

# PNV 3222- Mecânica dos Sólidos II

## Listade Exercícios

Prof. Dr. Diego Felipe Sarzosa Burgos

Outubro de 2018

1. Considere um tetraedro infinitesimal formado por três superfícies paralelas aos planos coordenados e uma superfície normal ao vetor unitário  $\vec{n}$  conforme ilustrada na Fig. 1. Demonstre a fórmula de Cauchy a qual relaciona as componentes do vetor de trações atuando em qualquer superfície com normal  $\vec{n}$  e as componentes do tensor de tensões.

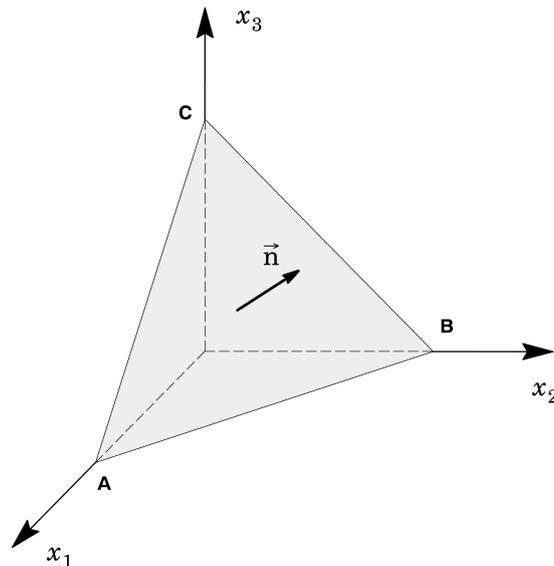


Figura 1: Tetraedro infinitesimal formado por três superfícies paralelas aos planos coordenados e uma superfície normal ao vetor unitário  $\vec{n}$ .

2. Obtenha a equação característica que define as tensões principais e expresse as suas raízes em função das componentes do tensor de tensões.
3. As componentes do tensor de tensão em um ponto  $P$  de um material solicitado em relação ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$  são representadas na forma

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde os valores de tensão são expressas em MPa. a) Determine o vetor de trações sobre um plano cuja normal possui coordenadas  $(2/7, -3/7, 6/7)$ ; b) Determine o vetor de trações sobre um plano passando pelos pontos  $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{C} = (0, 0, 2)$  - veja Fig. 1 anterior.

4. As componentes do tensor de tensão em um ponto  $P$  de um material solicitado em relação ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$  são representadas na forma

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde os valores de tensão são expressas em MPa. a) Determine as tensões principais e as direções principais; b) Determine as componentes do tensor desviador de tensão.

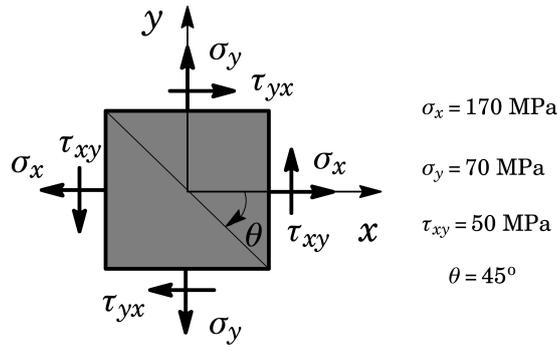


Figura 2: Elemento em estado plano de tensões.

5. Considere o tensor de tensões definido pela Eq. (2). Determine as componentes  $\sigma'_{ij}$  referentes ao sistema cartesiano  $(x', y', z')$  obtido por meio de uma rotação de  $35^\circ$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $z$ .
6. As componentes do tensor de tensão em um ponto  $P$  de um material solicitado em relação ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$  são representadas na forma

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -6 & 9 & -6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde os valores de tensão são expressos em MPa. Considere a fórmula de Cauchy (derivada do tetraedro de Cauchy conforme demonstrado anteriormente) dada por

$$T_i = n_j \sigma_{ji} \quad (4)$$

na qual  $T_i$  é o vetor de tração atuante sobre um plano contendo o ponto  $P$  cujas componentes de seu vetor normal são representadas por  $n_j$ . Determine a magnitude do vetor de tração atuante sobre um plano contendo  $P$  cujo vetor normal é expresso por

$$\vec{n} = \frac{1}{9}\hat{i} + \frac{4}{9}\hat{j} + \frac{8}{9}\hat{k} \quad (5)$$

7. Para o elemento em estado plano de tensões indicado na Fig. 2, construa o círculo de Mohr e determine:
  - i*) As componentes de tensão em um plano inclinado a  $-45^\circ$  do eixo  $x$ ;
  - ii*) A direção do plano principal e as componentes das tensões principais;
  - iii*) o plano de máxima tensão de cisalhamento e o valor desta tensão. Repita o exercício para o caso da tensão de cisalhamento  $\tau_{xy} = 0$ .
8. A seção transversal de um bloco de material compósito é ilustrada esquematicamente na Fig. 3. O material possui camadas de elementos enrijecedores intercaladas com a matriz aglutinante em um arranjo estrutural idealizado como uma estrutura sanduíche. Haverá a falha do material se: *i*) a tensão normal às camadas exceder 180 MPa ou *ii*) a tensão de cisalhamento às camadas exceder 120 MPa. Determine a máxima carga permitida.
9. Uma eixo sólido circular com diâmetro  $D = 100$  mm é submetido a um torque de 100 Nm e a uma carga axial de 1 tf como ilustrado na Fig. 4. Determine: *i*) os planos principais e as respectivas máximas tensões principais; *ii*) a máxima tensão de cisalhamento.
10. O estado de tensões no ponto P em relação ao sistema cartesiano  $(x_1, x_2, x_3)$  são representadas na forma

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2 & 0 \\ 5x_2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Determine o vetor de Cauchy no Ponto  $P = (2, 1, \sqrt{3})$  e o plano que é tangente à superfície cilíndrica  $x_2^2 + x_3^2 = 4$  (vide Figura 5). Dica (tip): Lembre o conceito do vetor gradiente para o cálculo do vetor normal  $\hat{n}$ .

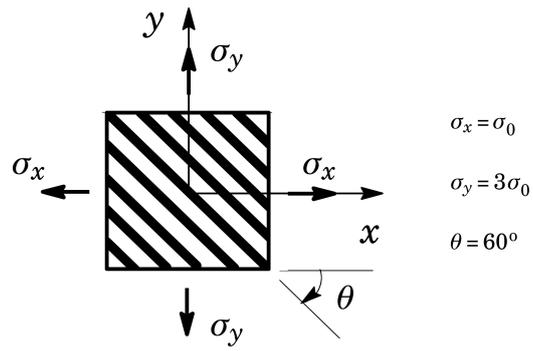


Figura 3: *Seção transversal de um bloco de material compósito.*

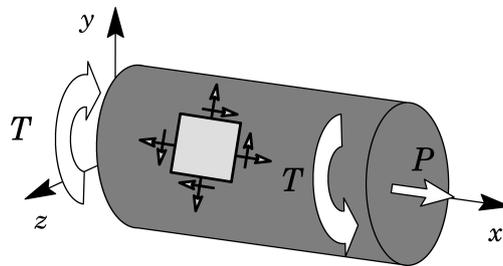
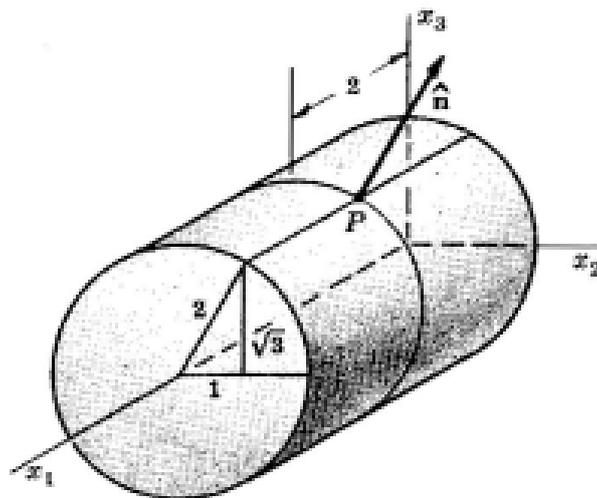


Figura 4: *Eixo sólido circular submetido a esforço torsional e carga axial.*



**Fig. 2-22**

Figura 5: *Cilindro  $x_2^2 + x_3^2 = 4$ .*

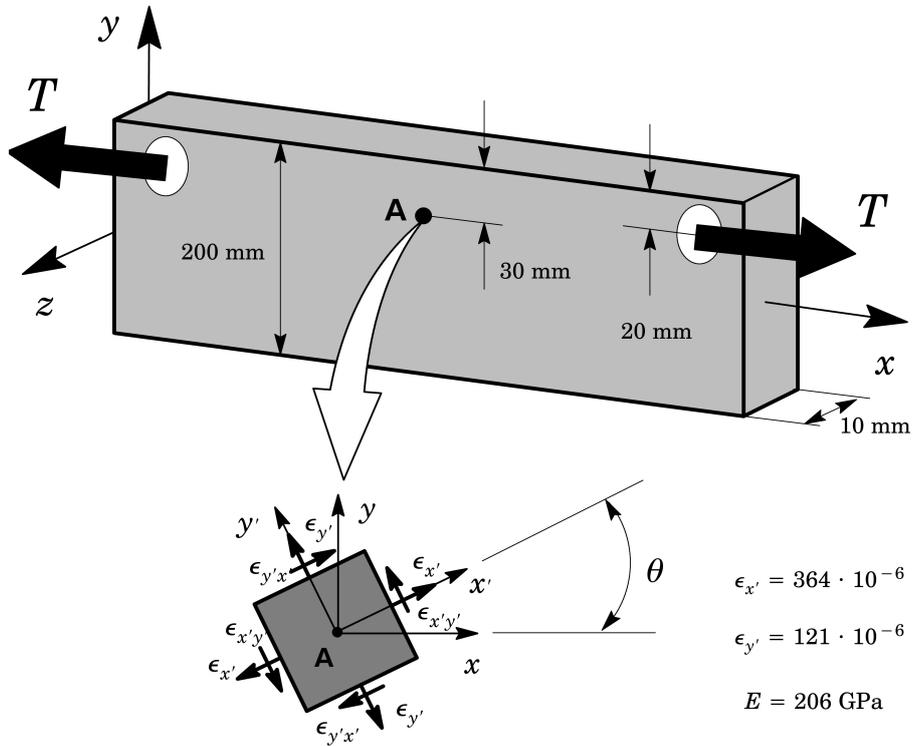


Figura 6: Barra submetida a esforço tração excêntrico.

11. Para o seguinte estado de tensões determine as tensões principais normais, os eixos principais e as tensões de cisalhamento principais.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 80 & 0 \\ 80 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Resolva o problema usando o círculo de Mohr e considerando a abordagem de autovalores e autovetores.

12. A barra ilustrada na Fig. 6 é submetida a um esforço de tração  $T$  excêntrico em relação à linha neutra. Determine o valor da tração  $T$  correspondente ao estado de deformações no elemento rotacionado de um ângulo de  $30^\circ$  como indicado na figura.
13. Um tanque de aço soldado com costura espiral ilustrado na Fig. 7 está submetido a uma força axial,  $F$ , e pressão interna,  $p$ . O tanque possui diâmetro interno,  $D_i = 600$  mm e espessura de parede,  $t = 9$  mm. Uma roseta de extensômetros a  $60^\circ$  fixada no ponto  $M$  (localizado na superfície externa do tubo fornece os seguintes valores de deformação:  $\epsilon_a = 379 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_b = 513 \cdot 10^{-6}$  e  $\epsilon_c = 629 \cdot 10^{-6}$ . Sabendo que o extensômetro A está posicionado a  $15^\circ$  em relação o eixo longitudinal (sentido anti-horário) do tanque, determine: a) O valor da pressão interna e da força axial aplicada; b) As tensões normais e de cisalhamento atuantes sobre o cordão da solda. Suponha agora que, devido a razões operacionais, a pressão interna necessite ser elevada em 50%. Entretanto, o manômetro do tanque (dispositivo para medição de pressão) está avariado e, desta forma, a roseta de extensômetros já instalada será utilizada para monitoramento da pressão. Determine as leituras da roseta para a nova condição operacional. Adote  $E = 206$  GPa e  $\nu = 0.3$ . Considere ainda o ângulo da costura espiral de solda,  $\alpha = 50^\circ$ .

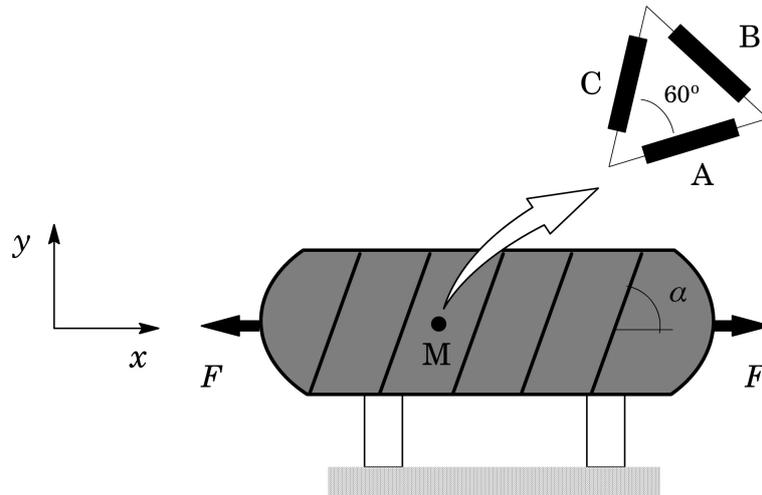


Figura 7: Tanque de aço soldado com costura espiral.

14. Considere o elemento em estado plano de tensões (2-D /  $\sigma_z = 0$ ) ilustrado na Fig. 8. Utilizando a transformação Cartesiana do tensor de tensões (conforme formulário anexo), mostre que o lugar geométrico de todos os valores  $(\sigma_n, \tau_{nt})$  em função do ângulo  $\theta$  é um círculo de centro  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  e raio  $R = \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$  no plano  $(\sigma, \tau)$ . Em outras palavras, obtenha a equação do círculo de Mohr (veja formulário) a partir da transformação Cartesiana do tensor de tensões sob condição de estado plano de tensões.

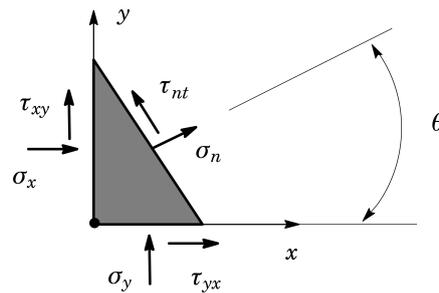


Figura 8: Elemento em estado plano de tensões.

15. Um vaso de pressão ilustrado na Fig. 9 opera a uma pressão interna de 10 MPa. Para o elemento **A** indicado na Fig. 9 (localizado sobre o chapeamento do vaso), construa a representação gráfica do círculo de Mohr e determine: *i*) As componentes de tensão em um plano inclinado a  $30^\circ$  do eixo  $x$ ; *ii*) A direção do plano principal e as componentes das tensões principais; *iii*) o plano de máxima tensão de cisalhamento e o valor desta tensão .
16. Uma eixo sólido circular com diâmetro  $D = 100$  mm é submetido a um torque  $T$  e a uma carga axial  $P$  como ilustrado na Fig. 10. Uma roseta de extensômetros aplicada no ponto **A** da superfície do eixo apresenta as leituras de deformações também indicada na figura. Assumindo  $E = 206$  GPa e  $\nu = 0.3$ , determine as magnitudes das forças  $T$  e  $P$ .

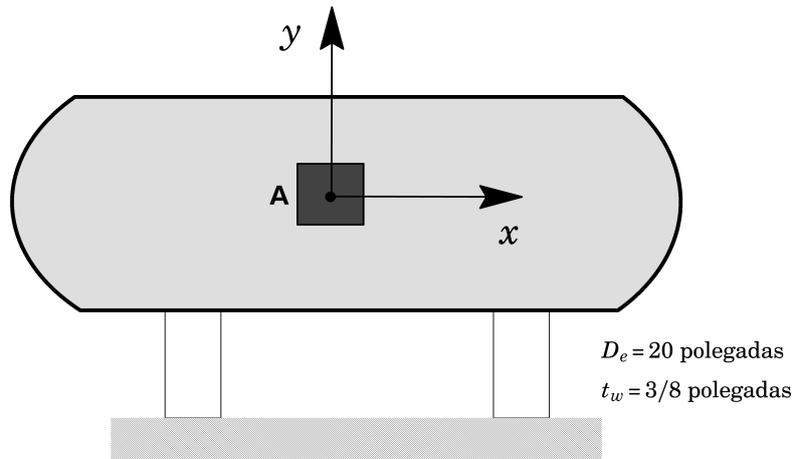


Figura 9: Esquemático de um vaso de pressão.

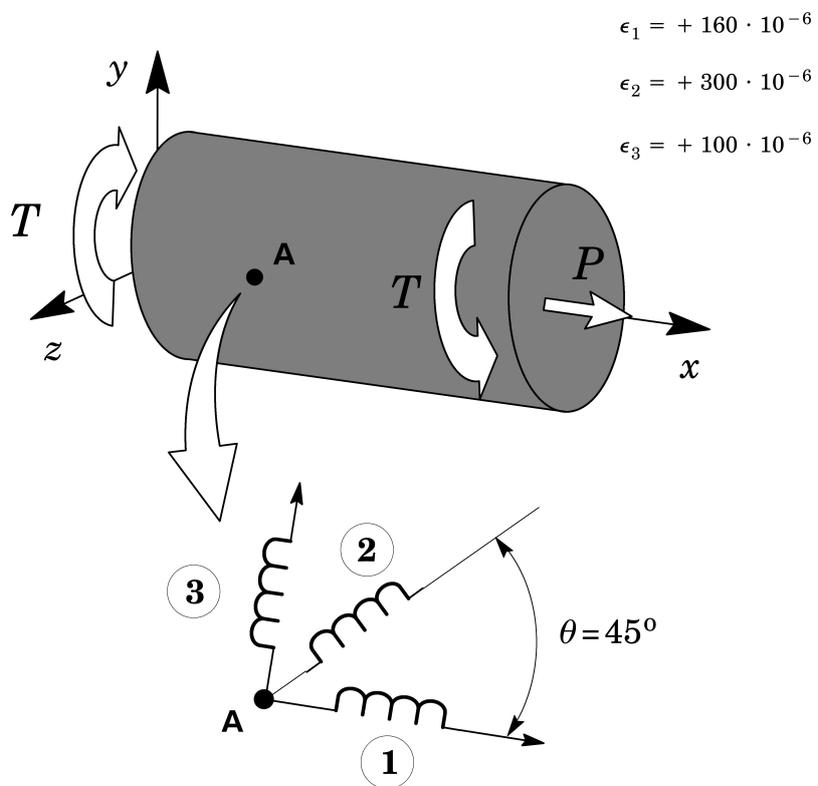


Figura 10: Eixo sólido circular submetido a um torque  $T$  e a uma carga axial  $P$ .