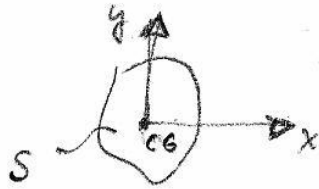


- 1) Flexão Composta Normal
 - 1.1) Flexão composta normal com grande excentricidade
 - 1.2) Flexão composta normal com pequena excentricidade
 - 1.3) F.C.N. - Diagramas de Interações.
- 2) Flexão Composta Oblíqua.
- 3) Pilares
 - 3.1) Distribuição Típica de Momentos em Pilares de Edifícios
 - 3.2) Esforços Locais de 2ª ordem; Pilar padrão
 - 3.3) Pilares em estruturas de "nós fixos"
 - 3.4) Esforços Globais de 2ª ordem.
- 4) Estados Limites de Serviço
 - 4.1) Flexão Normal Simples - Estado II
 - 4.2) Limitação de "flechas" e aberturas de fissuras.
- 5) Protensas
 - 5.1) Estados Limites de Serviço.
 - 5.2) Estados Limites Últimos.
- 6) Elementos de Fundações
 - 6.1) Sapatas
 - 6.2) Pilares sobre estacas.

1) Flexão Composta Normal

(2)



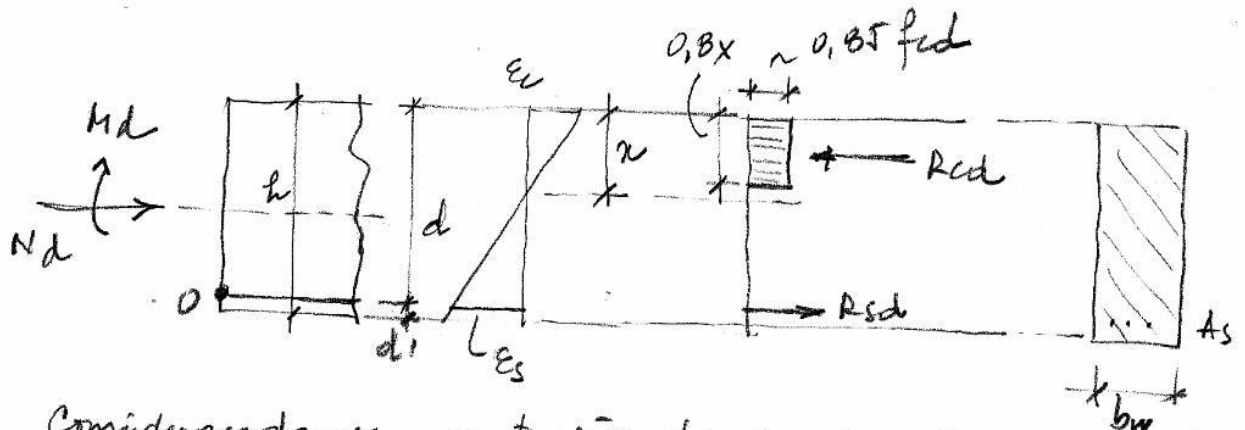
x, y : eixos principais de S

As componentes de esforços solicitantes presentes na FCN são (N, M_x) ou (N, M_y) .

A força normal excêntrica ($e = \frac{M}{N}$) encontra-se sempre sobre um dos eixos principais.

1.1) Flexão Composta Normal com grande excentricidade. (Seção Retangular $b \times h$)

Para este caso particular existe sempre uma armadura tracionada.



Considerando-se as tensões de compressão no concreto representadas pelo diagrama retangular de intensidade $0,85 f_{cd}$, e aplicado em uma altura $0,8x$:

Equações de Equilíbrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_h = 0 \therefore N_d + R_{sd} - R_{cd} = 0 \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_o = 0 \therefore M_d + N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right) - R_{cd} (d - 0,4x) = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

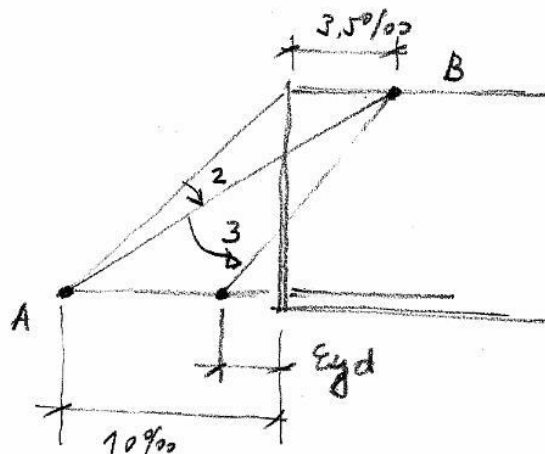
Chamando $M_d + N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right) = M_{sd}$

A expressão (2) $M_{sd} - R_{cd} (d - 0,4x) = 0$ (3) é igual à equação do 2.º grau em x , utilizada na flexão normal simples, tendo por soluções:

$$\alpha = 1.25 d \left[1 - \sqrt{1 - \frac{M_{sd}}{0.425 \times b_w \times d^2 \times f_{cd}}} \right] \quad (3)$$

Aqui também, como na flexão normal simples, o dimensionamento é restrito aos domínios 2 e 3,

$$\begin{cases} \alpha \leq 0.5d & \text{pl } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \\ \alpha \leq 0.4d & \text{pl } f_{ck} > 35 \text{ MPa} \end{cases}$$



De (1) temos: $R_{sd} = R_{cd} - N_d$ (4)

De (3) temos: $R_{cd} = \frac{M_{sd}}{(d - 0.42\alpha)}$ (5)

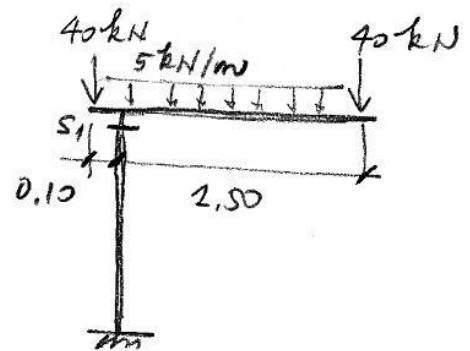
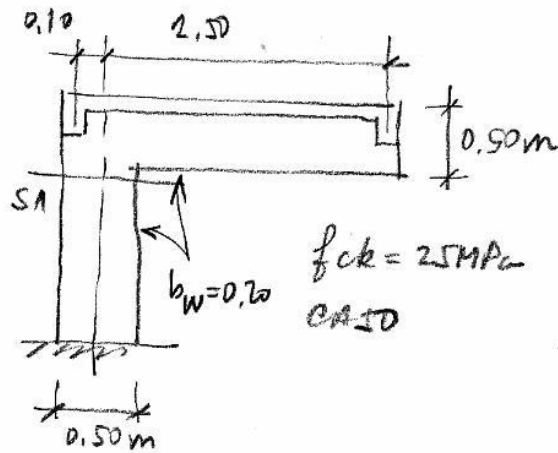
(4) em (5) fornece $R_{sd} = \frac{M_{sd}}{(d - 0.42\alpha)} - N_d$

Nos domínios 2 e 3 a armadura A_s está com deformação $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$, e portanto:

$$A_s = \frac{R_{sd}}{f_{yd}} = \left[\frac{M_{sd}}{(d - 0.42\alpha)} - N_d \right] \frac{1}{f_{yd}}$$

EX.: Dimensionar as armaduras para a S₁

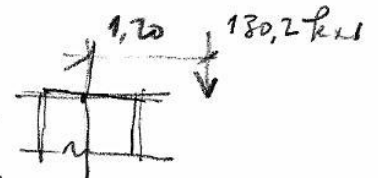
(4)



Em S₁:

$$\begin{cases} N = 2 \times 40 + 2.60 \times 5.0 = 93 \text{ kN} \\ M = 40 \times (2.50 - 0.10) + 5.0 \times \left(\frac{2.50^2}{2} - 0.10 \times \frac{2.50}{2} \right) = 111.6 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_d = 130.2 \text{ kN} \\ M_d = 156.2 \text{ kNm} \end{cases} \quad e = \frac{156.2}{130.2} = 1.20 \text{ m}$$



(A força normal fora da secção caracteriza sempre situações de grande excentricidade.)

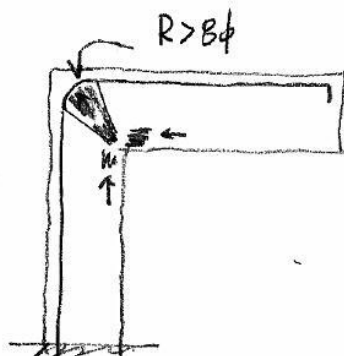
$$M_{sd} = 156.2 + 130.2 (0.25 - 0.05) = 182.2 \text{ kNm}$$

$$\eta = 1.25 \times 0.45 \times \left[1 - \sqrt{1 - \frac{182.2}{0.425 \times 0.20 \times 0.45^2 \times \frac{25000}{1.4}}} \right] =$$

$$= 0.204 \text{ m}$$

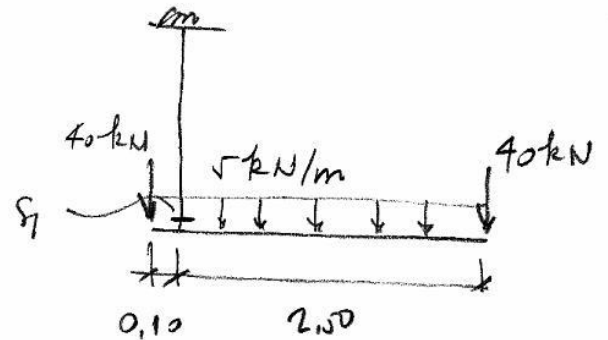
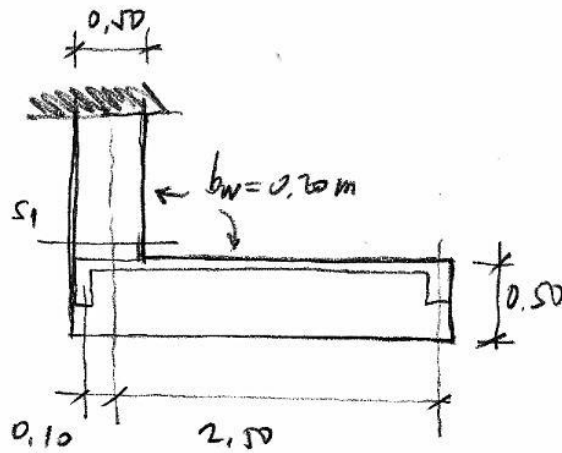
$$\frac{\eta}{d} = 0.452 < 0.50 \therefore \text{OK}$$

$$A_s = \left[\frac{182.2}{(0.45 - 0.4 \times 0.204)} - 130.2 \right] \frac{1}{43.5} = 8.38 \text{ cm}^2$$

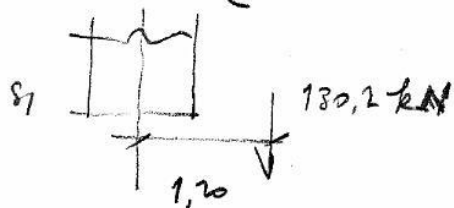


Ex.: Dimensionar as armaduras para a S1

(5)



Em S1: $\begin{cases} N = -93 \text{ kN} \\ M = 111,6 \text{ kNm} \end{cases}$ $\begin{cases} Nd = -130,2 \text{ kN} \\ Md = 156,2 \text{ kNm} \end{cases}$ $e = 1,20 \text{ m}$

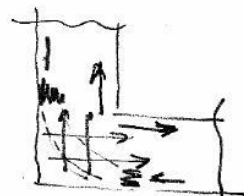
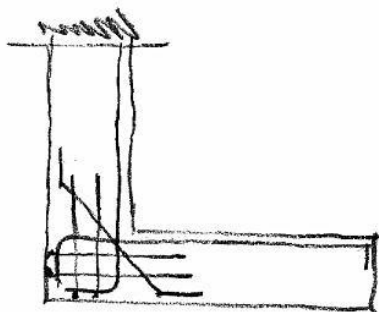


$$M_{sd} = 156,2 + (-130,2) \times (0,25 - 0,05) = 130,2 \text{ kNm}$$

$$\kappa = 1,25 \times 0,45 \times \left[1 - \sqrt{1 - \frac{130,2}{0,425 \times 0,20 \times 0,45^2 \times \frac{25000}{1,4}}} \right] = 0,185 \text{ m}$$

$$\frac{\kappa}{d} = 0,30 < 0,50 \text{ OK.}$$

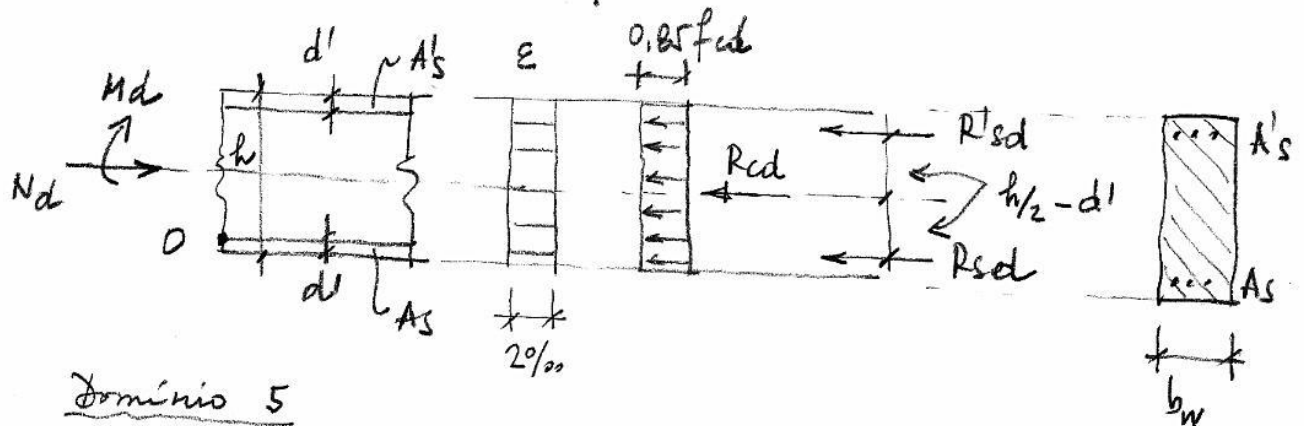
$$A_s = \left[\frac{130,2}{(0,45 - 0,4 \times 0,185)} - (-130,2) \right] \frac{1}{43,5} = 10,55 \text{ cm}^2$$



1.2.) Flexões Compostas ^{Normal} com pequena excentricidade

(6)

- a) Flexo-Compressão c/ pequena excentricidade, com duas armaduras comprimidas.



Domínio 5

Equações de Equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F = 0 \therefore N_d - R_{cd} - R'_{sd} - R_{sd} = 0 & (1) \\ \sum M_0 = 0 \therefore M_d + N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right) - R_{cd} \left(\frac{h}{2} - d' \right) - R'_{sd} (h - 2d') = 0 & (2) \end{cases}$$

$$R_{cd} = 0.85 f_{cd} b_w h \quad (3)$$

De (2) e (3)

$$R'_{sd} = \frac{M_d}{(h - 2d')} + (N_d - R_{cd}) \frac{\left(\frac{h}{2} - d' \right)}{(h - 2d')}$$

$$R'_{sd} = \frac{N_d - R_{cd}}{2} + \frac{M_d}{(h - 2d')} \quad (4)$$

De (1) e (4)

$$R_{sd} = \frac{N_d - R_{cd}}{2} - \frac{M_d}{(h - 2d')}$$

$$A_s = \frac{R_{sd}}{\sigma_{sd}}, \quad A'_s = \frac{R'_{sd}}{\sigma'_{sd}}, \quad \text{Para } \epsilon = \epsilon_{te} = 20/100$$

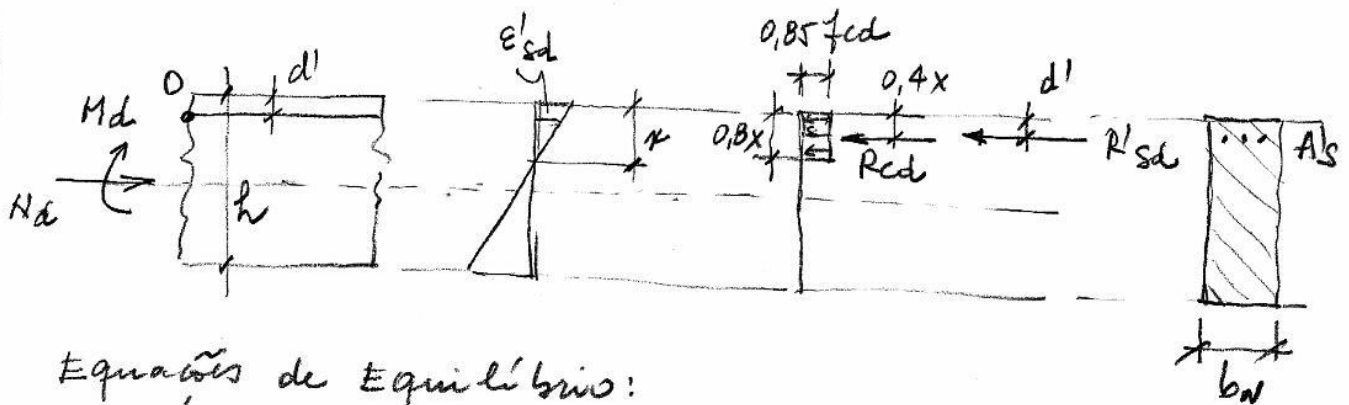
$$\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = 21000 \times 20/100 = 42 \text{ kN/m}^2 \text{ (CASSO)}$$

$$\begin{cases} A_s = \frac{1}{\sigma_{sd}} \left[\frac{N_d - 0.85 f_{cd} \cdot b_w \cdot h}{2} - \frac{M_d}{(h - 2d')} \right] \\ A'_s = \frac{1}{\sigma'_{sd}} \left[\frac{N_d - 0.85 f_{cd} \cdot b_w \cdot h}{2} + \frac{M_d}{(h - 2d')} \right] \end{cases}$$

Estas expressões são válidas para $A_s, A'_s \geq 0$

(7)

- b) Flexo - Compressão c/ pequena excentricidade, com uma armadura comprimida.



Equações de Equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F = 0 \therefore N_d - R_{cd} - R'_{sd} = 0 & (1) \\ \sum M_o = 0 \therefore M_d - N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right) + R_{cd} (0.4x - d') = 0 & (2) \end{cases}$$

$$R_{cd} = 0.68 f_{cd} \cdot b_w \cdot x \quad (3)$$

Com (3) em (2) encontra-se uma equação do 2º grau em x , cuja solução é:

$$x = 1.25 d' \left[1 + \sqrt{1 - \frac{M_d - N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right)}{0.425 \times b_w \times d'^2 \times f_{cd}}} \right]$$

(Válida para $x < 1.25 h$)

$$\text{De (1)} \quad R'_{sd} = N_d - R_{cd}$$

$$A'_s = \frac{R'_{sd}}{\sigma'_{sd}} = \frac{N_d - R_{cd}}{\sigma'_{sd}} \quad \text{com } \sigma'_{sd} = E_s \epsilon'_{sd}$$

Valores de ϵ'_{sd} :

Domínio 2

$$0 \leq x \leq 0.259 d$$

$$\epsilon'_{sd} = \frac{0.01}{(d - x)} (x - d')$$

Domínios 3 e 4

$$0.259 d \leq x \leq h$$

$$\epsilon'_{sd} = \frac{0.0035}{x} (x - d')$$

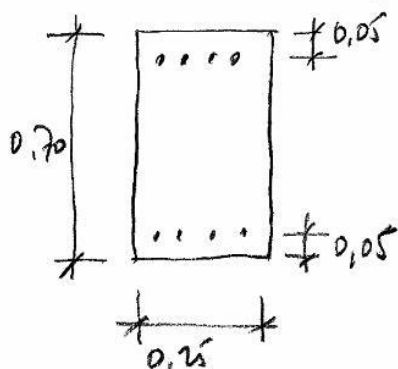
Domínio 5

$$h \leq x \leq 1.25 h$$

$$\epsilon'_{sd} = \frac{0.002}{x - 3/4 h} (x - d')$$

Ex.: Dimensionar a seção:

8



$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
CASO

$$\begin{cases} N = 3000 \text{ kN} \\ M = 200 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$e = 0.067 \text{ m}$$

Supondo-se duas armaduras comprimidas:

$$\begin{cases} N_d = 3000 \times 1.4 = 4200 \text{ kN} \\ M_d = 200 \times 1.4 = 280 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$A_s = \frac{1}{42} \left[\frac{4200 - 0.85 \times \frac{25000}{1.4} \times 0.25 \times 0.70}{2} - \frac{280}{(0.70 - 2 \times 0.05)} \right] = 7.27 \text{ cm}^2 \quad (A_s > 0 \text{ ok})$$

$$A'_s = \frac{1}{42} \left[\frac{4200 - 0.85 \times \frac{25000}{1.4} \times 0.25 \times 0.70}{2} + \frac{280}{(0.70 - 2 \times 0.05)} \right] = 29.5 \text{ cm}^2$$

Ex.: Dimensionar a mesma seção anterior para os esforços: $\begin{cases} N = 1500 \text{ kN} \\ M = 200 \text{ kNm} \end{cases}$ $e = 0.133 \text{ m}$

Supondo-se duas armaduras comprimidas:

$$\begin{cases} N_d = 1500 \times 1.4 = 2100 \text{ kN} \\ M_d = 200 \times 1.4 = 280 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$A_s = \frac{1}{42} \left[\frac{2100 - 0.85 \times \frac{25000}{1.4} \times 0.25 \times 0.70}{2} - \frac{280}{(0.70 - 2 \times 0.05)} \right] < 0 !$$

fora do domínio de validade da expressão

Supondo uma armadura comprimida:

$$x = 1,25 \times 0,05 \times \left[1 + \sqrt{1 - \frac{280 - 2100(0,35 - 0,25)}{0,425 \times 0,25 \times 0,05^2 \times \frac{25000}{1,4}}} \right] =$$

$$= 0,603 \text{ m} < 1,25 \times 0,70 = 0,875 \text{ m} \quad \text{OK.}$$

Domínio 4

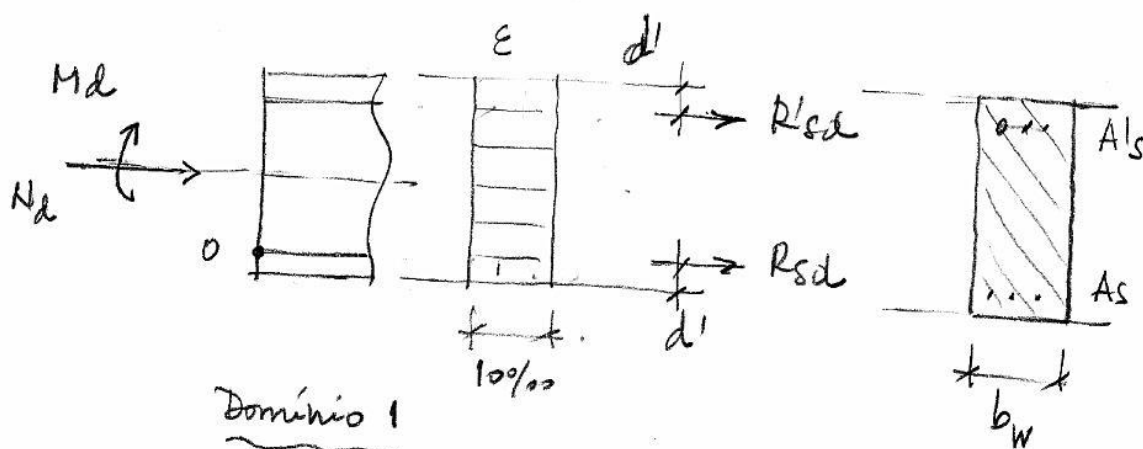
$$\epsilon'_{sd} = \frac{0,0035}{0,603} (0,603 - 0,05) = 0,0032$$

$$> \epsilon_{yd}$$

$$\therefore \sigma_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$A'_s = \frac{2100 - 0,68 \times 25000 / 1,4 \times 0,25 \times 0,603}{43,5} = 6,2 \text{ cm}^2$$

c) Flexo Tração com pequena excentricidade
($|e| \leq h/2 - d'$) (Duas armaduras Tensionadas)



Equações de Equilíbrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F = 0 \therefore N_d + R'_{sd} + R_{sd} = 0 \quad (1) \\ \sum M_o = 0 \therefore M_d + N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right) + R'_{sd} (h - 2d') = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\text{De (2)} \quad R'_{sd} = -N_d \frac{(h/2 - d')}{(h - 2d')} - \frac{M_d}{(h - 2d')}$$

$$R'_{sd} = -\frac{N_d}{2} - \frac{M_d}{(h - 2d')} \quad (3)$$

Com (3) em (1)

10

$$R_{sd} = -N_d - \left[-\frac{N_d}{2} - \frac{M_d}{(h-2d')} \right]$$

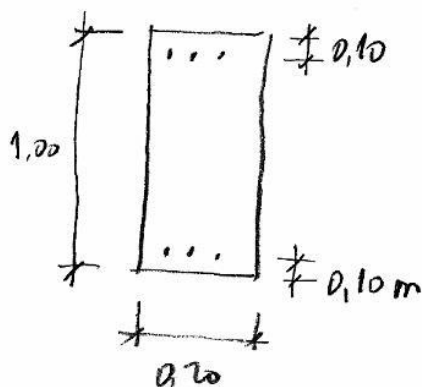
$$R_{sd} = -\frac{N_d}{2} + \frac{M_d}{(h-2d')} \quad (4)$$

$$\text{Para } \epsilon_{sd} = 10\text{‰}, \quad \sigma_{sd} = f_{yd}$$

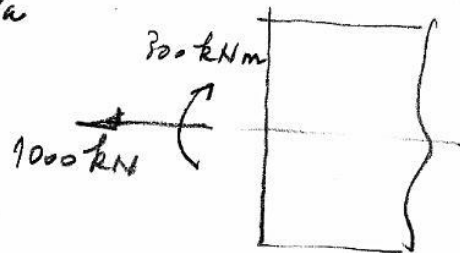
$$A_s = \frac{1}{f_{yd}} \left[-\frac{N_d}{2} + \frac{M_d}{(h-2d')} \right]$$

$$A'_s = \frac{1}{f_{yd}} \left[-\frac{N_d}{2} - \frac{M_d}{(h-2d')} \right]$$

Ex.: Dimensionar a seção:



$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ck} = 25 \text{ MPa} \\ \text{caso} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} N = -1000 \text{ kN} \\ M = 300 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_d = -1400 \text{ kN} \\ M_d = 420 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

$$e = -0,30 \text{ m}$$

$$|e| \leq \frac{1,00 - 2 \times 0,10}{2} = 0,40 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{1}{43,5} \left[-\frac{(-1400)}{2} + \frac{420}{(1,00 - 2 \times 0,10)} \right] = 28,2 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = \frac{1}{43,5} \left[-\frac{(-1400)}{2} - \frac{420}{(1,00 - 2 \times 0,10)} \right] = 4,0 \text{ cm}^2$$

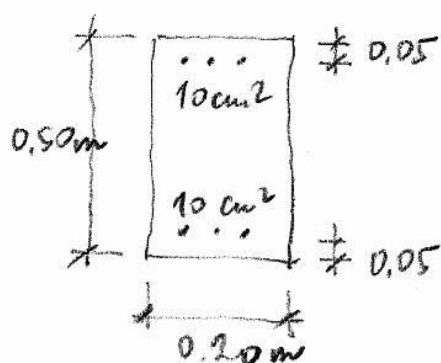
1.3) F.C.N - Diagramas de Interação ($N_d \times M_d$)

11

Para seções com formas, e arranjo de armaduras pré-definidos, é possível gerar diagramas de interação $N_d \times M_d$ para várias taxas de armadura. Esses diagramas podem ser dimensionais, ou adimensionais.

a) Diagramas dimensionais

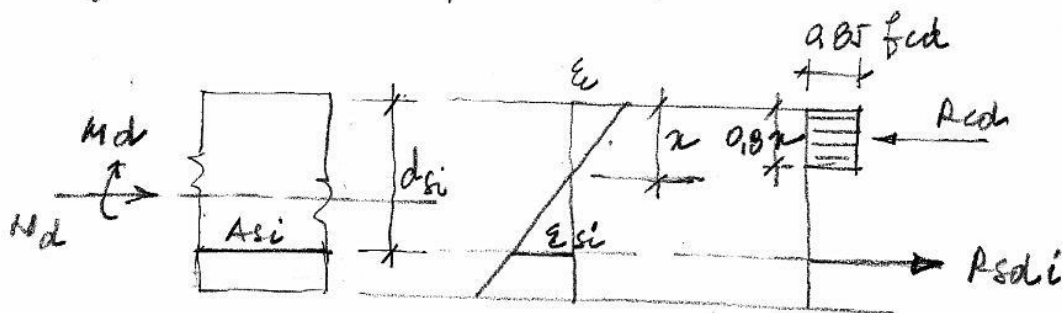
Como exemplo será construído o diagrama de interação $N_d \times M_d$ para uma seção retangular, com armaduras $A_s = A'_s = 10 \text{ cm}^2$



$$\begin{cases} f_{ck} = 25 \text{ MPa} \\ f_{yk} = 500 \text{ MPa} \end{cases}$$

Diagrama $\sigma \times \epsilon$ para o concreto simplificado (retangular)

Genéricamente pode-se escrever:



$$\left\{ \begin{aligned} \sum \vec{F} = 0 \therefore N_d &= R_{cd} - \sum_{i=1}^n R_{sdi} \quad (1) \\ \sum \vec{M}_{ce} = 0 \therefore M_d &= R_{cd} \left(\frac{h}{2} - 0.4x \right) + \sum_{i=1}^n R_{sdi} \left(d_{si} - \frac{h}{2} \right) \quad (2) \end{aligned} \right.$$

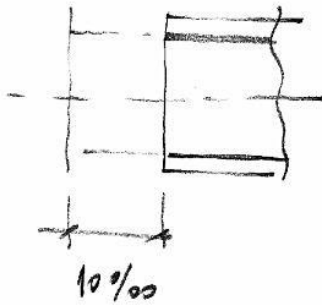
$$R_{sdi} = A_{si} \sigma_{si} \quad (3) \quad , \quad \sigma_{si} = \epsilon_{si} E_s < f_{yd} \quad (4)$$

$$R_{cd} = 0.68 f_{cd} \cdot b_w \cdot x \quad (5)$$

Início do D1

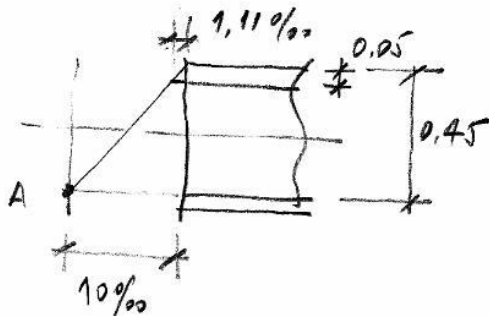
(12)

$$\varepsilon_{si} = 10\text{‰} \therefore \sigma_{sdi} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$



$$\begin{cases} N_d = 0 - 10 \times 43,5 - 10 \times 43,5 = -870 \text{ kN} \\ M_d = 0 + 43,5 \times (0,45 - 0,25) + 43,5 \times (0,05 - 0,25) = 0 \end{cases}$$

Limite entre D1-D2

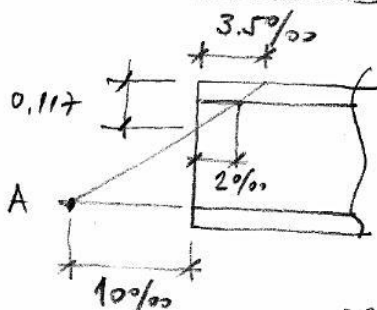


$$\sigma_{sdsup} = 21000 \times 1,11\text{‰} = 23,3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{sdim} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\begin{cases} N_d = 0 - 10 \times 23,3 - 10 \times 43,5 = -668 \text{ kN} \\ M_d = 0 + 233 (0,05 - 0,25) + 435 (0,45 - 0,25) = 40,4 \text{ kNm} \end{cases}$$

Limite entre D2-D3



$$\sigma_{sdsup} = -21000 \times 2\text{‰} = -42 \text{ kN/cm}^2$$

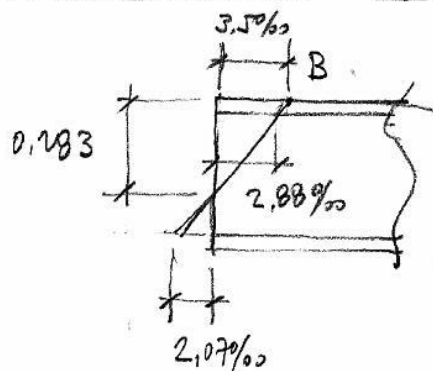
$$\sigma_{sdinf} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\begin{cases} N_d = \frac{284,1}{1,4} \times 0,68 \times 0,20 \times 0,117 + 10 \times 42 - 10 \times 43,5 = 269,1 \text{ kN} \\ M_d = 284,1 \times (0,25 - 0,4 \times 0,117) - 420 (0,05 - 0,25) + 435 (0,45 - 0,25) = 228,7 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{cd} = 234,1 \text{ kN} \\ M_{cd} = 57,7 \text{ kNm} \end{cases}$$

Limite entre D3-D4

13



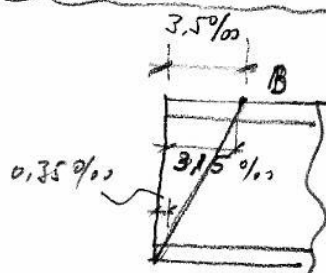
$$\sigma_{sd\ sup} = -43.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{sd\ inf} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\begin{cases} N_d = \overbrace{0.68 \times \frac{25000}{1.4} \times 0.20 \times 0.283}^{687.3} - 10 \times (-43.5) - 10 \times (43.5) = 687.3 \text{ kN} \\ M_d = \underbrace{687.3 \times (0.25 - 0.4 \times 0.283)}_{94.0} + (-43.5)(0.05 - 0.25) + 43.5(0.45 - 0.25) = 268.0 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{cd} = 687.3 \text{ kN} \\ M_{cd} = 94.0 \text{ kNm} \end{cases}$$

Limite entre D4-D5

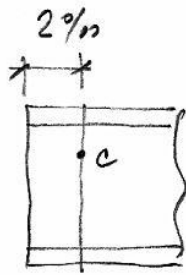


$$\sigma_{sd\ sup} = -43.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{sd\ inf} = -21000 \times 0.35\% = -7.35 \text{ kN/cm}^2$$

$$\begin{cases} N_d = \overbrace{0.68 \times \frac{25000}{1.4} \times 0.20 \times 0.50}^{1214.3} - 10 \times (-43.5) - 10 \times (-7.35) = 1722.8 \text{ kN} \\ M_d = \overbrace{1214.3 \times (0.25 - 0.4 \times 0.50)}^{60.7} - 43.5(0.05 - 0.25) - 7.35(0.45 - 0.25) = 133.0 \text{ kNm} \end{cases}$$

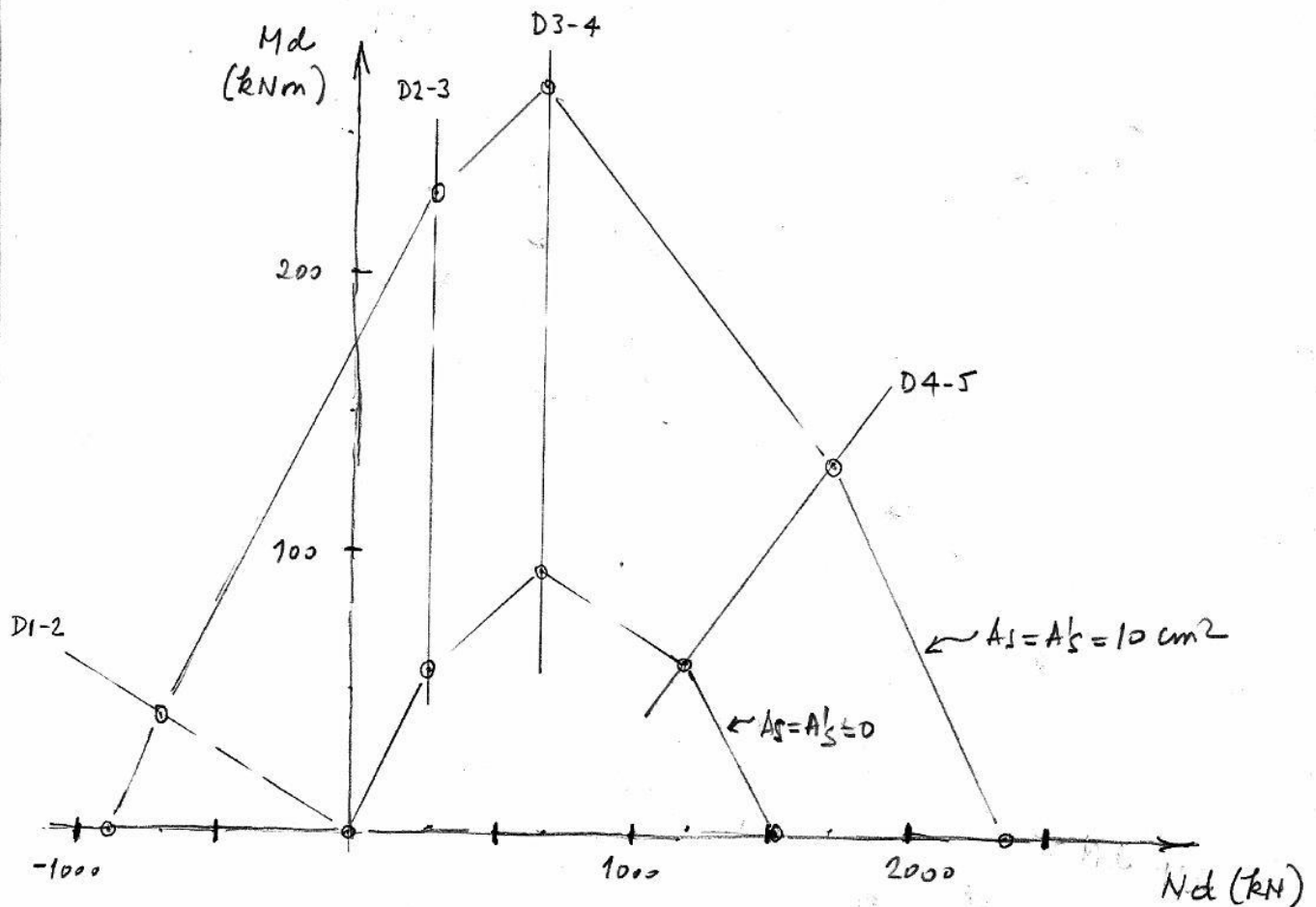
$$\begin{cases} N_{cd} = 1214.3 \text{ kN} \\ M_{cd} = 60.7 \text{ kNm} \end{cases}$$



$$\sigma_{sd\ sup} = \sigma_{sd\ inf} = -21000 \times 2\% = -42 \text{ kN/cm}^2$$

$$\begin{cases} N_d = \frac{0,85 \times 25000 \times 0,20 \times 0,50}{1,4} - (10+10)(-42) = 2357,9 \text{ kN} \\ M_d = 1517,9 \times (0) + (-420)(0,05-0,25) + (-420)(0,45-0,25) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{cd} = 1517,9 \text{ kN} \\ M_{cd} = 0 \end{cases}$$



Pode-se observar que R_{sd} e M_{sd} variam linearmente com $A_s = A'_s$

$$\begin{cases} N_d = R_{cd} + \alpha(A_s) + \alpha'(A'_s) \\ M_d = M_{cd} + \beta(A_s) + \beta'(A'_s) \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{M_{sd}}$

onde α, α', β e β' são funções lineares.

Portanto para $A_s = A'_s \neq 10 \text{ cm}^2$ é possível escrever:

$$\begin{cases} N_d(A_s) = R_{cd} + R_{sd}(A_s=10) \times \frac{A_s}{10} \\ M_d(A_s) = M_{cd} + M_{sd}(A_s=10) \times \frac{A_s}{10} \end{cases}$$

b) Diagramas adimensionais

Os diagramas adimensionais têm sua aplicação generalizada, dependendo apenas da forma da seção, e do tipo de arranjo das armaduras. Para sua construção são utilizados os seguintes adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \xi_{si} = \frac{d_{si}}{h}$$

$$\eta_d = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}, \quad \mu_d = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}, \quad w_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

Dividindo-se as equações de equilíbrio (1) e (2) da pág. 11 respectivamente por $b \cdot h \cdot f_{cd}$ e $b h^2 \cdot f_{cd}$, encontram-se:

$$\eta_d = \frac{0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{b h \cdot f_{cd}} - \sum_{i=1}^n \frac{A_{si} \sigma_{di}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \quad \therefore$$

$$\eta_d = 0,68 \xi - \sum_{i=1}^n w_i \frac{\sigma_{di}}{f_{yd}}$$

$$\mu_d = \frac{0,68 f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (h/2 - 0,4x)}{b h^2 f_{cd}} + \sum_{i=1}^n \frac{A_{si} \sigma_{di} (d_{si} - h/2)}{b h^2 f_{cd}}$$

$$\mu_d = 0,68 \xi (0,5 - 0,4 \xi) + \sum_{i=1}^n w_i \frac{\sigma_{di}}{f_{yd}} (\xi_{si} - 0,5)$$

As tensões σ_{si} são definidas para cada domínio a partir das deformações ϵ_{si} :

$\sigma_{si} = E_s \epsilon_{si} \leq f_{yd}$, onde ϵ_{si} assume os seguintes valores:

- Domínios D1 e D2

$$\begin{aligned} \epsilon_{si} &= \frac{d_{si} - \alpha}{d - \alpha} \cdot 0,01 = \frac{d_{si} - \alpha}{h - d' - \alpha} \cdot 0,01 = \\ &= \frac{\xi \epsilon_i - \frac{\alpha}{\xi}}{1 - \xi' - \frac{\alpha}{\xi}} \cdot 0,01 \quad \text{onde } \xi' = \frac{d'}{h} \end{aligned}$$

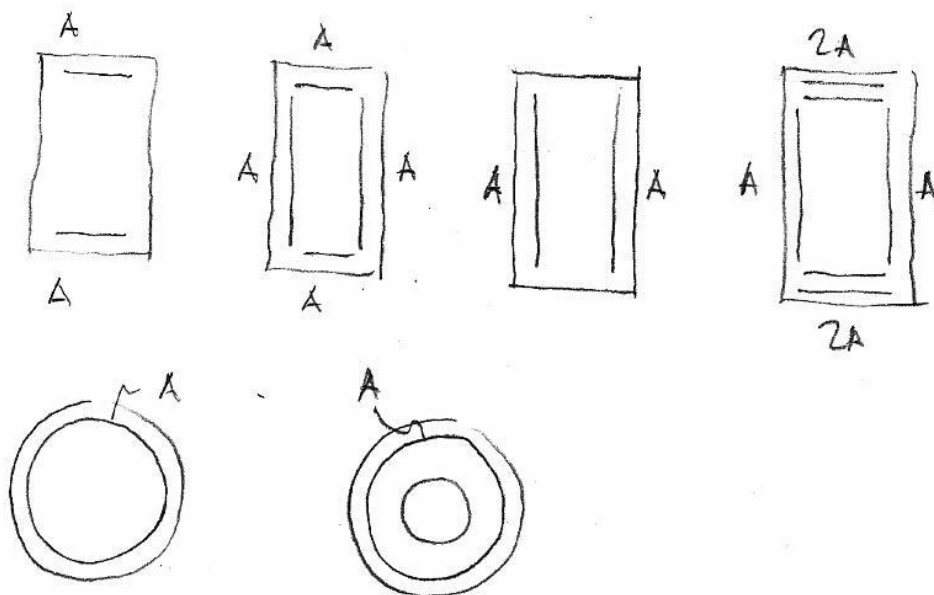
- Domínios D3 e D4

$$\epsilon_{si} = \frac{d_{si} - \alpha}{\alpha} \cdot 0,0035 = \frac{\xi \epsilon_i - \frac{\alpha}{\xi}}{\frac{\alpha}{\xi}} \cdot 0,0035$$

- Domínio D5

$$\epsilon_{si} = \frac{\alpha - d_{si}}{\alpha - \frac{3}{7}h} \cdot 0,002 = \frac{\xi - \xi \epsilon_i}{\xi - \frac{3}{7}} \cdot 0,002$$

Dessa forma, para várias seções e arranjos de armadura



São gerados diagramas com o seguinte aspecto:

Ex.: Para a seção e arranjo de armaduras do exemplo anterior, dimensionar as armaduras para:

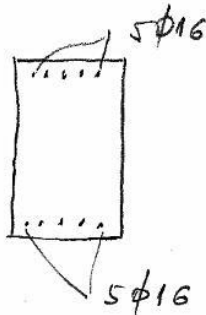
$$\begin{cases} N = 1810 \text{ kN} \\ M_y = 70 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\sqrt{d} = 0,85$$

$$\mu_d = \frac{70 \times 1,4}{0,60 \times 0,85^2 \times \frac{20000}{1,4}} = 0,093$$

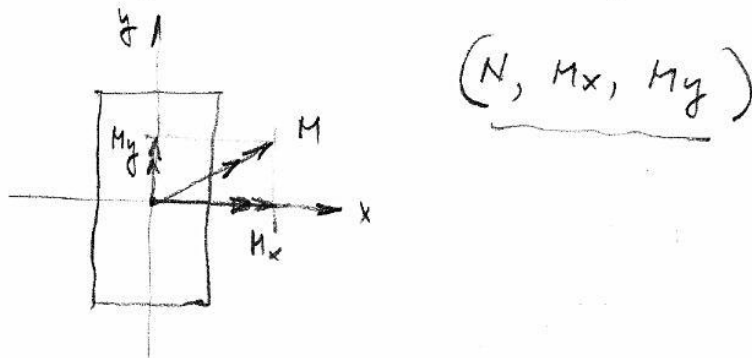
utilizando-se o diagrama f_c-21 , obtém-se:

$$\omega \approx 0,29 \quad \therefore A_{TOT} = 0,29 \times 35 \times 60 \times \frac{20 \times 1,15}{500 \times 1,4} = 20,0 \text{ cm}^2$$

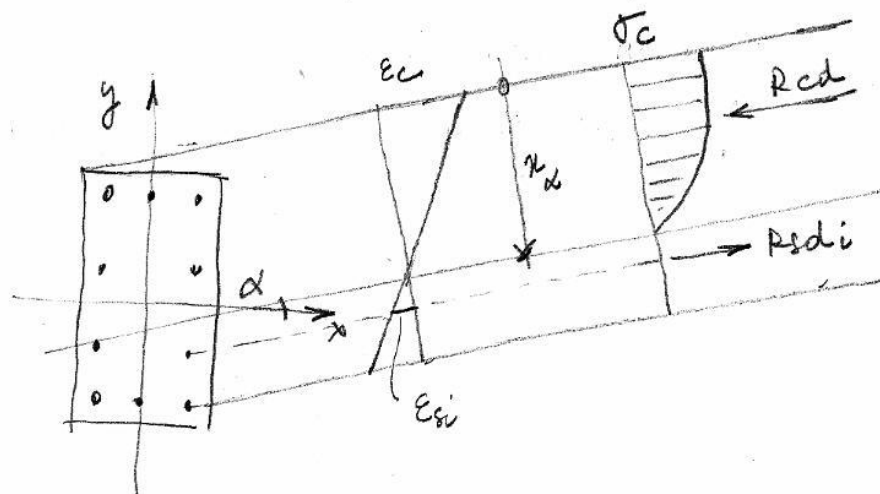


2) Flexão Composta Oblíqua

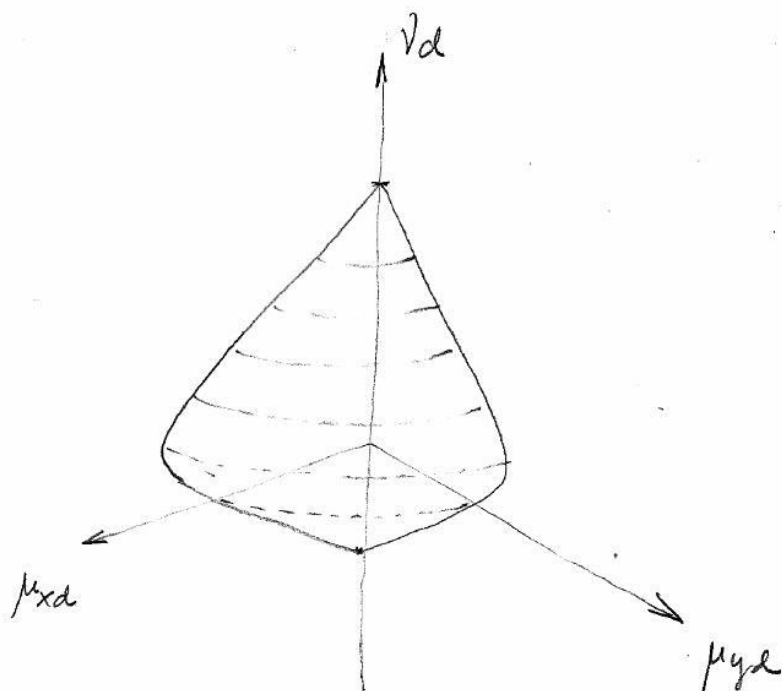
Na flexão composta oblíqua, o vetor do momento atuante não coincide com os eixos principais de inércia da seção, sendo as solicitações compostas por:



Para uma dada seção e respectivo arranjo de armaduras o problema geral da F.C.O. pode ser resolvido, quando para cada valor de α de inclinação da linha neutra da seção, percorremos todos os domínios de deformação, obtendo as componentes dos esforços resistentes N_{sd} , $M_{pd,x}$ e $M_{pd,y}$.



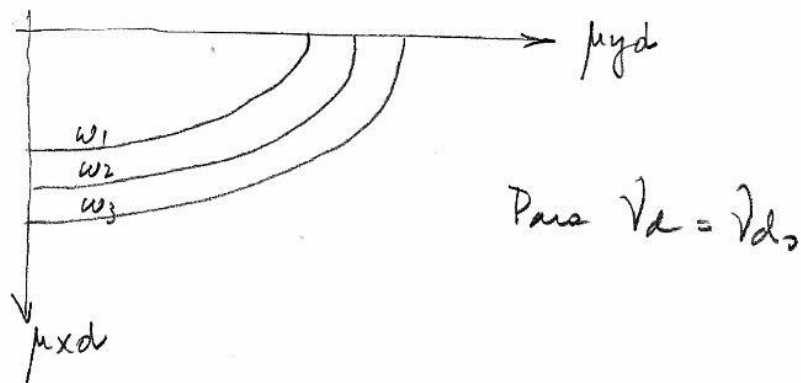
As componentes assim obtidas, em sua forma dimensional, ou adimensional definem uma superfície de ruptura com o seguinte aspecto:



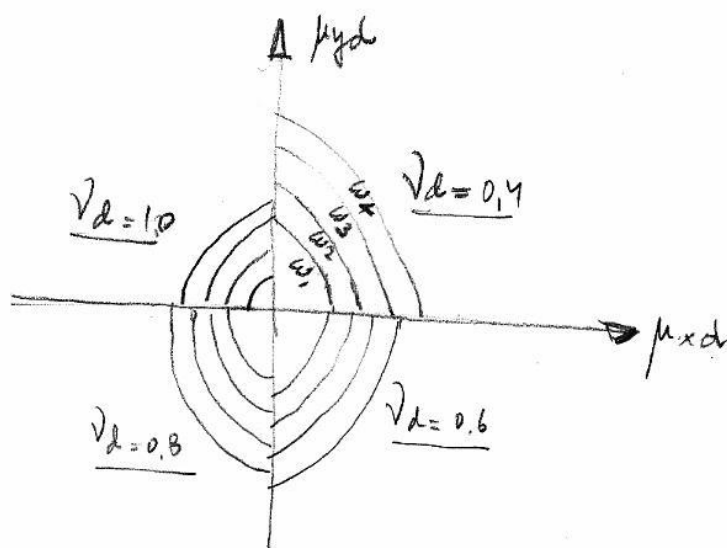
A interseção dessa superfície com os planos (V_d, μ_{xd}) e (V_d, μ_{yd}) correspondem aos diagramas de interação em flexão composta normal com momentos segundo os eixos x e y respectivamente.

Para taxas crescentes de armadura w , há uma expansão homotética dessa superfície.

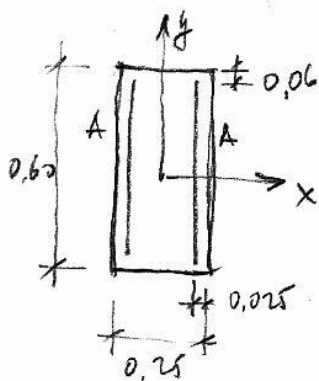
No âmbito das aplicações práticas, é usual utilizar-se cortes dessa superfície por planos $\perp$ ao eixo V_d .



Esses diagramas são apresentados na forma de roseta, para vários valores de V_d



Ex.: Dimensionar as armaduras de seção abaixo:



$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
CASD

$$\begin{cases} N = 1500 \text{ kN} \\ M_x = 75 \text{ kNm} \\ M_y = 30 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$V_d = \frac{1500 \times 1.4}{0.25 \times 0.60 \times \frac{25000}{1.4}} = 0.784 \sim 0.80$$

$$\mu_{xd} = \frac{75 \times 1.4}{0.25 \times 0.60^2 \times \frac{25000}{1.4}} = 0.0653$$

$$\mu_{yd} = \frac{30 \times 1,4}{0,25^2 \times 0,60 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,0627$$

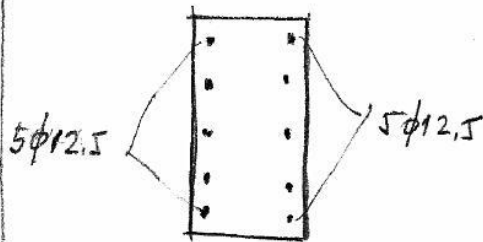
(21)

Utilizando-se o diagrama fc-24, observa-se que

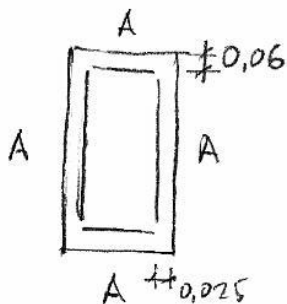
$$\mu_a = \mu_y = 0,0627$$

$\mu_b = \mu_x = 0,0653$, assim para $\gamma_d = 0,80$ obtemos:

$$\omega = 0,20 \quad \therefore A_{TOT} = 0,20 \times 25 \times 60 \times \frac{25 \times 1,15}{500 \times 1,4} = 12,3 \text{ cm}^2$$



Ex.: Idem ex. anterior para novo arranjo de armaduras:

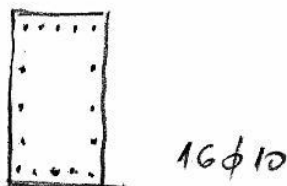


Utilizando-se o diagrama fc-23 temos

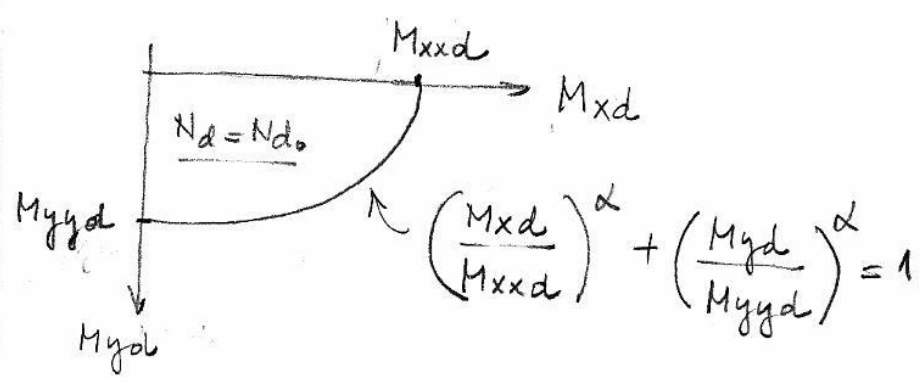
$$\begin{cases} \gamma_d = 0,8 \\ \mu_{xd} = 0,0653 \\ \mu_{yd} = 0,0627 \end{cases} \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = 0,0653 & \text{é o maior } \mu \\ \mu_2 = 0,0627 & \text{é o menor } \mu \end{cases}$$

Dessa forma obtemos: $\omega \approx 0,2 \quad \therefore A_{TOT} = 12,3 \text{ cm}^2$



- Critério aproximado da NBR 6118 para a obtenção dos diagramas N_d , M_{xd} , M_{yd} para a F.C.O. a partir do conhecimento dos valores (N_d, M_{xxd}) e (N_d, M_{yyd}) correspondentes às duas flexões normais compostas.

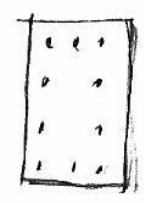


onde $\alpha = 1$ para o caso geral, e

$\alpha = 1.2$ para as seções retangulares

Ex.: Verificar a segurança da seção para

$$\begin{cases} N_d = 1500 \text{ kN} \\ M_{xd} = 150 \text{ kNm} \\ M_{yd} = 80 \text{ kNm} \end{cases}$$



Sabendo-se que com essa armadura, ela é capaz de resistir em flexão normal composta a

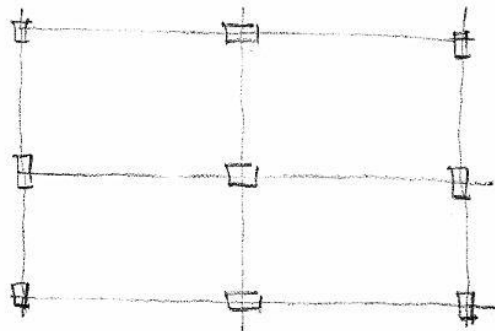
$$\begin{cases} N_d = 1500 \text{ kN}, M_{xxd} = 230 \text{ kNm} \text{ e} \\ N_d = 1500 \text{ kN}, M_{yyd} = 180 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\left(\frac{150}{230}\right)^{1.2} + \left(\frac{80}{180}\right)^{1.2} = 0.60 + 0.38 = 0.98 < 1 \therefore \text{OK}$$

3) Pilares

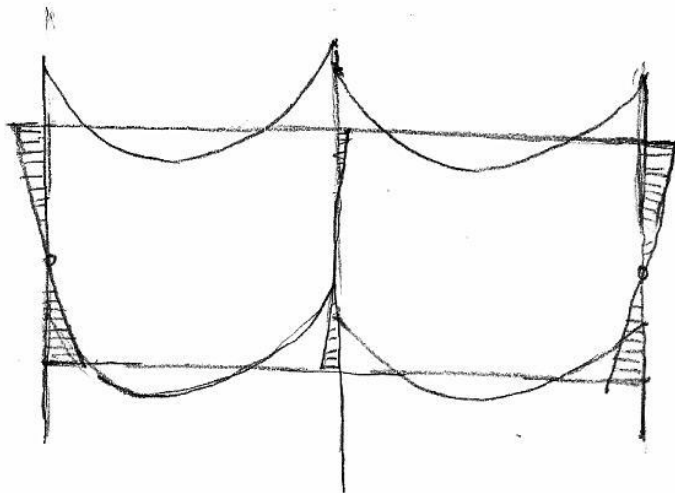
23

3.1) Distribuições Típicas de Momentos atuantes em Pilares de Edifícios.



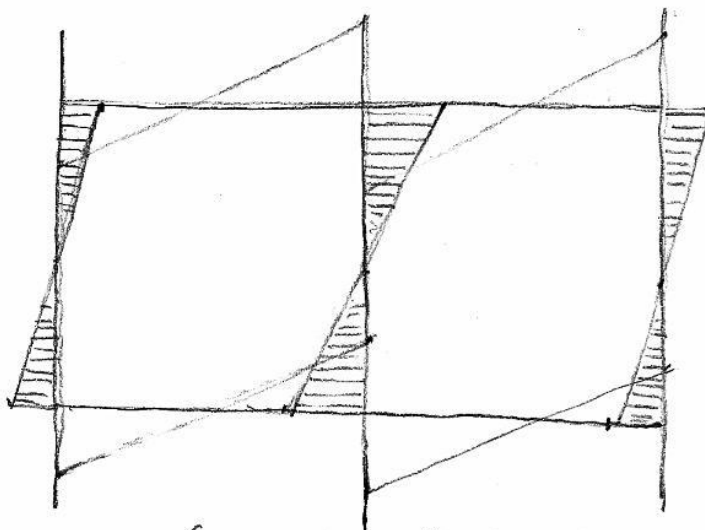
PLANTA (ESQUEMA)

a) Efeito das Cargas Verticais



(M)

b) Efeito das Cargas Horizontais (Vento)



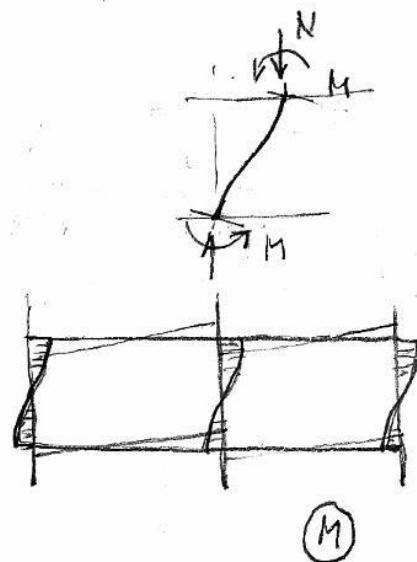
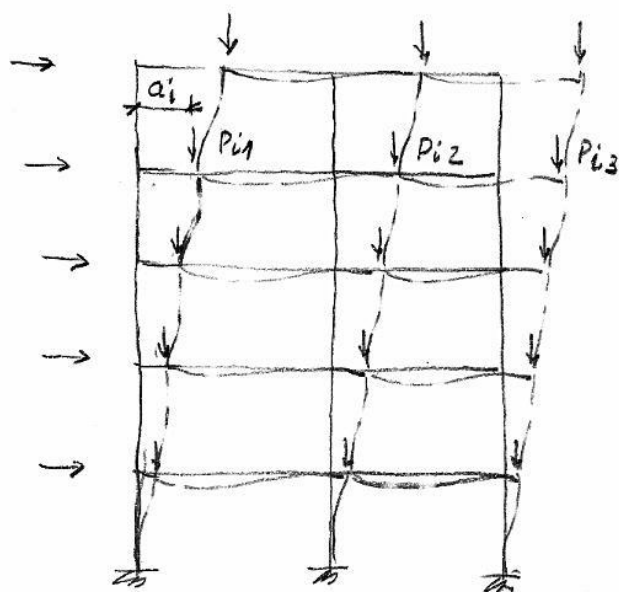
(M)

(+ ou -)

→ ←

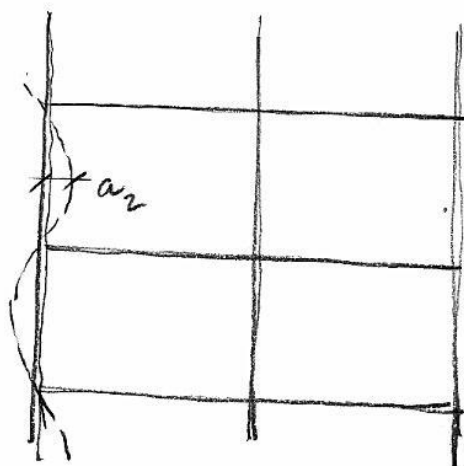
c) Efeitos de 2ª ordem Globais

24

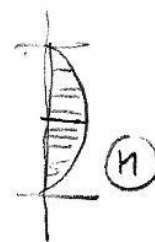


A estrutura fica submetida aos momentos $\sum P_{ij} \times a_i$, provocados pelo deslocamento horizontal dos pontos de aplicação das cargas verticais.

d) Efeitos de 2ª Ordem Locais



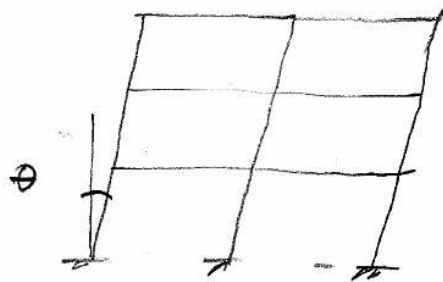
$$M_{\max} = N \cdot a_2$$



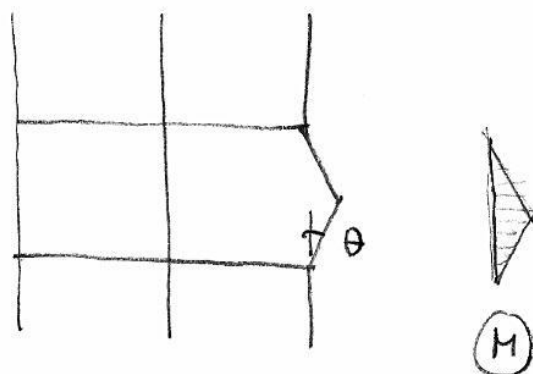
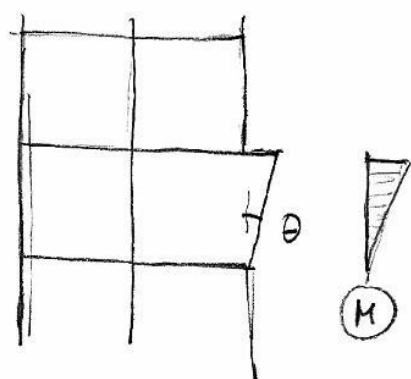
A deformação acima pressupõe a favor da segurança, que a influência favorável das vigas seja desprezível. (Quanto à rigidez e quanto aos momentos por elas aplicados).

e) Efeitos das imprecisões geométricas

As imprecisões geométricas podem ser de origem global ou local. As de origem global correspondem à inclinação do edifício como um todo, dando origem a momentos semelhantes



àquelas provocados pelos efeitos de 2ª ordem. As de origem local correspondem a desaprumos localizados dos pilares, onde os respectivos momentos podem



ser avaliados como acima (desprezada a influência favorável das vigas).

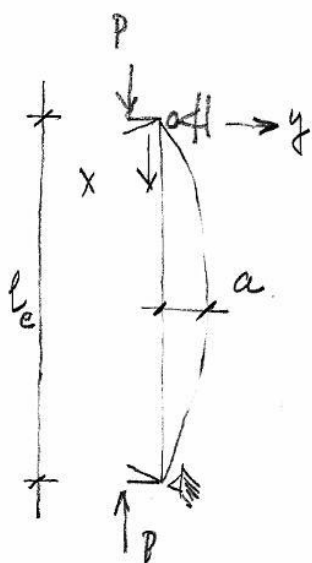
A NBR 6118 permite que o efeito das imprecisões geométricas locais em estruturas reticuladas, seja considerado como um momento mínimo de primeira ordem dado por:

$M_{1d,min} = N_{sd} (0,015 + 0,03 l_v)$ onde N_{sd} é a força normal de cálculo solicitante e l_v a dimensão da seção na direção considerada em metros.

3.2) Esforços Locais de 2ª ordem - Pilar Padrão.

(26)

O Pilar Padrão, é um pilar com linha elástica suporta senoidal, utilizado para avaliação dos momentos de 2ª ordem locais.



$$y = a \sin \frac{\pi}{l_e} x \quad (1)$$

É possível expressar a flecha máxima "a" em função da curvatura máxima, derivando-se (1) em relação a x, duas vezes.

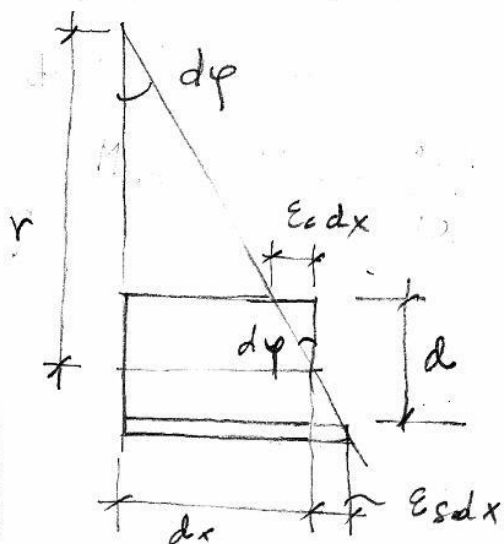
$$y' = \frac{\pi}{l_e} a \cos \frac{\pi}{l_e} x$$

$$y'' = -\frac{\pi^2}{l_e^2} a \sin \frac{\pi}{l_e} x$$

lembrando que $|\frac{1}{\rho}| \approx y''$ temos:

$$\frac{1}{r} \max = \frac{\pi^2}{l_e^2} a \quad \therefore \quad a \approx \frac{l_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \max$$

onde $\frac{1}{r} \max$ pode ser expresso como:



$$d\varphi = \frac{dz}{r} = \frac{(e_c + e_s) dx}{d}$$

$$\frac{1}{r} \max = \frac{e_c + e_s}{d} \max$$

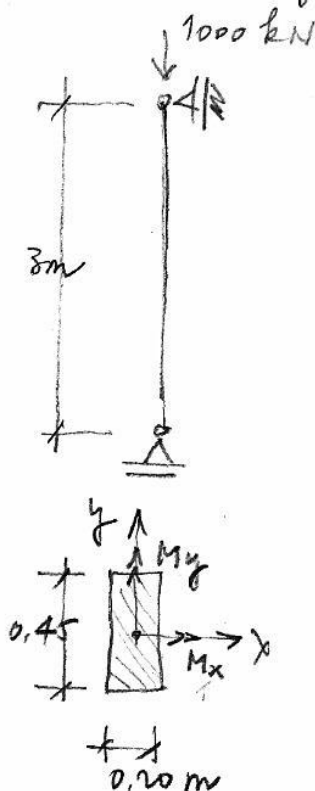
Utilizando-se para $\frac{1}{r}$ max
as curvaturas de ruptura, de seções em flexão normal
composta, propostas pela NBR 6118

$$\frac{1}{r_{\max}} = \frac{0,005}{(\gamma_d + 0,5) h} \leq \frac{0,005}{h}$$

temos para o momento de 2ª ordem a expressão:

$$\underline{M_{2d} = Nd \frac{l_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \max}$$

Ex.: Determinar o momento máximo de 2ª ordem
para o pilar abaixo, segundo as direções
x e y.



25
 $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, Aço CA50

$$\gamma_d = \frac{1,4 \times 1000}{0,20 \times 0,45 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,87$$

l_e : Comprimento de Euler

$$l_e = 3m$$

$$Nd = 1000 \times 1,4 = 1400 \text{ kN}$$

Segundo x

$$M_{2,x,d} = 1400 \times \frac{3,0^2}{10} \times \frac{0,005}{(0,87 + 0,5)} \times \frac{1}{0,45} = 10,2 \text{ kNm}$$

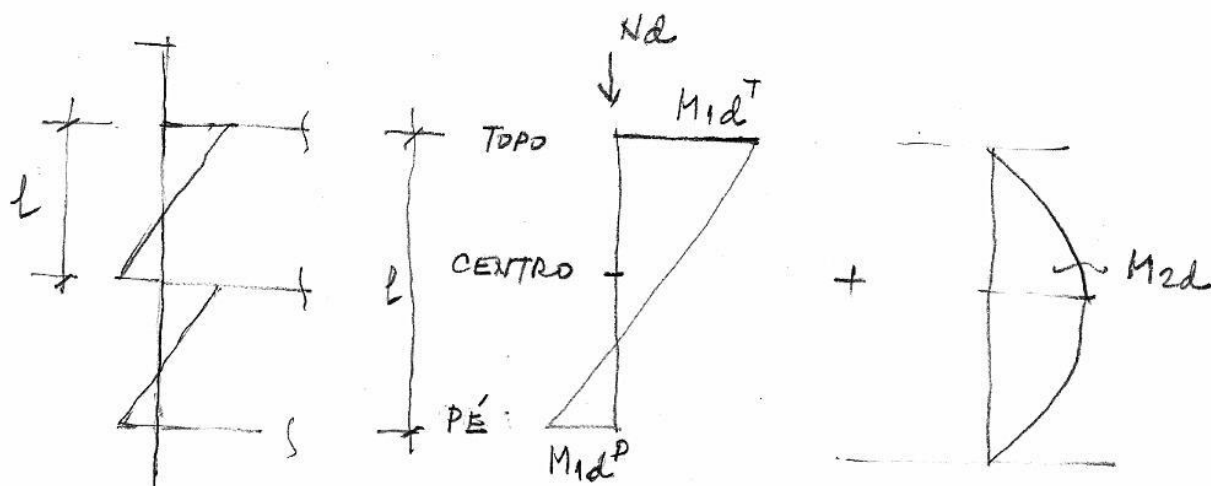
Segundo y

$$M_{2,y,d} = 1400 \times \frac{3,0^2}{10} \times \frac{0,005}{(0,87 + 0,5)} \times \frac{1}{0,20} = 23,0 \text{ kNm}$$

São chamadas de estruturas de "nós fixos" aquelas onde os efeitos globais de 2ª ordem podem ser considerados desprezíveis.

Os procedimentos a seguir apresentados aplicam-se a pilares com índice de esbeltez $\lambda \leq 90$.

Para um dado lance de pilar são analisadas três seções: Topo, Base e Centro.



O Momento no meio do pilar M_{id}^C é avaliado a partir dos momentos nas extremidades sendo dado por

$$M_{id}^C = \left[0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} \right] M_A \geq 0,4 M_A \quad \text{onde}$$

M_A : é o maior valor em módulo entre M_{id}^T e M_{id}^P

M_B : é o outro momento tomado com sinal positivo quando traciona o mesmo lado que M_A e negativo em caso contrário.

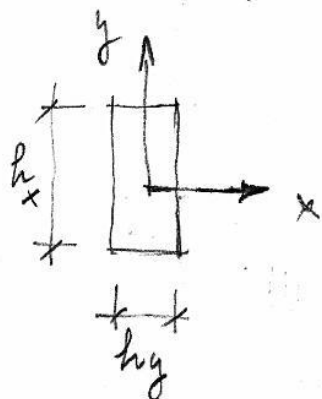
Na seção central são considerados também os efeitos de 2ª ordem local, sempre que:

$$35 < \lambda \leq 90$$

Pilares em flexão composta oblíqua

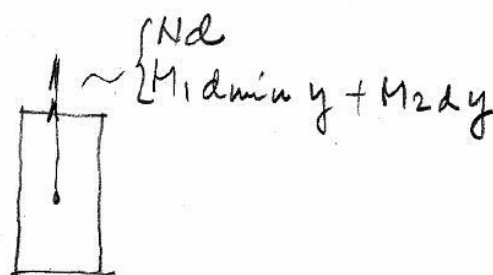
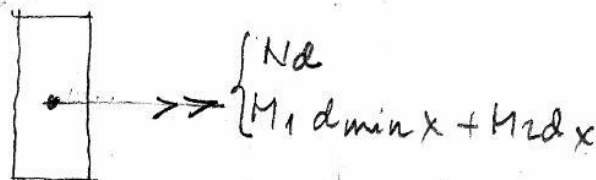
(29)

- a) Verificações com os momentos $M_{1d, \min}$ para a secção central em FNC, nas direcções x e y .

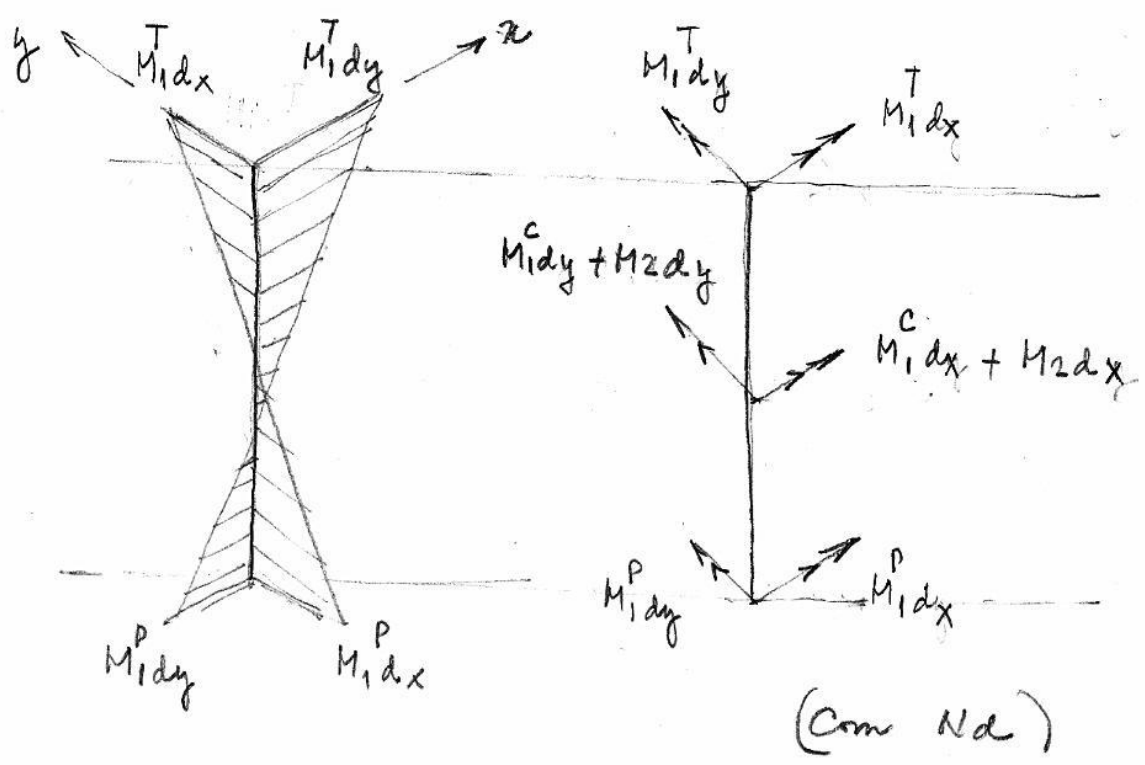


$$M_{1d, \min x} = (0,015 + 0,03 R_{kx})$$

$$M_{1d, \min y} = (0,015 + 0,03 b_g)$$



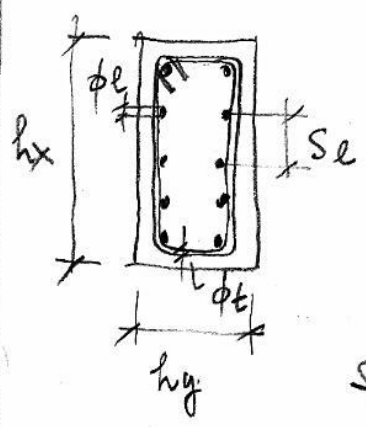
b) Verificações em flexões oblíquas com porta nas duas seções.



c) Disposições Construtivas

Dimensões Mínimas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Geral } h_x \geq 19 \text{ cm com } \gamma_F = 1,4 \\ \text{Casos Especiais } 12 \leq h_x < 19 \text{ cm} \\ \text{com } \gamma_F \cdot \gamma_n = 1,4 (1,95 - 0,05 h) \\ \text{com } h \text{ em cm} \end{array} \right.$

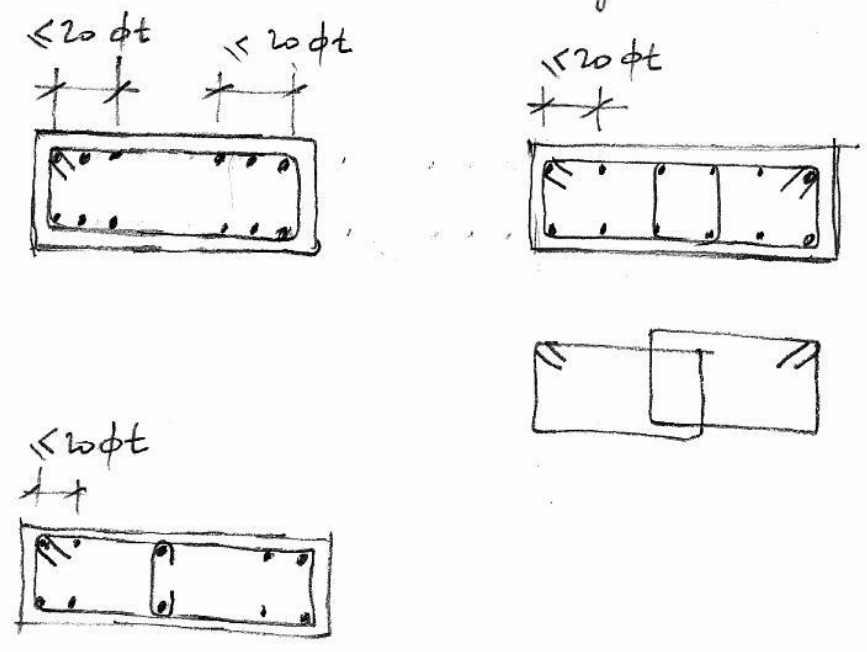
Para que $\lambda \leq 90$: $h_x, h_y < \frac{l_e}{26}$



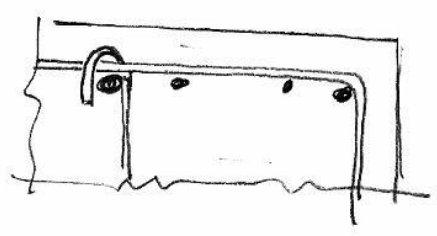
$$10 \text{ mm} < \phi_l < \frac{h_{\min}}{8}, \quad \left. \begin{array}{l} 4\phi \\ 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \leq S_t \leq \left\{ \begin{array}{l} 40 \text{ cm} \\ 2h_{\min} \end{array} \right.$$
$$\phi_t \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_l}{4} \\ 5 \text{ mm} \end{array} \right., \quad S_t \leq \left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ cm} \\ h_{\min} \\ 12\phi_l \end{array} \right.$$

S_t : Espaços dos estribos.

Travamento das Barras Longitudinais



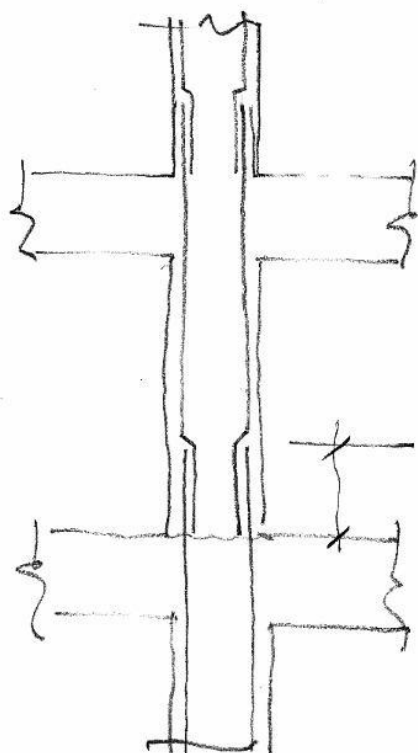
Consideram-se como travadas as barras que distam $20 \phi t$ ou menos do canto do estribo, ou de um ponto de amarração intermediário. Neste último caso o gancho da armadura de amarração deverá envolver o ramo horizontal do estribo.



Armadura Longitudinal Máxima e Mínima

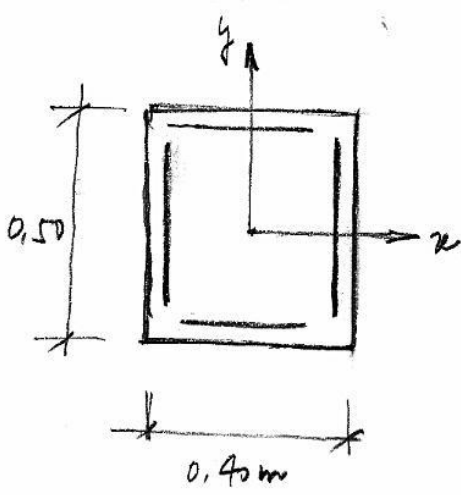
$$\left. \begin{array}{l} 0.4\% \\ 0.15 \frac{N_d}{f_y d} \end{array} \right\} \leq A_s \leq 8\% A_c$$

↑ Inclusive no caso dos emendas

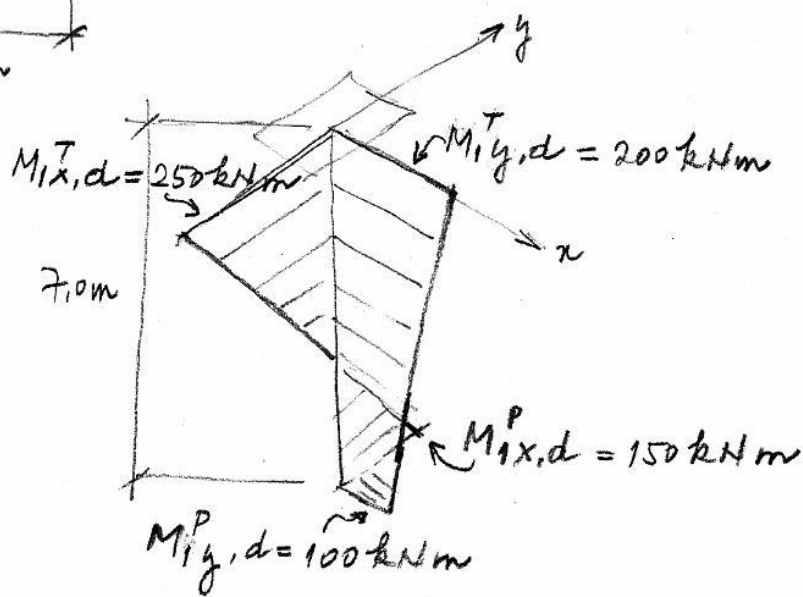


$l_{bmc} \geq 0,6 l_b$ para bonas todas comprimidas
 l_{ot} para bonas tracionadas (comprimiento de emenda).

Exemplo: Dimensionar e detalhar o pilar:



$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$, Aço CA-50
 cobrimento $c = 2,5 \text{ cm}$
 Pilo a piso $7,0 \text{ m}$
 $N_d = 2570 \text{ kN}$



Momentos mínimos:

$$\begin{cases} M_{1x,d,\min} = 2570 (0,015 + 0,03 \times 0,50) = 77,1 \text{ kNm} \\ M_{1y,d,\min} = 2570 (0,015 + 0,03 \times 0,40) = 69,4 \text{ kNm} \end{cases}$$

Momentos de 2ª ordem:

$$\lambda_x = \frac{7,0}{0,50} \cdot 3,46 = 48,4 \quad \therefore 35 \leq \lambda_x \leq 90$$

$$M_{2x,d} = 2570 \times \frac{7,0^2}{10} \times \frac{0,005}{(0,60 + 0,50) 0,50} = 114,5 \text{ kNm}$$

$$\eta_d = \frac{2570}{0,40 \times 0,50 \times \frac{30000}{1,4}} = 0,60$$

$$\lambda_y = \frac{7,0}{0,40} \cdot 3,46 = 60,6 \quad \therefore 35 \leq \lambda_y \leq 90$$

$$M_{2y,d} = 2570 \times \frac{7,0^2}{10} \times \frac{0,005}{(0,60 + 0,50) 0,40} = 143,1 \text{ kNm}$$

Momentos na seção central

34

$$M_{1x,d}^c = \left(0,6 + 0,4 \times \frac{-150}{250} \right) 250 = 90 \text{ kNm}$$

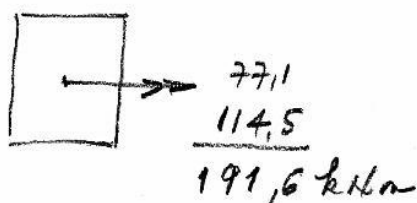
$\swarrow$

$$> 0,4 \times 250 = \underline{100 \text{ kNm}}$$

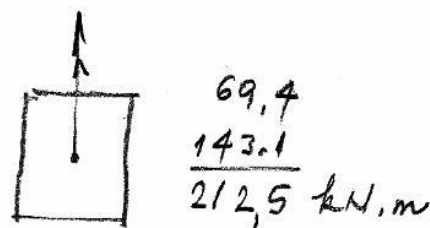
$$M_{1y,d}^c = \left(0,6 + 0,4 \times \frac{100}{200} \right) 200 = 160 \text{ kNm}$$

Casos a verificar:

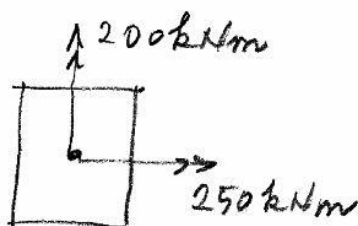
a₁)



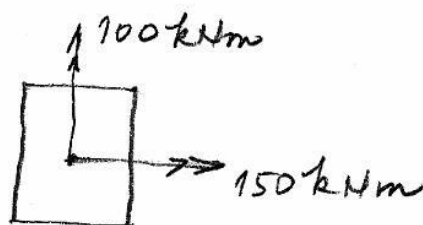
a₂)



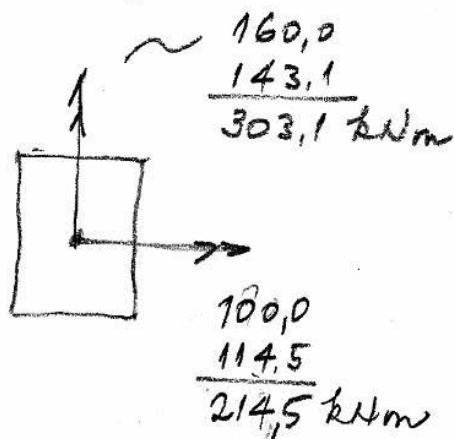
b₁) Topo



b₂) PE



b₃) CENTRO



O caso b₃) cobre os casos a₁), a₂) e b₂)
Serão analisados os casos b₁) e b₃)

$$b1) \quad \nu_d = 0.6, \quad \frac{d'g}{h_y} = \frac{(2.5 + 0.63 + 1.25)}{40} = \frac{4.38}{40} = 0.11 \sim 0.10 \quad (35)$$

$$\mu_{dx} = \frac{250}{0.40 \times 0.50 \times \frac{30000}{1.4}} = 0.117$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 0.117$$

$$\omega = 0.40$$

$$\mu_{dy} = \frac{200}{0.40 \times 0.50 \times \frac{30000}{1.4}} = 0.117$$

$$b3) \quad \mu_{dx} = \frac{214.5}{0.40 \times 0.50 \times \frac{30000}{1.4}} = 0.100 = \mu_2$$

$$\omega = 0.55$$

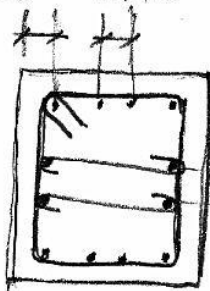
$$\mu_{dy} = \frac{303.1}{0.40 \times 0.50 \times \frac{30000}{1.4}} = 0.177 = \mu_1$$

$$A_{TOT} = 0.55 \times 40 \times 50 \times \frac{30 \times 1.15}{500 \times 1.4} = 54.2 \text{ cm}^2$$

$$A_{smin} \gamma, \quad \begin{cases} 0.4\% \times 40 \times 50 = 8 \text{ cm}^2 \\ 0.15 \times \frac{2570}{43.5} = 8.9 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$A_{smax} \leq 4\% \times 40 \times 50 = 80 \text{ cm}^2 \therefore \text{OK}$$

4.38 10.43



$$5 \text{ mm} \leq \phi_e \quad \left(\begin{matrix} 25 \text{ mm} \\ \leq \frac{400}{8} = 50 \text{ mm} \end{matrix} \right) \text{ OK}$$

$$4 \times 2.5 \leq s_e \quad \left(\begin{matrix} 40 \text{ cm} \\ 10.43 \text{ cm} \\ \leq 2 \times 40 \text{ cm} \end{matrix} \right) \text{ OK}$$

$$5 \text{ mm} \leq \phi_t \quad \left(\begin{matrix} 25 \\ \frac{25}{4} = 6.25 \\ \leq 6.3 \text{ mm} \end{matrix} \right) \text{ OK}$$

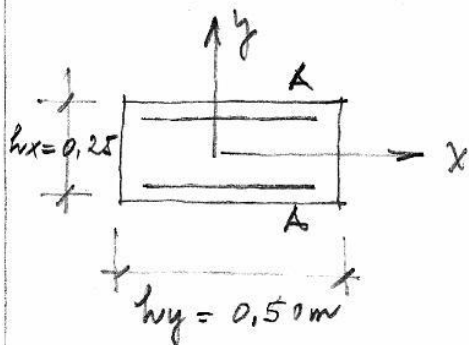
12φ25 (60 cm²)

2φ6.3 C/20

$$s_t \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ 12 \times 2.5 = 30 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \end{cases} \text{ OK}$$

Barra tirada pelo estribo $s_e \leq 20 \times 0.63 = 12.6 \text{ cm}$ a partir do canto

Exemplo: Dimensionar e detalhar as armaduras do pilar;



$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, Aço CA50

cobrimento $e = 2,5 \text{ cm}$

Piso a piso 4,00 m

$$N = 1000 \text{ kN}$$

$$N_d = 1000 \times 1,4 = 1400 \text{ kN}$$

$$M_{iy} = 50 \text{ kNm} \quad (M_{idy} = 50 \times 1,4 = 70 \text{ kNm})$$

$$M_{ix}^T = 40 \text{ kNm} \quad (M_{idx}^T = 40 \times 1,4 = 56 \text{ kNm})$$

$$M_{iy}^P = 40 \text{ kNm} \quad M_{ix}^P = 20 \text{ kNm} \quad (M_{idx}^P = 20 \times 1,4 = 28 \text{ kNm})$$

$$(M_{idy}^P = 40 \times 1,4 = 56 \text{ kNm})$$

Trata-se de um problema de flexão composta oblíqua, já que existem momentos nas direções x e y .

a) Momentos mínimos na seção central

$$\begin{cases} M_{idx, \min} = 1400 \times (0,015 + 0,03 \times 0,25) = 31,5 \text{ kNm} \\ M_{idy, \min} = 1400 \times (0,015 + 0,03 \times 0,50) = 42,0 \text{ kNm} \end{cases}$$

Índices de esbeltez: $l_e = 4,0 \text{ m}$

$$\begin{cases} \lambda_x = 3,46 \times \frac{4,0}{0,25} = 55,4 \\ \lambda_y = 3,46 \times \frac{4,0}{0,50} = 27,7 \end{cases}$$

Momentos de 2ª ordem na seção central:

Na direção x : Como $35 \leq \lambda_x \leq 90$

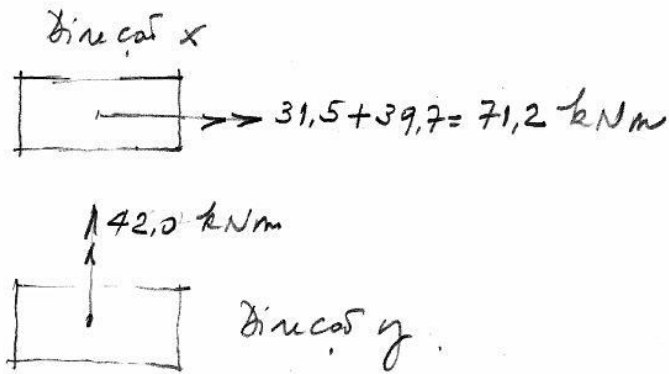
$$\eta_d = \frac{1400}{0,25 \times 0,50 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,63$$

$$M_{2d,x} = 1400 \times \frac{4.0^2}{10} \times \frac{0.005}{\underbrace{(0.63+0.5)}_{\geq 1.0} \cdot 0.25} = 39.7 \text{ kNm}$$

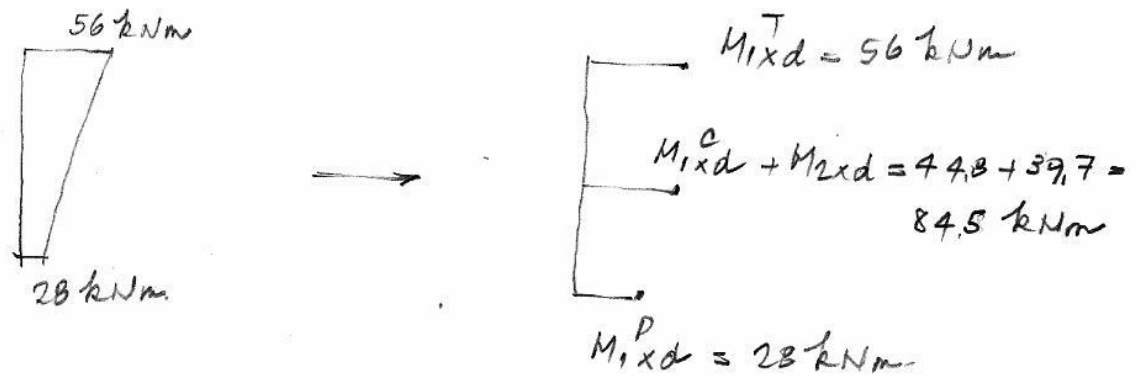
(40)

Na direção y : Como $\lambda_y < 35$, $M_{2d,y} = 0$

Assim na seção central temos



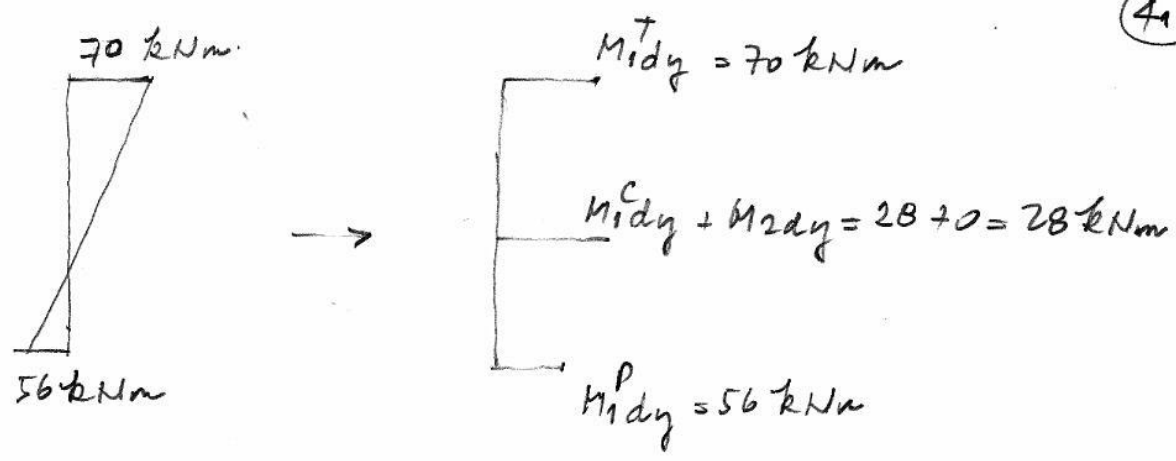
b) Momentos nas seções do Topo, Pé e Central na direção x :



$$M_A = 56 \text{ kNm}, \quad M_B = 28 \text{ kNm}$$

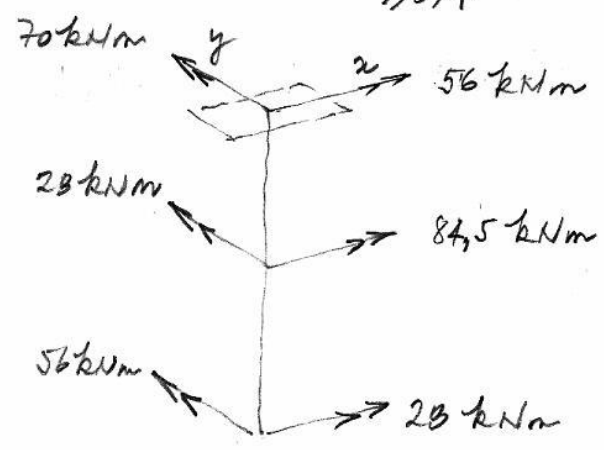
$$M_{1xd}^C = \underbrace{\left(0.6 + 0.4 \times \frac{28}{56}\right)}_{\geq 0.4} \cdot 56 = 0.8 \times 56 = 44.8 \text{ kNm}$$

Na direção y :

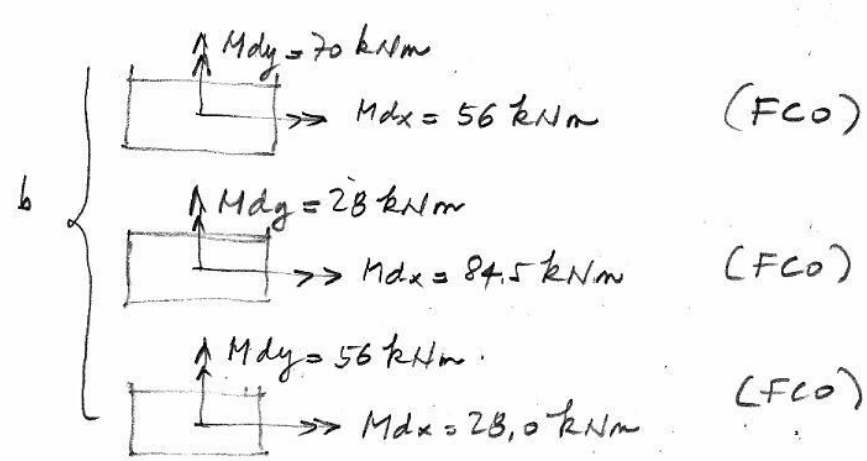
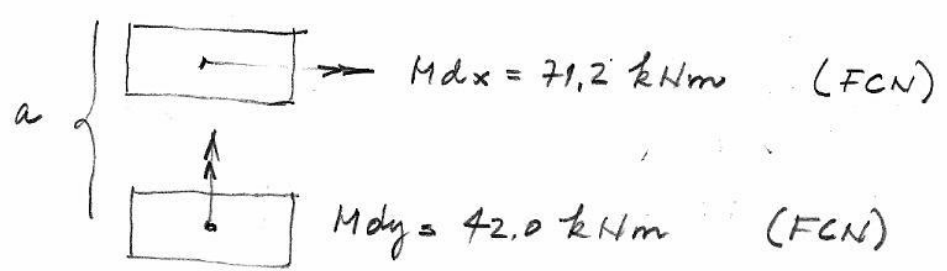


$M_A = 70 \text{ kNm}$, $M_B = -56 \text{ kNm}$

$M_{idy}^C = \underbrace{(0.6 + 0.4 \left(\frac{-56}{70} \right))}_{\geq 0.4} 70 = 0.4 \times 70 = 28 \text{ kNm}$



Assim entre os casos a) e b)



$\boxed{\sqrt{d} = 0.63}$

é possível afirmar que:

o caso a₁) é coberto pelo caso b₂)

o caso a₂) é coberto pelo caso b₁)

o caso b₃) é coberto pelo caso b₁)

Assim serão verificados apenas os casos b₁ e b₂



$$\begin{cases} \mu_{dx} = \frac{56}{0,25^2 \times 0,50 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,100 \quad (\mu_a) \\ \mu_{dy} = \frac{70}{0,25 \times 0,50^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,063 \quad (\mu_b) \end{cases}$$

ν_d	0,60	0,8	0,63
ω	0,12	0,32	

$$\begin{cases} \mu_{dx} = \frac{84,5}{0,25^2 \times 0,50 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,151 \quad (\mu_a) \\ \mu_{dy} = \frac{28}{0,25 \times 0,50^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 0,025 \quad (\mu_b) \end{cases}$$

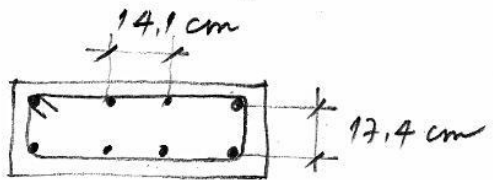
ν_d	0,60	0,80	0,63
ω	0,22	0,38	$\sim 0,25$

$$\therefore A_{tot} = 0,25 \times 25 \times 50 \times \frac{25 \times 1,15}{500 \times 1,4} = 12,8 \text{ cm}^2$$

Estimativa de d' efetivo: $c + \phi_t + \frac{\phi_c}{2} = 2,5 + 0,5 + 0,8 = 3,8 \text{ cm}$

Como esse valor é maior do que aquele utilizado no diagrama ($d' = 0,10 \times 25 = 2,5 \text{ cm}$) passamos a corrigir a armadura pela relação:

$$A_{tot\text{ corr}} = 12,8 \times \frac{(0,25 - 2 \times 0,025)}{(0,25 - 2 \times 0,038)} = 14,7 \text{ cm}^2 \sim 8 \phi 16$$



8 $\phi 16$ Estribos $\phi 5 \text{ c/19}$

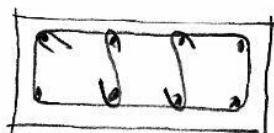
$$10\text{mm} \leq \phi_e \leq \frac{250}{8} = 31,3\text{mm} \quad \text{OK}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \times 1,6 = 6,4 \\ 4\text{cm} \end{array} \right\} \leq s_c \leq \left\{ \begin{array}{l} 40\text{cm} \\ 25\text{cm} \end{array} \right. \quad \text{OK}$$

$$\phi_t \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{4} = 4\text{mm} \\ 5\text{mm} \end{array} \right. \quad \text{OK}$$

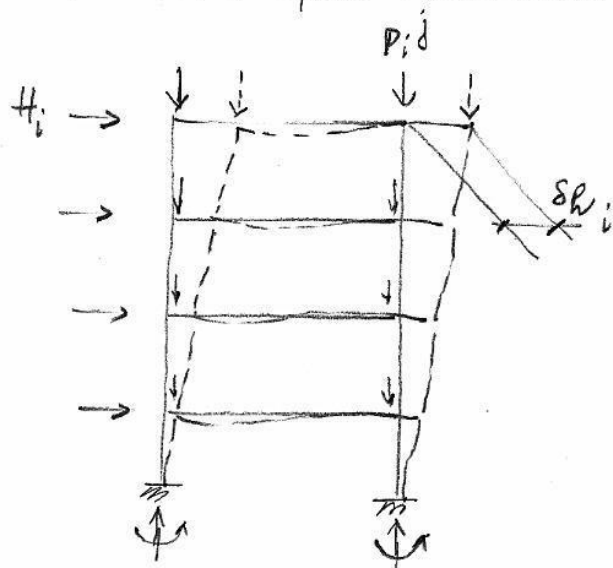
$$s_t \left\{ \begin{array}{l} 12 \times 1,6 = 19,2\text{cm} \\ 20\text{cm} \\ 25\text{cm} \end{array} \right. \quad \text{O/L}$$

Para travamento das barras intermediárias as quais estão afastadas mais que $20\phi_t = 10\text{cm}$ dos cantos dos estribos, serão adotados ganchos com mesma bitola e espaçamento dos estribos.



Os esforços globais de 2ª ordem são aqueles gerados pelo deslocamento horizontal dos nós da estrutura, provocados pela ação das cargas verticais e horizontais, ou por inclinações acidentais.

Tais deslocamentos horizontais do ponto de aplicação das cargas verticais dão origem a momentos que devem ser resistidos pela estrutura.



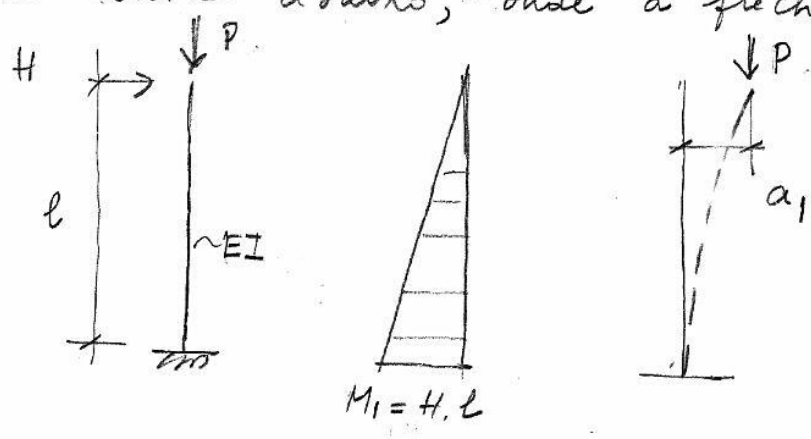
Quanto à consideração dos efeitos de 2ª ordem globais as estruturas são classificadas como de "nós fixos", ou de "nós móveis".

As estruturas de nós fixos são aquelas nos quais os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos, gerando portanto efeitos globais de 2ª ordem desprezíveis (inferiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem). Neste caso basta considerar apenas os esforços locais de 2ª ordem.

Quando os deslocamentos horizontais dos nós da estrutura não são pequenos, dando origem dessa forma a efeitos globais de 2ª ordem não desprezíveis (superiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem), dizemos que a estrutura é de nós móveis. Neste caso devem ser considerados os esforços de 2ª ordem tanto locais, como globais.

A classificação da estrutura como de "nós fixos", ou de nós móveis é feita por processos aproximados como por exemplo o coeficiente γ_I .

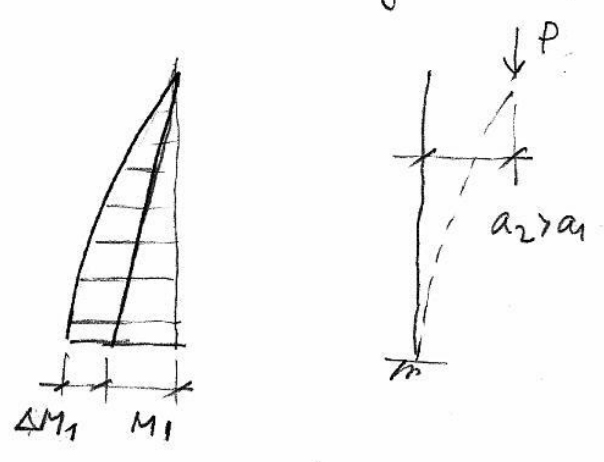
Para conceituar o coeficiente γ_I considere-se a barra abaixo, onde a flecha máxima pode



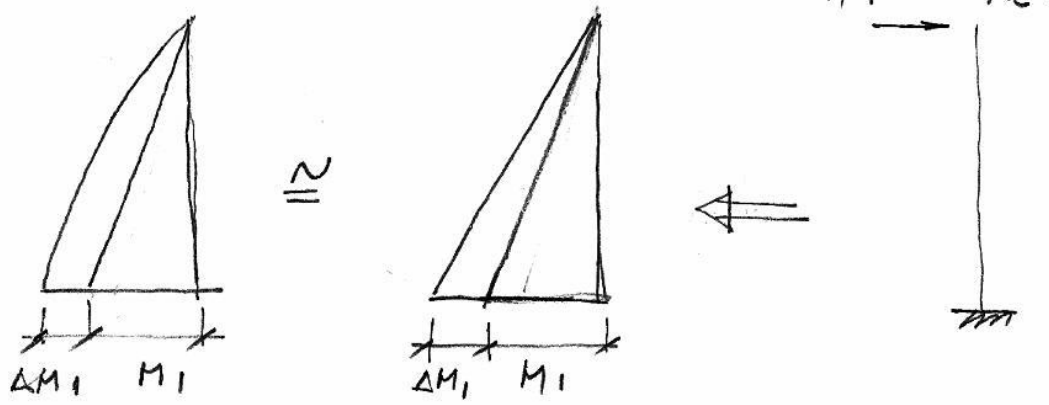
ser estimada, como $a_1 = \frac{H l^3}{3EI} = \frac{M_1 l^2}{3EI}$ a partir da

resistência dos materiais.

Na presença de a_1 surge na base o efeito de 2ª ordem dado por $\Delta M_1 = P \cdot a_1$ levando a um novo diagrama de momentos e a uma



nova flecha máxima a qual pode ser estimada aproximando-se o diagrama dos efeitos de 2ª ordem por:



Nessa forma podemos escrever:

$$a_1 = \frac{M_1}{k} \quad (1) \quad \text{onde} \quad \frac{1}{k} = \frac{l^2}{3EI}$$

$$a_2 \approx \frac{1}{k} (M_1 + \Delta M_1) = \frac{M_1}{k} + \frac{P \cdot a_1}{k} = \frac{M_1}{k} + \frac{P}{k} \cdot \frac{M_1}{k}$$

$$a_3 \approx \frac{1}{k} (M_1 + \Delta M_2) = \frac{M_1}{k} + \frac{P a_2}{k} = \frac{M_1}{k} + \frac{P}{k} \frac{M_1}{k} + \left(\frac{P}{k}\right)^2 \frac{M_1}{k}$$

$$a_n \approx \frac{M_1}{k} \left[1 + \frac{P}{k} + \left(\frac{P}{k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{P}{k}\right)^{n-1} \right]$$

Para $n \rightarrow \infty$, com $\frac{P}{k} < 1$

$$a_f = \frac{M_1}{k} \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{k}} \right) = a_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{k}} \right)$$

Assim é possível determinar a flecha final a partir de a_1 .

Pode-se também determinar o momento final como:

$$M_f = M_1 + P \cdot a_f = M_1 + P \cdot a_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{k}} \right)$$

utilizando-se (1)

$$M_f = M_1 + P \cdot \frac{M_1}{k} \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{k}} \right) = M_1 \left(1 + \frac{P/k}{1 - P/k} \right)$$

$$M_f = M_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{k}} \right)$$

Para este exemplo da base em balanço, o resultado aproximado obtido:

$$a_f = a_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{\frac{3EI}{l^2}}} \right), \text{ mostra-se contra a}$$

segurança, quando comparado com a solução mais precisa

$$a_f = a_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}}} \right) = a_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{2,47 \frac{EI}{l^2}}} \right)$$

A precisão da solução aproximada será tão melhor quanto maior for a afinidade entre as solicitações decorrentes das forças horizontais, e aqueles decorrentes do efeito de 2ª ordem.

O coeficiente γ_z pode ser identificado como:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{P}{k}} \text{ no qual empregando-se (1)}$$

tem-se

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{P \cdot a_1}{M_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_1}{M_1}}$$

onde:

ΔM_1 : É a primeira avaliação dos efeitos de 2ª ordem obtida como $P \cdot \Delta_1$

M_1 : É o momento de 1ª ordem na base da estrutura. (Momento de Tombamento)

O coeficiente δ_2 definido pela NBR 6118, é uma extensão do conceito apresentado, sendo sua aplicação restrita a estruturas reticuladas com pelo menos quatro andares.

Para a sua aplicação devem ser consideradas as ações com seus valores de cálculo, e a não linearidade de física do concreto através da redução da rigidez à flexão EI , conforme recomendações da NBR 6118.

Caso resulte $\delta_2 \leq 1,1$ a estrutura é considerada de nós fixos, e os efeitos globais de 2ª ordem podem ser desprezados.

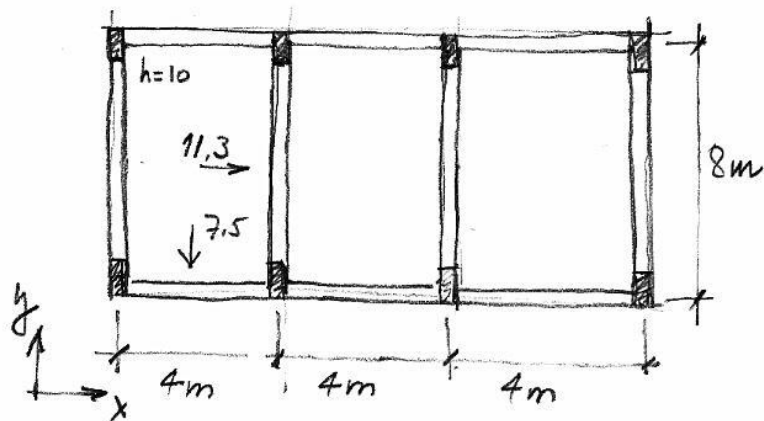
Caso resulte $\delta_2 > 1,1$ a estrutura é considerada de nós móveis.

Caso $1,1 < \delta_2 \leq 1,3$ é possível considerar os esforços globais de 2ª ordem ampliando-se os esforços solicitantes, originados pelas ações que deslocam a estrutura horizontalmente, através do fator $0,95\delta_2$.

Exemplo:

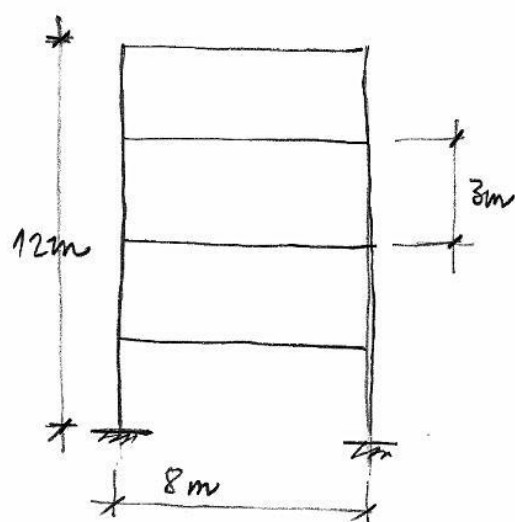
Avaliar os efeitos de 2ª ordem globais para a estrutura, segundo sua menor dimensão em planta (direção y)

adotar $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$



VIGAS $20 \times 60 \text{ (cm}^2\text{)}$

PILARES $20 \times 40 \text{ (cm}^2\text{)}$



Para esta avaliação será tomado como representativo para a estrutura um dos pórticos planos centrais

Lajes: $h = 0,10 \text{ m}$

$$g = 0,10 \times 25 = 2,5$$

$$s.c. = 2,0$$

$$rw = 1,0$$

$$\text{alv. distrib.} = \frac{2,0}{7,5} \text{ kN/m}^2$$

Viga Transversal (y)

$$g = 0,20 \times 0,60 \times 25 = 3,0$$

$$L = 2 \times 11,3 = 22,6$$

$$25,6 \text{ kN/m}$$

Viga Longitudinal (x)

$$g = 0,20 \times 0,60 \times 25 = 3,0$$

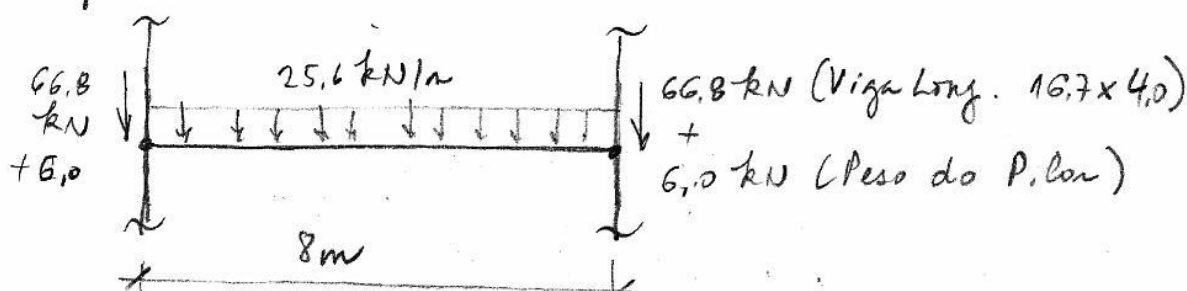
$$L = 7,5$$

$$\text{alv.} = \frac{6,2}{16,7} \text{ kN/m}$$

Peso de 1 lance de Pilar

$$g_p = 0,20 \times 0,40 \times 3,0 \times 25,0 = 6 \text{ kN}$$

Cargas Verticais atuantes em um pavimento típico

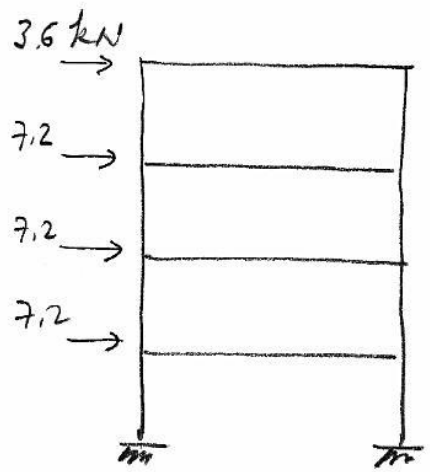


cargas Horizontais devidas ao vento, suporta como uma pressão uniforme atuante sobre a fachada do edifício.

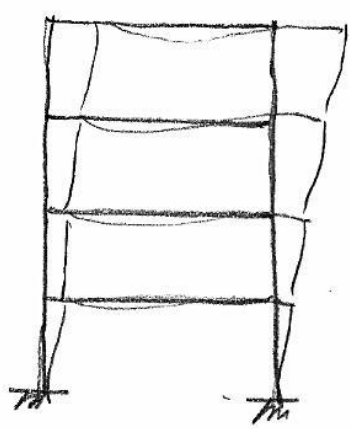
$$q_g = 0,6 \text{ kN/m}^2$$

Em cada pavimento temos: $Q_g = q_g \cdot h_{\text{par.}} \cdot \text{larg. inf.}$

$$Q_g = 0,6 \times 3,0 \times 4,0 = 7,2 \text{ kN}$$



Aplicando-se no pórtico as cargas horizontais, e verticais de cálculo ($F_d = F_k \times 1,4$) e adotando-se o produto $(E_c I)_{\text{red}} = 0,7 E_c I$ para considerar a redução de rigidez devida à fissuração temos os seguintes deslocamentos horizontais:



$\delta_R \text{ (m)}$ (desloz. horiz. do par.)
0,0109
0,00984
0,00786
0,00352

(Neste caso os deslocamentos horizontais devem-se predominantemente às cargas horizontais.)

Assim podemos determinar o valor de η_z

(51)

$$\eta_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{1,d}}{M_{1,d}}} \quad \text{onde:}$$

$$\Delta M_{1,d} = \left[25,6 \times 8,0 + 2 \times (66,8 + 6,0) \right] \times \overset{\eta_F}{1,4} \times$$

$$\times (0,0109 + 0,00984 + 0,00736 + 0,00352) = 15,5 \text{ kNm}$$

(Cargas Verticais de Cálculo de cada pavimento, multiplicadas pelos deslocamentos horizontais de seus pontos de aplicação devidos à ação das Cargas Horizontais de Cálculo)

$$M_{1,d} = 3,6 \times 1,4 \times 12,0 + 7,2 \times 1,4 \times (9,0 + 6,0 + 3,0) = 241,9 \text{ kNm}$$

(Momentos na base da estrutura devidos às ações Horizontais de Cálculo)

$$\therefore \eta_z = \frac{1}{1 - \frac{15,5}{241,9}} = 1,07 < 1,1$$

Estrutura considerada como de nós fixos. Não há necessidade da consideração dos efeitos globais de 2ª ordem

Para o mesmo edifício, reduzindo-se as dimensões dos pilares para $20 \times 30 \text{ (cm}^2\text{)}$ os deslocamentos horizontais passam a:

$\delta h \text{ (m)}$	
4º	0,0179
3º	0,0164
2º	0,0127
1º	0,0066

Dessa forma o novo valor de $\Delta M_{1,d}$ fica:

$$\Delta M_{1,d} = 26,3 \text{ kNm}$$

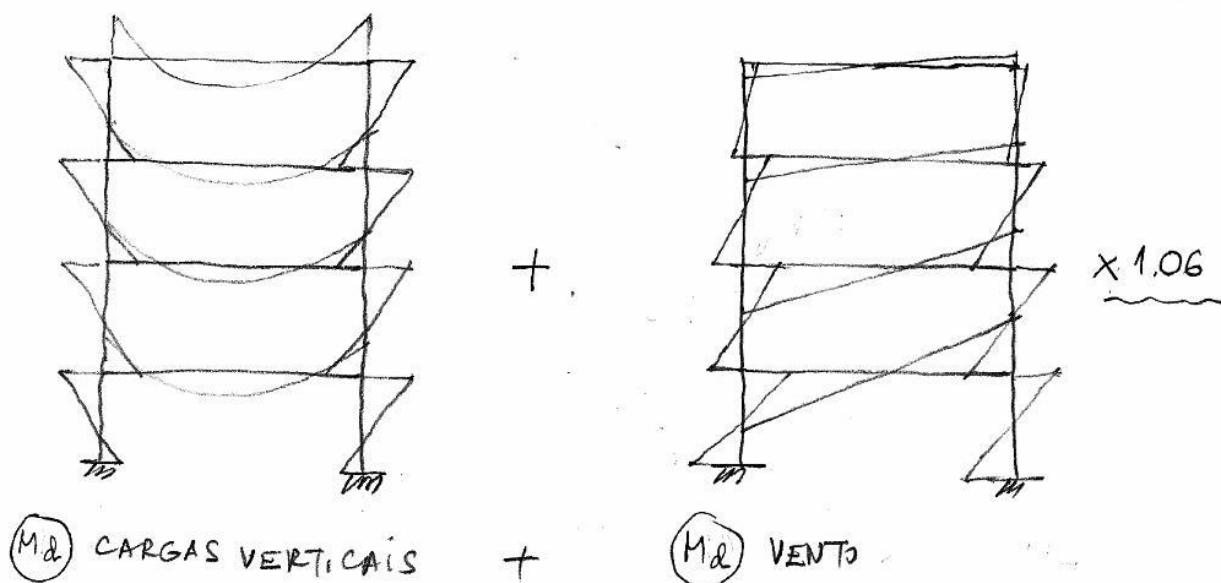
É o novo γ_z :

(52)

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{26.3}{241.9}} = 1.12 > 1.1$$

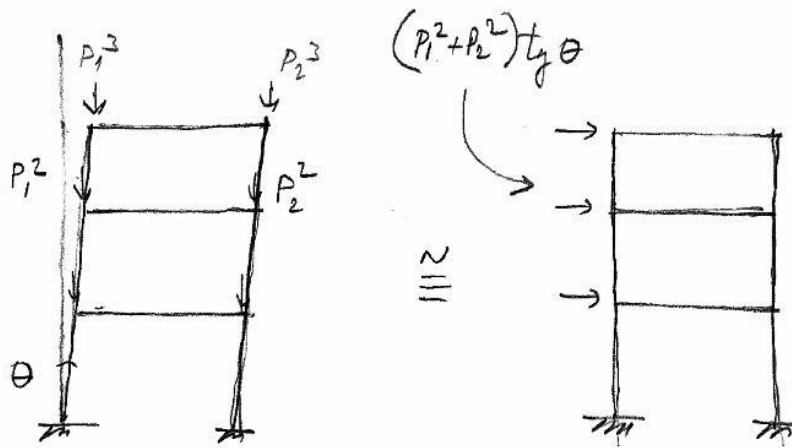
A estrutura agora deve ser considerada como de nós móveis. Uma vez que $1.1 \leq \gamma_z \leq 1.3$ é possível considerar os efeitos de 2ª ordem globais multiplicando-se os esforços solicitantes originados pelas ações que deslocam a estrutura horizontalmente, por $0.95 \gamma_z$.

Assim em cada elemento devem ser somados os esforços solicitantes devidos às cargas verticais, com aqueles devidos às cargas horizontais multiplicadas por $0.95 \gamma_z = 0.95 \times 1.12 = 1.06$.



OBS.: Quando se consideram inclinações acidentais, ou estruturas deslocáveis sob a ação das cargas verticais, ambos os efeitos podem ser transformados em um conjunto de forças horizontais ^{equivalentes} para efeito da avaliação dos efeitos globais de 2ª ordem

$$M_{d_{Total}} = M_d (Cargas Verticais) + M_d (H_{vento} + H_{ia} + H_{cv}) \times 0.95 \gamma_z$$



Deslocabilidade devido às cargas verticais.

