no ponto de lançamento, as componentes da equação diferencial do movimento são dadas por (6.45). Devido à escolha do referencial, as condições iniciais deste problema são: $x_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$, $x_3'(0) = 0$, $\dot{x}_1'(0) = 0$, $\dot{x}_2'(0) = v_0 \cos\alpha$ e $\dot{x}_3'(0) = v_0 \operatorname{sen}\alpha$, sendo v_0, o módulo do vetor velocidade inicial $\mathbf{v}_0$. As equações (6.45) podem ser resolvidas utilizando-se o método das aproximações sucessivas da subsecção anterior por meio de (6.47). Neste problema, v_0 é grande. Então, (6.47) fica:

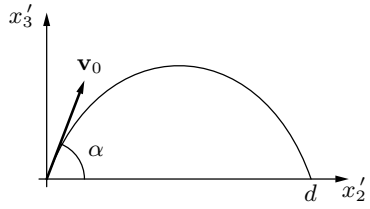

Fig. 6.30:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1' = 2\,\omega(\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_2' - \cos\lambda\,\dot{x}_3')\,, \\ &\ddot{x}_2' = 0 \\ \text{e}\qquad &\ddot{x}_3' = -\,g\,. \end{aligned}$$

A primeira integração das duas últimas equações em relação t, levando-se em conta as condições iniciais para as componentes da velocidade, resulta em:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_2'^{(0)}(t) = v_0\,\cos\alpha \\ \text{e}\qquad &\dot{x}_3'^{(0)}(t) = v_0\,\operatorname{sen}\alpha - g\,t\,. \end{aligned}$$

Considerando-se essas duas velocidades, a primeira equação diferencial torna-se:

$$\ddot{x}_1'^{(1)} = 2\,\omega\,[\operatorname{sen}\lambda\,v_0\,\cos\alpha - \cos\lambda\,(v_0\,\operatorname{sen}\alpha - g\,t)]\,.$$

Integrando-se uma vez, em relação a t, chega-se a:

$$\dot{x}_1'^{(1)}(t) = 2\,\omega\,v_0\,t\,\operatorname{sen}(\lambda-\alpha) + \omega\,g\,t^{\,2}\,\cos\,\lambda\,.$$

Integrando-se mais uma vez $\dot{x}_1'$, $\dot{x}_2'$ e $\dot{x}_3'$ em relação a t e considerando-se as condições iniciais para as coordenadas, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & x_1'^{(1)}(t) = \omega\,v_0\,t^{\,2}\,\operatorname{sen}(\lambda-\alpha) + \frac{1}{3}\,\omega\,g\,t^{\,3}\,\cos\,\lambda\,, \\ & x_2'^{(0)}(t) = v_0\,t\,\cos\,\alpha \\ \text{e} \qquad & x_3'^{(0)}(t) = \Big(v_0\,\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\,g\,t\Big)\,t\,. \end{aligned}$$

Estas são as soluções em primeira aproximação. Observe que já apareceu um desvio para o leste. Note, também, que $x_2'^{(0)}(t)$ e $x_3'^{(0)}(t)$ são as soluções dos lançamentos de projéteis sem levar em conta a força de Coriolis. Se não houvesse o desvio, o alvo seria atingido num instante t_a quando $x_3'^{(0)}(t_a) = 0$, o que resulta em $t_a = \dfrac{2\,v_0\,\operatorname{sen}\alpha}{g}$. Substituindo-se na primeira solução, $x_1'(t)$, o desvio para leste é dado por:

$$\Delta = x_1'^{(1)}(t_a) = \frac{4\,\omega\,v_0^3}{g^{\,2}}\,\operatorname{sen}^{\,3}\alpha\,\left(\,\operatorname{cotg}\alpha\,\operatorname{sen}\lambda - \frac{1}{3}\,\cos\,\lambda\right).$$

Num problema real, o lançamento de projétil é, geralmente, efetuado por meio de um canhão, por exemplo. Por isso, a velocidade inicial é, em geral, fixa. Assim, é de interêsse expressar o resultado em termos do ângulo de lançamento α e do alcance d. Lembrando que $x_2'^{(0)}(t_a)$ é o alcance, isto pode ser conseguido substituindo-se t_a na expressão de $x_2'^{(0)}(t)$ acima, determinando-se v_0 em termos de α e d, isto é,

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,d}{2\,\operatorname{sen}\alpha\,\cos\,\alpha}}\,.$$

Com isso, o desvio Δ fica:

$$\Delta = \omega\,\sqrt{\frac{2\,d^{\,3}}{g}\,\operatorname{tg}^{\,3}\alpha}\,\left(\,\operatorname{cotg}\alpha\,\operatorname{sen}\lambda - \frac{1}{3}\,\cos\,\lambda\right). \tag{6.53}$$

Este resultado mostra que o projétil errará o alvo de Δ se não se compensar o desvio provocado pela força de Coriolis. Para $d = 40\,\mathtt{km}$, $\lambda = 45^o$ e $\alpha = 45^o$, a distância do desvio é de cerca de $120\,\mathtt{m}$. Este desvio é pequeno quando comparado com a distância do alvo, mas pode ser suficiente para não acertá-lo. Imagine, por exemplo, o caso de tentar destruir um tanque inimigo com um tiro de canhão.

6.3.3 Pêndulo de Foucault

O francês J. B. L. Foucault foi o primeiro físico que, em 1851, demonstrou como uma rotação lenta do plano de oscilação de um pêndulo poderia evidenciar a rotação da Terra ao redor do seu próprio eixo. Considere, então, um pêndulo constituido por uma partícula de massa m, suspensa por meio de um fio inextensível de comprimento ℓ, numa região do hemisfério norte de latitude λ, como ilustrado na Fig. 6.31 (a). Nesta mesma figura, os três vetores unitários básicos, convencionados para o estudo do movimento nas proximidades da superfície da Terra, estão também representados. Este pêndulo, utilizado para esta finalidade, ficou conhecido como *pêndulo de Foucault*. Os detalhes relevantes das forças

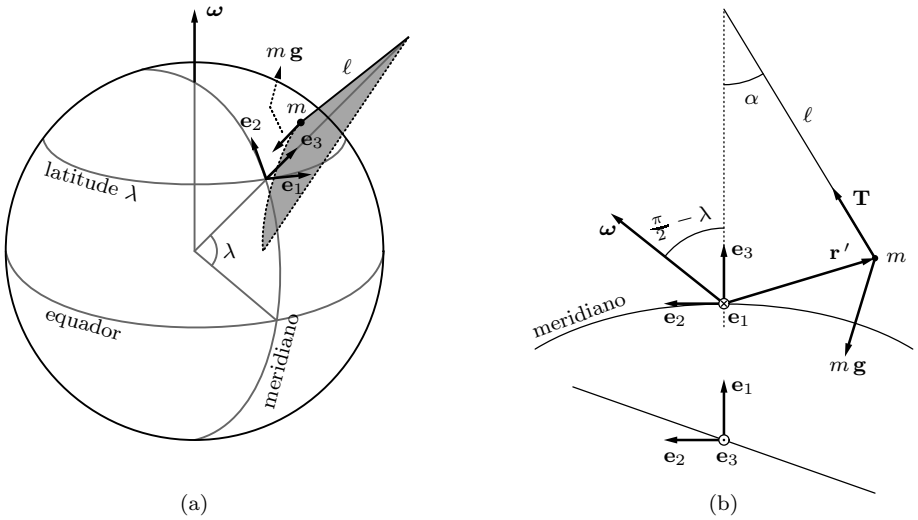

Fig. 6.31: Pêndulo de Foucault.

envolvidas, exceto a de Coriolis, e do referencial adotado para se estudar o pêndulo de Foucault estão ilustrados na Fig. 6.31 (b). Na parte inferior da mesma figura, é mostrada a projeção do movimento no plano horizontal. A equação diferencial deste movimento é, então,

$$m\,\mathbf{a}' = \mathbf{T} + m\,\mathbf{g} - 2\,m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'\,, \tag{6.54}$$

onde $\mathbf{T}$ é a tensão no fio; $\mathbf{v}'$, a velocidade da partícula em relação ao referencial fixo na Terra; $\mathbf{a}'$, a sua aceleração no mesmo referencial e $\mathbf{g}$, a aceleração local da gravidade. A componente vertical da força de Coriolis é menos de $0,01\%$ da força da gravidade. Assim, essa componente é desprezível e a força determinante na magnitude da tensão na corda é a força da gravidade. Se o comprimento da

corda for grande comparada com o deslocamento horizontal, o deslocamento na direção vertical é desprezível e, portanto, pode-se tomar a componente da velocidade na direção vertical como $\dot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{e}_3\,\dot{x}_3' \approx 0$, que é uma aproximação razoável. Então, x_3' é aproximadamente constante e o movimento possui apenas deslocamento na direção horizontal. A componente horizontal da equação diferencial do movimento pode ser obtida da equação (6.45) projetando-a no plano

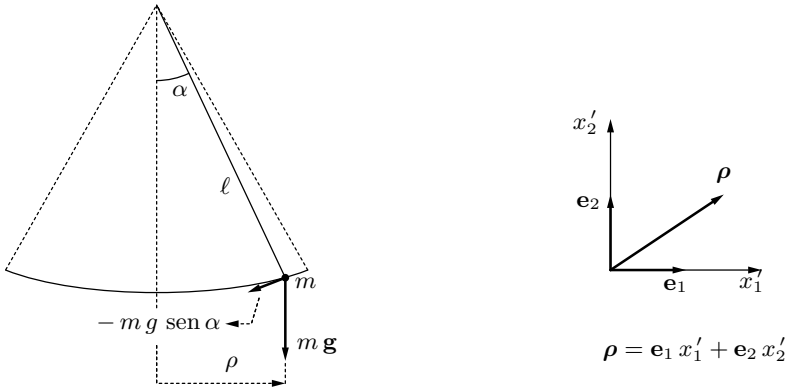

Fig. 6.32:

horizontal, isto é,

$$m\,\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\,m\,g\,\operatorname{sen}\alpha\,\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} - 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}\,,$$

sendo $\boldsymbol{\rho}$, a projeção do vetor de posição no plano horizontal. A Fig. 6.32 (a) e Fig. 6.32 (b) ilustram todas as grandezas presentes nesta equação diferencial, exceto a força de Coriolis. Se $\ell \gg \rho$, tem-se: $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha \approx \dfrac{\rho}{\ell}$. Com estas aproximações, a projeção da equação diferencial do movimento fica:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\,\frac{g}{\ell}\,\boldsymbol{\rho} - 2\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}$$

Como $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}_1\,x_1' + \mathbf{e}_2\,x_2'$, a decomposição desta equação vetorial em componentes segundo as direções $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ da Fig. 6.32 (b) resulta em:

$$\ddot{x}_1' = -\,\frac{g}{\ell}\,x_1' + 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_2'$$

e

$$\ddot{x}_2' = -\,\frac{g}{\ell}\,x_2' - 2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,\dot{x}_1'\,.$$

Multiplicando-se a segunda equação por i e adicionando-se à primeira, membro a membro, obtém-se:

$$\ddot{x}_1' + \mathrm{i}\,\ddot{x}_2' = -\,\omega_p^{\,2}\,(x_1' + \mathrm{i}\,x_2') - \mathrm{i}\,2\,\omega\,\operatorname{sen}\lambda\,(\dot{x}_1' + \mathrm{i}\,\dot{x}_2')\,,$$

sendo $\omega_p = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$. Introduzindo-se a notação $u = x_1' + \mathrm{i}\, x_2'$, como antes, esta equação pode ser reescrita como:

$$\ddot{u} + \mathrm{i}\, 2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda\, \dot{u} + \omega_p^2\, u = 0\,,$$

cuja equação característica é $\beta^2 + \mathrm{i}\, 2\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda\,\beta + \omega_p^2 = 0$. A sua solução é $\beta_\pm = -\,\mathrm{i}\,\omega\ \mathrm{sen}\,\lambda \pm \mathrm{i}\,\omega_1$, onde $\omega_1 = \sqrt{\omega^2\ \mathrm{sen}^2\lambda + \omega_p^2}$. Então, a solução geral da equação diferencial é:

$$u(t) = A\, e^{-\,\mathrm{i}\,\omega\ \mathrm{sen}\lambda\, t}\ \cos(\omega_1\, t + \theta_0)\,,$$

onde A e θ_0 são constantes de integração. Aqui, θ_0 é real enquanto A é uma quantidade complexa. Escrevendo-se $A = |A|\, e^{\,\mathrm{i}\,\gamma}$, onde γ é o argumento de A e é real, a parte real e a imaginária desta função conduzem a:

$$\begin{aligned} & x_1'(t) = |A|\ \cos(\omega\ \mathrm{sen}\lambda\, t - \gamma)\ \cos(\omega_1\, t + \theta_0) \\ \text{e} \qquad & x_2'(t) = -\,|A|\ \mathrm{sen}(\omega\ \mathrm{sen}\lambda\, t - \gamma)\ \cos(\omega_1\, t + \theta_0)\,. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Para $t = 0$, têm-se: $x_1'(0) = |A|\ \cos\gamma\ \cos\theta_0$ e $x_2'(0) = |A|\ \mathrm{sen}\,\gamma\ \cos\theta_0$. Assim, o movimento começa na direção γ em relação a x_1'. À medida que o tempo passa, a amplitude $|A|\ \cos(\omega\ \mathrm{sen}\lambda\, t - \gamma)$ das abscissas x_1' decresce até o instante $\bar{t} = \dfrac{\pi + \gamma}{\omega\ \mathrm{sen}\lambda}$; depois disso, cresce novamente. Enquanto isso, a amplitude $-\,|A|\ \mathrm{sen}(\omega\ \mathrm{sen}\lambda\, t - \gamma)$ das ordenadas x_2' decresce até $\bar{t}\,' = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \gamma}{\omega\ \mathrm{sen}\lambda}$ e depois cresce. Além disso, $\sqrt{x_1'^{\,2} + x_2'^{\,2}} = \rho = |A|\ \cos(\omega_1\, t + \theta_0)$. Dessa forma, estas duas soluções representam uma oscilação de amplitude $|A|$ num plano vertical que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega} = -\,\mathbf{e}_3\,\omega\ \mathrm{sen}\lambda$ ao redor da vertical que passa pelo ponto de suspensão do pêndulo. Note que $-\,\boldsymbol{\Omega}$ é a projeção de $\boldsymbol{\omega}$ na direção desta vertical. Assim, o plano de oscilação do pêndulo gira no sentido contrário ao desta projeção. Como $\omega \approx 7,3 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$, a rotação do plano de oscilação do pêndulo é muito lento. No polo norte, o plano de oscilação completa uma volta em 24 horas no sentido horário, quando se observa o movimento por cima. Em qualquer outra latitude, o período é maior e é completado em $\left|\dfrac{2\,\pi}{\omega\ \mathrm{sen}\lambda}\right|$. Na latitude 45^o, este período é ≈ 34 horas, enquanto no equador ($\lambda = 0$) é infinito, ou seja, o plano não gira (ω fica horizontal no equador). No hemisfério sul, tem o mesmo efeito e as soluções são as mesmas. A diferença é que o plano executa uma rotação no sentido contrário ao do hemisfério norte (anti-horário, quando se observa o movimento por cima). Então, no polo sul o período de rotação é de 24 horas. São Paulo está localizada na

latitude $\lambda \approx -23^o\,33' = -23,55^o$ (lembre da convenção de tomar λ negativo para o hemisfério sul). Por isso, o período é ≈ 60 horas, ou cerca de dois dias e meio.

Qual é a trajetória deste pêndulo? Note, em primeiro lugar, que as equações horárias (6.55) mostram que $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$ tornam-se simultaneamente nulas nos instantes $t_n = \dfrac{1}{\omega_1}\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi - \theta_0\right]$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, proveniente de zeros da função $\cos(\omega_1\, t + \theta_0)$. *Isto significa que a trajetória sempre passa pela origem do referencial adotado.* A amplitude das abscissas, $|A|\,\cos(\omega\,\operatorname{sen}\lambda\, t - \gamma)$, tem os máximos em valor absoluto nos intantes $t^{(max)}_{x_1',m} = \dfrac{m\,\pi + \gamma}{\omega\,\operatorname{sen}\lambda}$ e zeros intercalados em $t^{(0)}_{x_1',m} = \dfrac{(m+\frac{1}{2})\pi + \gamma}{\omega\,\operatorname{sen}\lambda}$, com $m = 0, 1, 2, \ldots$. Por outro lado, a amplitude das ordenadas, $-|A|\,\operatorname{sen}(\omega\,\operatorname{sen}\lambda\, t - \gamma)$, tem os máximos em valor absoluto e os zeros nos instantes $t^{(max)}_{x_2',m} = t^{(0)}_{x_1',m}$ e $t^{(0)}_{x_2',m} = t^{(max)}_{x_1',m}$, respectivamente. Então, quando a amplitude das abscissas está no máximo, a das ordenadas está no zero e vice versa, o que mostra que ambas as amplitudes estão defazadas de $\dfrac{\pi}{2}$. Uma conclusão imediata destas discussões é que a trajetória no plano horizontal não é retilínea. Para o caso que $\theta_0 = \gamma = 0$, a Fig. 6.33 mostra o esboço desta trajetória para algumas oscilações. Observe que os pontos de amplitude máxima destas oscilações estão sobre uma circunferência de raio $|A|$. É claro que os desvios mostrados na figura estão exagerados para a rotação da Terra, mas se imaginar um pêndulo oscilando, colocado numa plataforma em rotação com uma velocidade angular maior que a da Terra, seria uma trajetória observada. Como exercício, recomenda-se ao leitor completar a análise da curva da trajetória, determinando os pontos críticos, calculando as velocidades etc.

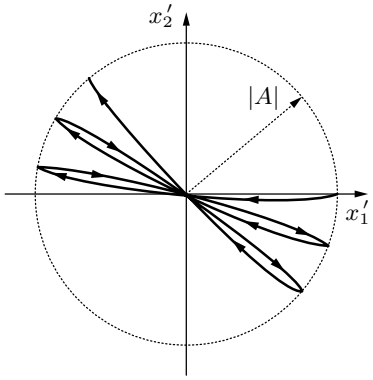

Fig. 6.33:

Observação: Tem-se no equador, $\lambda = 0$. Então, as equações horárias (6.55) tornam-se:

$$x_1'(t) = |A|\,\cos\,\gamma\,\cos(\omega_1\, t + \theta_0)$$

e

$$x_2'(t) = |A|\,\operatorname{sen}\gamma\,\cos(\omega_1\, t + \theta_0)\,.$$

Isto mostra que não há rotação do plano de oscilação quando estiver no equador, confirmando o que já foi dito antes, ou seja, o período de rotação deste plano no equador é infinito. Além disso, a projeção horizontal da trajetória é retilínea.

6.3.4 Ciclones

Um efeito de larga escala da força de Coriolis está presente, por exemplo, na formação de um ciclone, muito comum nas regiões da Terra onde o clima é temperado. A exemplo do pêndulo de Foucault, não há efeito deste tipo no equador. Contudo, uma discussão rigorosa e detalhada do problema da formação de ciclone é muito complexo por envolver movimento dos fluidos, as forças resistivas devido à viscosidade etc. e, por isso, foge completamente do escopo desta subsecção. Por esse motivo, apenas o aspecto qualitativo que envolve a força de Coriolis será discutido de maneira bastante simplificada.

Suponha que apareça uma região de baixa pressão, por um motivo qualquer, no *hemisfério sul*. Surge, então, um gradiente de pressão, cujo sentido é dirigido da região de alta pressão para a de baixa pressão. O ar que está ao seu redor é atraído para a região de baixa pressão por causa da força devido a este gradiente de pressão. Iniciando o movimento, a velocidade de deslocamento do ar deixa de ser nula e aparece a força de Coriolis que aumenta a sua intensidade com o aumento de velocidade. À medida que o ar se movimenta, a sua trajetória é

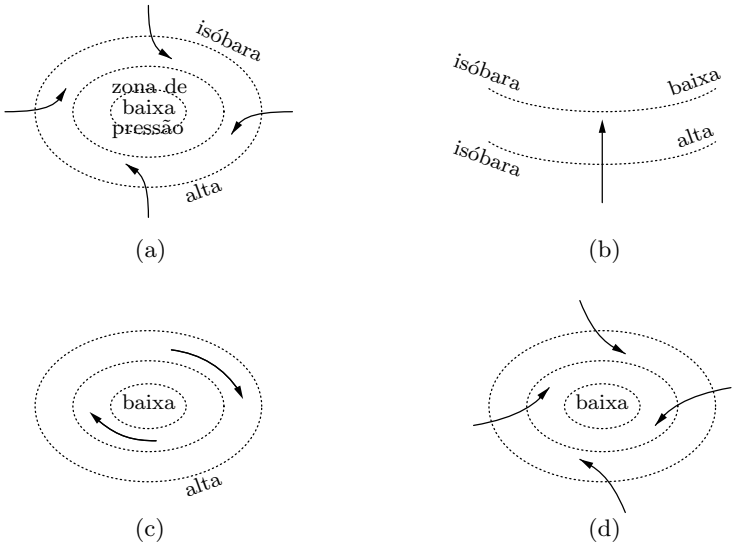

Fig. 6.34: Formação de ciclone no hemisfério sul.

curvada para a esquerda, conforme a ilustração[14] da Fig. 6.34 (a). Assim, uma parte do ar que se movimenta na direção do meridiano no sentido polo para o equador, sofre um desvio para oeste porque a força de Coriolis é horizontal e

[14] As isóbaras reais *não* são tão regulares como as esboçadas na Fig. 6.34.

direcionada para oeste. Outra parte que se movimenta no sentido contrário, isto é, do equador para o polo sofre um desvio para leste. Aquela que se movimenta na direção do equador no sentido leste para oeste desvia para sul e a que se movimenta no sentido oeste para leste desvia para norte. É óbvio que há todo conjunto de movimentos do ar nas direções intermediárias dirigidas para a zona de baixa pressão. As trajetórias de todas elas são desviadas para a esquerda em relação àquelas trajetórias que seguiria se não existisse a força de Coriolis. Note que, dessa maneira, o conjunto todo do ar ao redor da zona de baixa pressão começa a executar um movimento de rotação no sentido horário. É por isso que um ciclone no hemisfério sul gira no *sentido horário*. Para justificar esta imagem do movimento, uma análise um pouco mais minuciosa deve ser efetuada. Em primeiro lugar, a força do gradiente de pressão tem magnitude comparável ao da força de Coriolis quando a massa de ar se move com velocidades usuais. Na direção vertical esta força devido ao gradiente de pressão é aproximadamente equilibrada pela força gravitacional. Dessa forma, somente no plano horizontal é que existe um movimento de longo alcance persistente, formando o que se chama vento. Devido à extensão envolvida, o intervalo de tempo que a força de Coriolis atua também é longo. Se não existisse a força de Coriolis, a direção do movimento desses ventos seriam perpendiculares às isóbaras e cruzar-se-iam perpendicularmente, como ilustra a Fig. 6.34 (b). Mas, como existe a força de Coriolis, a direção do movimento dos ventos é desviada para a esquerda no hemisfério sul. Este desvio continua até a força de Coriolis ser equilibrada pela força do gradiente de pressão. Se o ar fosse feito de um fluido ideal (não há viscosidade), esse equilíbrio faria com que o movimento fosse paralela às isóbaras, como mostra a Fig. 6.34 (c). Entretanto, como o ar é um fluido real, possui viscosidade e, devido às forças resistivas resultantes dessa viscosidade, o aludido equilíbrio nunca ocorre apenas com o gradiente de pressão. Nestas circunstâncias, a direção do movimento não fica paralela às isóbaras. Elas formam um certo ângulo, diferente de 90^o, como ilustrado na Fig. 6.34 (d). De qualquer maneira, o conjunto todo do ar ao redor da zona de baixa pressão adquire um movimento de rotação no sentido horário no caso do hemisfério sul e, depois de iniciado o processo, o sentido da rotação é mantido. Nesta discussão qualitativa, embora a descrição do fenômeno esteja demasiadamente simplificada, o aspecto físico importante fica bastante claro. Assim, é possível compreender que o ciclone no *hemisfério sul* tem a rotação no *sentido horário*. Por outro lado, a formação do ciclone no *hemisfério norte* acontece de maneira semelhante, com a diferença que a rotação é no sentido contrário, isto é, no *sentido anti-horário*. Esta discussão no hemisfério norte e a construção da sua imagem será deixada como exercício para o leitor. Para tornar esta dis-

cussão qualitativa completa, é interessante estimar o raio inicial de um ciclone que se forma. Para isso, basta igualar a força de Coriolis com a força centrífuga do movimento inicial do ar supondo-o aproximadamente circular. Considere, então, uma porção de ar movimentando-se numa região de latitude λ com uma velocidade v'. A massa desta porção de ar é m. A força de Coriolis atuando no vento movendo-se na direção do meridiano é paralela à superfície da Terra e é dada, em módulo, por: $\left|\mathbf{F}_{Cor}\right| = 2\,m\,\omega\,v'\,\cos\,\lambda$. A força de Coriolis atuando no vento que se move na direção paralela ao equador *não* é paralela à superfície da Terra, mas a sua componente paralela pode ser obtida da mesma equação. Dessa forma, a estimativa do raio de curvatura da trajetória inicial do ciclone pode ser obtida aproximadamente por:

$$\left|\mathbf{F}_{Cor}\right| = \left|\mathbf{F}_{cf}\right|, \qquad \text{ou seja}, \qquad 2\,m\,\omega\,v'\,\cos\,\lambda = \frac{m\,v'^{2}}{R}\,.$$

Rearranjando esta igualdade, chega-se à expressão do raio inicial do ciclone dada por:

$$R = \frac{v'}{2\,\omega\,\cos\,\lambda}\,.$$

Para uma velocidade do vento de cerca de $30\,\mathtt{km/h}$ ($\sim 8,3\,\mathtt{m/s}$) numa latitude 45^{o}, tem-se:

$$R = \frac{8,3}{7,3\times 10^{-5}\sqrt{2}} \approx 8\times 10^{4}\,\mathtt{m}\,,$$

ou seja, $R \sim 80\,\mathtt{km}$. Este raio inicial é grande, mas, os ventos tendem a se deslocarem rumo ao centro do círculo que se formou (zona de baixa pressão). Então, o raio do movimento de rotação diminui e aumenta a velocidade angular de rotação devido à conservação da quantidade de movimento angular (momento angular). Como conseqüência, aumenta a sua velocidade escalar, embora, na realidade, haja a possibilidade do momento angular não conservar completamente por causa das forças resistivas da viscosidade e de outros efeitos da dinâmica dos fluidos. Isso explica a razão do efeito catastrófico deixado pelos ventos que se deslocam centenas de quilômetros sobre a superfície da Terra, formando um grande vórtice.

Exercícios

6.30) Foi sugerido que um pássaro pode determinar a sua latitude por sentir a força de Coriolis durante o seu vôo. Para que esse pássaro possa voar em trajetória retilínea num vôo horizontal, determine a força que esse pássaro deve exercer contra a força de Coriolis. Expresse o seu resultado em relação ao peso do pássaro, de maneira que ele fique em função da aceleração da gravidade g, da latitude λ, da velocidade v do pássaro e da direção do vôo. Determine o valor numérico para $v = 40\,\mathtt{km/h}$ e $\lambda = 45^{o}$ norte.

6.31) Na latitude λ do hemisfério sul, uma locomotiva dirige-se para o sul sobre trilhos retos. Supondo que o centro de massa da locomotiva esteja a uma altura h e que a distância entre os trilhos é $2\,a$, determine a razão das forças entre os dois trilhos. Calcule esta razão para uma velocidade de $150\,\mathtt{km/h}$ e latitude 45^o sul, para o caso que $h = 2\,a$. Diga e justifique qual dos dois trilhos deve sofrer maior desgaste.

6.32) Um satélite artificial de massa m move-se numa órbita polar (órbita que passa pelos polos) ao redor da Terra com uma velocidade $\mathbf{v}$ de módulo constante. Sendo $\mathbf{r}$ o vetor de posição do satélite com relação à origem tomada no centro da Terra, esboce um gráfico da magnitude da força de Coriolis agindo sobre esse satélite ao longo da órbita completa que passa pelos dois polos da Terra em função do ângulo θ formado pelo vetor velocidade angular de rotação da Terra, $\boldsymbol{\omega}$, e $\mathbf{r}$. Despreze a força centrífuga e considere $|\mathbf{r}|$ constante.

6.33) Esboce a trajetória do satélite do problema anterior, vista de um observador no hemisfério norte e também vista de um observador no hemisfério sul.

6.34) Explique porque o satélite do problema anterior sempre passa pelos polos apesar de sofrer o efeito da força de Coriolis.

6.35) No problema de queda livre discutido na subsecção 6.3.1, explique qualitativamente o desvio para o sul, baseado no referencial inercial que está fixo, fora da Terra. [*Sugestão*: veja a Fig. 6.29 (a) e pense o que aconteceu com a partícula.]

6.36) Repita o estudo completo de queda livre de uma partícula, efetuado na subsecção 6.3.1, para o hemisfério sul.

6.37) Uma partícula de massa m é abandonada, a partir de repouso, de uma altura h da superfície da Terra, numa região de latitude λ do hemisfério norte. Suponha que a resistência do ar é desprezível e que h é suficientemente pequena para poder desconsiderar a variação de $\mathbf{g}$ com h.

a) Calcule a força de Coriolis em função do tempo, usando, em primeira aproximação, a velocidade de um corpo em queda livre com aceleração $\mathbf{g}$ que se obteve supondo que a força de Coriolis tem um efeito desprezível no movimento. Esboce um gráfico desta força em função de t.

b) Faça a primeira correção e determine a força de Coriolis corrigida em função do tempo. No mesmo gráfico do item anterior, esboce a força de Coriolis corrigida em função do tempo.

6.38) Seja h a altura máxima alcançada, em relação ao solo, por uma pedra lançada verticalmente para cima numa região do hemisfério norte cuja latitude é λ. Determinar o desvio sofrido por esta pedra, em relação ao ponto de lançamento, no instante que ela atinge o solo ao retornar. Diga o sentido do desvio sofrido por esta pedra. Obtenha o valor numérico deste desvio para $h = 50\,\mathtt{m}$ e $\lambda = 45^o$ norte.

6.39) Resolva o problema anterior quando se faz o lançamento em São Paulo.

6.40) Um projétil é lançado horizontalmente ao longo da superfície da Terra. A força de Coriolis provoca um desvio angular em relação à direção de lançamento. Mostre que, em primeira aproximação, esse desvio varia linearmente com o tempo a uma taxa $\omega \operatorname{sen}\lambda$, onde ω é a freqüência angular de rotação da Terra e λ é a latitude. No hemisfério sul, o sentido desse desvio será para a esquerda ou para a direita?

6.41) Repita, detalhadamente, o estudo de um lançamento de projéteis efetudo na seção 6.3.2, mas para o hemisfério sul.

6.42) Introduzindo um referencial em rotação com uma velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$, ao redor de um eixo vertical que passa pelo ponto de suspensão do pêndulo de Foucault da secção 6.3.3, mostre que a equação (6.54), nesse referencial, torna-se:

$$m\,\mathbf{a}'' = \mathbf{T} + m\,\mathbf{g} + (\Omega^2 + 2\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\,\mathbf{r}'' - m\,(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}'' + 2\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}'')\,\boldsymbol{\Omega} - 2\,m\,(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{v}'',$$

onde $\mathbf{r}''$, $\mathbf{v}''$ e $\mathbf{a}''$ são, respectivamente, vetor de posição, velocidade e aceleração do pêndulo em relação ao novo referencial introduzido.

6.43) No resultado do problema anterior, mostre que todos os termos do membro direito da igualdade, exceto o último, são vetores que estão inteiramente contidos num plano vertical que está girando ao redor do eixo vertical que passa pelo ponto de suspensão do pêndulo.

6.44) Para que o último termo referido no exercício anterior esteja, também, inteiramente contido no mesmo plano vertical, mostre que a condição que deve ser preenchida é: $\Omega = -\,\omega \operatorname{sen}\lambda$, sendo λ a latitude. Interprete este resultado.

6.45) Considerando as forças num pequeno volume de ar movendo-se com velocidade v numa região de latitude λ, mostre que o gradiente de pressão necessário para equilibrar a componente horizontal da força de Coriolis e manter, assim, o vento numa direção fixa é:

$$\frac{d\,p}{d\,x} = 2\,\rho\,\omega\,v\,\operatorname{sen}\lambda\,,$$

onde ρ é a densidade do ar e ω, a velocidade angular de rotação da Terra. Calcule este gradiente para uma velocidade do vento de $50\,\mathtt{km/h}$, em latitude 30^o norte. *Dado*: densidade da atmosfera = 0,0013 $\mathtt{g\ cm}^{-3}$.

6.46) Nas condições que foi estimado o raio de curvatura da trajetória inicial do ciclone da subsecção 6.3.4, determine o módulo da força de Coriolis que atua sobre uma porção de ar de $1\,\mathtt{kg}$.

6.47) Supondo que o momento angular seja conservado, estime a velocidade do vento, da subsecção 6.3.4, quando o ciclone estiver com o raio de cerca de $20\,\mathtt{km}$.

6.48) Efetue uma discussão qualitativa completa da formação de um ciclone no hemisfério norte.

6.4 Precessão de Larmor

Considere uma região do espaço onde existe um campo magnético constante $\mathbf{B}$. Nessa região, suponha que uma partícula de massa m com carga q move-se numa trajetória localizada na vizinhança de uma carga puntiforme Q, de sinal contrário do de q, fixo na origem de um referencial inercial. A equação diferencial do movimento desta partícula é dada por:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = -\,\frac{|q\,Q|}{r^{\,2}}\,\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{q}{c}\,\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}\,, \tag{6.56}$$

em sistema de unidades *cgs*. Seja, agora, um referencial em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, de módulo constante, com a sua origem coincidindo com a do referecial inercial. Observe que, nesta escolha, o eixo de rotação do novo referencial passa pelo centro de força. Reescrevendo a equação (6.56) para este referencial em rotação, mediante as transformações (6.21) e (6.22), obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{r}}\,' = -\,2\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}\,' - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,') - \frac{|q\,Q|}{m\,r'^{\,2}}\,\frac{\mathbf{r}\,'}{r'} - \frac{q}{m\,c}\,\mathbf{B}\times\dot{\mathbf{r}}\,' - \frac{q}{m\,c}\,\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,')\,.$$

Escolhendo-se, agora, a velocidade angular de rotação do referencial como sendo

$$\boldsymbol{\omega} = -\,\frac{q}{2\,m\,c}\,\mathbf{B}\,, \tag{6.57}$$

o primeiro e o quarto termo do membro direito cancelam-se e resulta em:

$$\ddot{\mathbf{r}}\,' = -\,\frac{|q\,Q|}{m\,r'^{\,2}}\,\frac{\mathbf{r}\,'}{r'} + \Big(\frac{q}{2\,m\,c}\Big)^{2}\,\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r}\,')\,. \tag{6.58}$$

O último termo desta equação diferencial é perpendicular a $\mathbf{B}$ e a $\mathbf{r}\,'$ e tem módulo proporcional a $B^{\,2}$, pois, $|\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r}\,')| = B^{\,2}\,r'\,\mathrm{sen}\,\alpha$, onde α é o ângulo formado entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{r}\,'$ e $B = |\mathbf{B}|$. Suponha, agora, que o campo magnético seja suficientemente fraco, de maneira que a condição

$$\Big(\frac{q\,B}{2\,m\,c}\Big)^{2} \ll \frac{|q\,Q|}{m\,r'^{\,3}} \tag{6.59}$$

esteja satisfeita. Neste caso, o último termo de (6.58) pode ser desprezado e obtém-se:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}}\,' = -\,\frac{|q\,Q|}{r'^{\,2}}\,\frac{\mathbf{r}\,'}{r'}\,. \tag{6.60}$$

Ora, esta é uma equação diferencial do movimento de uma partícula de massa m num campo de força central atrativa que obedece a lei do inverso do quadrado

da distância. Este movimento foi estudado detalhadamente no capítulo 4 do volume 2. De acordo com os resultados daquele capítulo, a trajetória do movimento confinado desta partícula em estudo é uma elipse *neste* referencial em rotação. Se o campo magnético fosse nulo, a equação diferencial do movimento (6.56), escrita para o referencial inercial original, seria igual a (6.60). Isto leva a concluir que para um campo magnético fraco satisfazendo a condição (6.59), a trajetória (descrita em relação ao referencial inercial original) do movimento confinado é uma elipse em precessão lenta cuja velocidade angular é $\boldsymbol{\omega}$.

Este efeito é conhecido como *precessão de Larmor* e a freqüência angular de precessão é

$$\omega_L = \frac{|q|\,B}{2\,m\,c}$$

e chama-se *freqüência de Larmor*. Este resultado *pode ser generalizado para um conjunto de mais de uma partícula, contanto que todas elas tenham a mesma razão* $\dfrac{q}{m}$. Esta generalização é chamada *Teorema de Larmor*.

No presente desenvolvimento, a condição (6.59) teve que ser imposta. Qual é o seu significado? Note que o termo do membro esquerdo é o quadrado da freqüência de Larmor. Então, o termo do membro direito deve ser também o quadrado de uma freqüência. Que freqüência é essa? Para descobrir, considere a relação (4.29) do capítulo 4 do volume 2, reproduzida abaixo:

$$\frac{\tau^{\,2}}{a^{\,3}} = 4\,\pi^{\,2}\,\frac{m}{K}\,,$$

onde τ é o período do movimento elíptico; a, o semi-eixo maior da trajetória elíptica e K, uma constante positiva. No presente caso, $K = |q\,Q|$ (no caso gravitacional discutido no capítulo 4 era $K = G\,M\,m$). Vale esta relação mesmo que a trajetória seja uma circunferência. Dessa forma, substituindo-se K e escrevendo-se r' no lugar de a, chega-se a:

$$\omega_0^2 = \Big(\frac{2\,\pi}{\tau}\Big)^2 = \frac{|q\,Q|}{m\,r'^{\,3}}\,,$$

após um rearranjo. Se se considerar o valor médio, esta expressão representa, então, a freqüência angular média do movimento em órbita elíptica. Assim, a condição (6.59) significa que *a freqüência de precessão de Larmor deve ser muito menor do que a freqüência do movimento orbital da partícula*.

Parece que a única aplicação realmente importante deste resultado é no estudo do comportamento de átomos na presença de campo magnético. As partículas envolvidas aqui são os elétrons de massa m_e e carga $q = -\,e$, sob

a ação das forças repulsivas de interação mútua e da força atrativa do núcleo. Quando se coloca um átomo numa região onde há um campo magnético fraco [no sentido de satisfazer a condição (6.59)], a precessão de Larmor nas "órbitas" dos elétrons provoca um deslocamento das linhas espectrais. Este deslocamento é conhecido como efeito Zeeman[15].

[15] O leitor interessado pode consultar, por exemplo, "*Principles of Modern Physics*", R. E. Leighton, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.