te utilizada para descrever a potência de dispositivos como motores elétricos ou motores automotivos. Um cavalo-vapor é definido como 550 ft·lb/s, que equivale a aproximadamente 746 W.

O trabalho pode ser expresso em unidades de potência × tempo. Isto é a origem do termo *quilowatt-hora*, que é utilizado pela companhia de fornecimento de energia elétrica para medir a quantidade de trabalho (na forma de energia elétrica) que foi fornecido para a residência das pessoas. Um quilowatt-hora é o trabalho realizado em 1 hora por um agente trabalhando a uma taxa constante de 1 kW.

Também pode-se expressar a potência fornecida a um corpo no que se refere à velocidade do corpo e à força que age sobre ele. Em um curto intervalo de tempo dt, o corpo move-se a uma distância $d\vec{\mathbf{s}}$ e o trabalho realizado sobre o corpo é $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Pode-se reescrever a Eq. 11.8 como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{s}}}{dt},$$

a qual se torna, após substituir-se a velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ por $d\vec{\mathbf{s}}/dt$,

$$P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}. \tag{11-10}$$

Se $\vec{\mathbf{F}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são paralelas entre si, isto pode ser escrito como

$$P = Fv. \tag{11-11}$$

Observe que a potência pode ser negativa se $\vec{\mathbf{F}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ forem antiparalelos. O fornecimento de potência negativa a um corpo significa realizar trabalho negativo sobre ele: a força exercida sobre o corpo pelo agente externo está no sentido oposto ao deslocamento $d\vec{\mathbf{s}}$ e, portanto, oposto a $\vec{\mathbf{v}}$.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.3.

Um elevador vazio tem um peso de 5.160 N (1.160 lb). Ele foi projetado para transportar uma carga máxima de 20 passageiros do chão até ao piso do 25.° andar de um prédio em um tempo de 18 segundos. Supondo que o peso médio de um passageiro seja de 710 N ≈ 71 kg e que a distância entre os andares seja de 3,5 m, qual é a potência média que precisa ser fornecida pelo motor do elevador? (Presuma que todo o trabalho de elevação venha do motor e que o elevador não tenha um contrapeso.)

Solução Supõe-se que o elevador suba a uma velocidade constante e que as distâncias percorridas durante a aceleração e a desaceleração possam ser desprezadas. Com uma velocidade constante, a força resultante é *nula*, de modo que a força para cima exercida pelo motor é igual em intensidade ao peso total do elevador com os passageiros: $F = 5.160\ \text{N} + 20(710)\text{N} = 19.400\ \text{N}$. O trabalho que precisa ser realizado é

$$W = Fs = (19.400\ \text{N})(25 \times 3{,}5\ \text{m}) = 1{,}7 \times 10^6\ \text{J}.$$

Assim, a potência média é

$$P_{\text{méd}} = \frac{W}{t} = \frac{1{,}7 \times 10^6\ \text{J}}{18\ \text{s}} = 94\ \text{kW}.$$

Isto equivale a 126 hp, que é aproximadamente a potência fornecida por um motor de automóvel. Certamente, as perdas por atrito e outras ineficiências aumentarão a potência que o motor precisa fornecer para fazer subir o elevador.

Na prática, um elevador costuma ter um contrapeso que vai para baixo à medida que o elevador sobe. A gravidade realiza trabalho *positivo* sobre o contrapeso em queda e trabalho *negativo* sobre o elevador subindo. O trabalho que precisa ser fornecido pelo motor, que é igual à intensidade do trabalho *resultante* realizado pela gravidade, é, portanto, consideravelmente reduzido.

11.4 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL

Até então considerou-se somente o trabalho realizado por uma força *constante*. Muitas das forças que foram previamente consideradas não variam em intensidade ou em direção quando um corpo se move; a gravidade perto da superfície da Terra é um bom exemplo. Porém, diversas forças variam em intensidade com o deslocamento do corpo, e, desta forma, é necessário considerar-se como avaliar o trabalho realizado por tais forças. Supõe-se uma situação unidimensional: a força tem apenas uma componente x e a partícula move-se somente na direção x (no sentido positivo ou negativo). Inicialmente, discute-se o procedimento geral para analisar o trabalho realizado por uma força variável e, então, aplica-se este método à análise de uma importante força que ainda não foi considerada — a saber, a força exercida por uma mola quando é estendida ou comprimida.

Considere um corpo que se move ao longo do eixo x, de x_i para x_f, quando uma força $F_x(x)$ é aplicada a ele. Ao escrever a força como $F_x(x)$, indica-se que esta varia em intensidade (e possivelmente em sentido) quando o deslocamento do corpo varia. A estratégia utilizada nesta análise é dividir o intervalo de x_i a x_f em um grande número de pequenos intervalos. Dentro de cada pequeno intervalo, considera-se a força como sendo aproximadamente constante (embora a força possa ser diferente para intervalos diferentes), de modo que o trabalho em qualquer intervalo possa ser calculado utilizando-se os métodos para forças constantes desenvolvidos anteriormente neste capítulo. Eventualmente, os intervalos fazem-se infinitamente numerosos e suficientemente pequenos, o que acaba levando aos métodos do cálculo.

A curva suave na Fig. 11.12 mostra uma força arbitrária $F_x(x)$ que age sobre um corpo movendo-se de x_i para x_f. Divide-se o deslocamento total em um número N de pequenos intervalos de tamanho idêntico δx (Fig. 11.12*a*). Considere o primeiro intervalo, no qual existe um pequeno deslocamento δx de x_i até $x_i + \delta x$. Faz-se este intervalo suficiente pequeno, de forma que a componente x da força tenha um valor F_1 aproximadamente constante. Assim, pode-se usar a Eq. 11.6 para determinar o trabalho δW_1 realizado pela força neste intervalo: $\delta W_1 = F_1\,\delta x$. Analogamente, no segundo intervalo, no qual o corpo move-se de $x_i + \delta x$ até

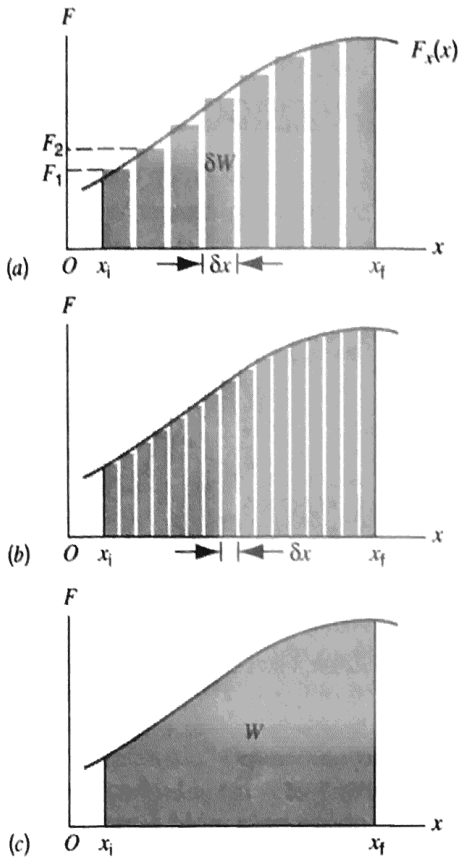

Fig. 11.12 (a) A área sob a curva da força unidimensional variável $F_x(x)$ é aproximada pela divisão da região entre os limites x_i e x_f em um número de intervalos de largura δx. A soma das áreas das faixas retangulares é aproximadamente igual à área sob a curva. (b) Uma aproximação melhor é obtida com o uso de um número maior de faixas mais estreitas. (c) No limite $\delta x \to 0$, obtém-se a área real.

$x_i + 2\delta x$, a força é aproximadamente constante com uma componente x igual a F_2, e o trabalho realizado pela força nesse intervalo é $\delta W_2 = F_2\,\delta x$. Com a continuação deste processo para todos os N intervalos, pode-se determinar o trabalho total como sendo a soma de todos os termos:

$$W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \cdots$$

$$= F_1\,\delta x + F_2\,\delta x + F_3\,\delta x + \cdots$$

ou

$$W = \sum_{n=1}^{N} F_n\,\delta x. \tag{11-12}$$

Para obter uma aproximação melhor, pode-se dividir o deslocamento total de x_i para x_f em um maior número de intervalos, como mostrado na Fig. 11.12*b*, de modo que δx seja menor e o valor de F_n em cada intervalo caracterize melhor a força dentro do intervalo. Fica claro que é possível obter uma aproximação cada vez melhor tomando-se δx cada vez menor, de modo a ter-se um número de intervalos cada vez maior. Pode-se obter uma solução exata para o trabalho realizado por F_x, fazendo-se δx chegar a zero e o número de intervalos N a infinito. Assim, o resultado exato é

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n\,\delta x. \tag{11-13}$$

A relação

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n\,\delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx$$

define a integral de F_x em relação a x, de x_i a x_f. Numericamente, esta quantidade é exatamente igual à área entre a curva da força e o eixo x, entre os limites x_i e x_f (Fig. 11.12*c*). Portanto, uma integral pode ser interpretada graficamente como uma área. Pode-se escrever o trabalho total realizado pela força F_x no deslocamento de um corpo de x_i a x_f como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx. \tag{11-14}$$

O sinal de W é automaticamente determinado na Eq. 11.14 pelo sinal de F_x e pelos limites do intervalo, x_i e x_f. Por exemplo, se F_x for sempre positivo e se a partícula mover-se no sentido positivo de x ($x_f > x_i$), então, W será positivo.

TRABALHO REALIZADO PELA FORÇA DE UMA MOLA

Como exemplo de uma força unidimensional variável, pode-se considerar a força exercida por uma mola quando ela é esticada ou comprimida. A Fig. 11.13 mostra um corpo acoplado a uma mola. A mola permanece relaxada quando nenhuma força age sobre ela, e, nesta situação, o corpo está localizado em $x = 0$. Este estado é chamado de estado *relaxado* da mola. Se uma força externa $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ é aplicada ao corpo, a mola se distende (Fig. 11.13*a*) ou se comprime (Fig. 11.13*b*). A mola exerce uma força $\vec{\mathbf{F}}_m$, que se opõe à força aplicada. A força da mola é, às vezes, chamada de *força de restauração*, porque ela sempre age no sentido de restaurar o corpo à sua posição em $x = 0$. Supõe-se que o corpo move-se devagar, de modo que seja possível considerar que ele está em equilíbrio em todos os instantes. Neste caso, $\vec{\mathbf{F}}_{ext} = -\vec{\mathbf{F}}_m$.

Qual é a natureza da força que a mola exerce sobre o corpo quando se distende ou se comprime? Através de experimentos, observa-se que esta força não é constante — quanto mais se varia o comprimento da mola, maior é a força exercida pela mola (de forma equivalente, pode-se dizer que maior é a força externa que precisa ser exercida para variar seu comprimento). Para a maioria das molas, observa-se, por aproximação, que a intensidade desta força varia *linearmente* com a distância que a mola é distendida ou comprimida em relação ao seu comprimento

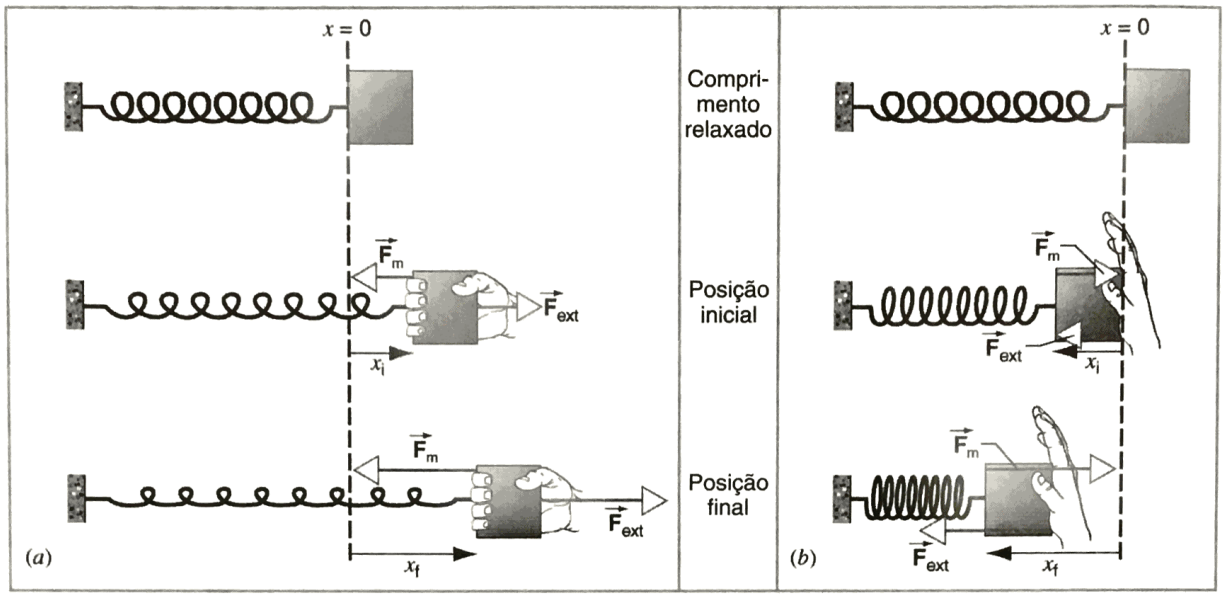

Fig. 11.13 Um corpo acoplado a uma mola está em $x = 0$ quando a mola está relaxada. Uma força externa move o corpo do deslocamento inicial x_i ao deslocamento final x_f. O eixo x é positivo para a direita. (*a*) Distensão. (*b*) Compressão.

relaxado. No caso unidimensional, pode-se escrever a componente x da força exercida pela mola sobre o corpo acoplado a ela como

$$F_m = -kx, \tag{11-15}$$

que se conhece como a *lei de Hooke*. A constante k na Eq. 11.15 é chamada de *constante elástica* da mola, e sua unidade do SI corresponde a newton por metro (N/m). É uma medida da força necessária para distender uma mola de determinado valor; molas mais rígidas têm maiores valores de k. A Eq. 11.15 é válida desde que não se distenda a mola além de uma faixa limitada.

O sinal negativo na Eq. 11.15 indica que o sentido da força exercida pela mola é sempre oposto ao deslocamento do corpo de sua posição quando a mola está em seu estado relaxado (que é definido como $x = 0$). Quando a mola é distendida, segundo o sistema de coordenadas da Fig. 11.13*a*, então $x > 0$ e assim F_m é negativo, indicando que a força da mola age para a esquerda. Quando a mola é comprimida, como na Fig. 11.13*b*, então $x < 0$ e $F_m > 0$.

A Eq. 11.14 pode ser aplicada para calcular o trabalho realizado pela força da mola na Fig. 11.13*a*, quando a mola for distendida de seu estado inicial (onde $x = x_i$) até seu estado final (onde $x = x_f$). O trabalho realizado sobre o corpo pela força da mola durante este deslocamento é:

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} F_m\,dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -\tfrac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \tag{11-16}$$

A Eq. 11.16 mostra que o trabalho realizado pela mola é negativo quando $x_f > x_i$, como no caso da Fig. 11.13*a*; o sentido de $\vec{F}_m$ é oposto ao deslocamento, de modo que o valor negativo de W é coerente com a discussão desenvolvida após a Eq. 11.2.

Se a força externa age de modo a comprimir a mola, como no caso da Fig. 11.13*b*, ambos x e x_f são negativos. Porém, $|x_f| > |x_i|$ e mais uma vez a Eq. 11.16 mostra que o trabalho realizado sobre o corpo pela mola é negativo. Assim, a Eq. 11.16 permanece válida, não importando como o corpo se move sob a ação da força da mola. Observe que, de acordo com a Eq. 11.16, se o corpo move-se de um deslocamento positivo $+x$ para um deslocamento negativo $-x$ de intensidade igual, o trabalho realizado pela força da mola é nulo. Como se pode explicar isto no que diz respeito à força exercida pela mola?

Se começa-se a distender ou comprimir a partir da posição relaxada ($x_i = 0$) e move-se o corpo de uma distância x, então

$$W_m = -\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{11-17}$$

Uma vez que, na Eq. 11.17, x é elevado ao quadrado, o trabalho realizado pela mola sobre o corpo é o mesmo em intensidade e sinal tanto quando se distende ou se comprime de uma mesma distância x.

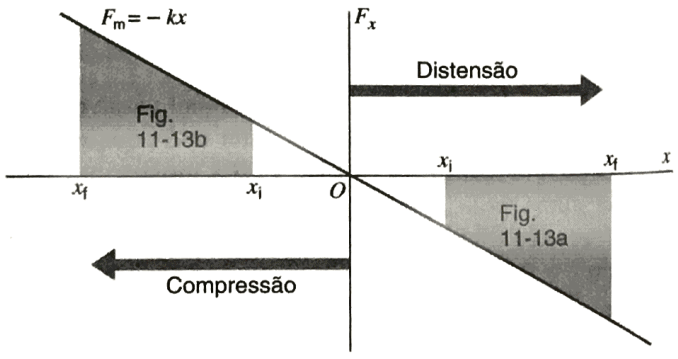

Fig. 11.14 O trabalho realizado pela força da mola sobre o corpo quando ele se move de x_i para x_f é igual à área sob o gráfico de $F_m = -kx$ entre x_i e x_f. As áreas sombreadas representam o trabalho negativo realizado pela

Com $\vec{\mathbf{F}}_{ext} = -\vec{\mathbf{F}}_m$, o trabalho realizado sobre o corpo pela força externa é positivo quando o trabalho realizado pela força da mola é negativo. Assim, $W_{ext} > 0$ para ambos os casos mostrados na Fig. 11.13.

A Fig. 11.14 mostra como seria a Fig. 11.12 para a força da mola. As regiões sombreadas representam o trabalho negativo realizado sobre o corpo pela força da mola para os dois casos da Fig. 11.13. Através de cálculo geométrico, é possível mostrar que as áreas sombreadas correspondem ao trabalho resultante da Eq. 11.16 e que os sinais também estão corretos.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.4.

Uma mola está suspensa verticalmente no seu estado relaxado. Um bloco de massa $m = 6{,}40$ kg está preso à mola, mas o bloco é suportado de modo que a mola não se distende inicialmente. Em seguida, a mão que suporta o bloco é baixada devagar (Fig. 11.15*a*), de modo que o bloco desce com velocidade constante até atingir o ponto onde ele permanece em equilíbrio após a mão ser retirada. Neste ponto, observa-se que a mola distendeu-se uma distância $d = 0{,}124$ m de seu comprimento anterior relaxado. Determine o trabalho realizado sobre o bloco neste processo (*a*) pela gravidade, (*b*) pela mola e (*c*) pela mão.

Solução (*a*) Pode-se determinar a constante elástica da mola, que não foi fornecida no problema, para a condição de equilíbrio. Tomando o eixo *y* como sendo positivo para cima, a força resultante na direção *y* no equilíbrio (Fig. 11.5*b*) é $\Sigma F_y = kd - mg$. No equilíbrio, $\Sigma F_y = 0$, de modo que $kd = mg$, ou

$$k = mg/d = (6{,}40 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2)/(0{,}124 \text{ m}) = 506 \text{ N/m}.$$

Para determinar-se o trabalho realizado pela gravidade, W_g, nota-se que a gravidade é uma força constante e que a força e o deslocamento são paralelos, de modo que se pode utilizar a Eq. 11.1:

$$W_g = Fm = mgd = (6{,}40 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2)(0{,}124 \text{ m}) = +7{,}78 \text{ J}.$$

Este valor é positivo, porque a força e o deslocamento estão no mesmo sentido.

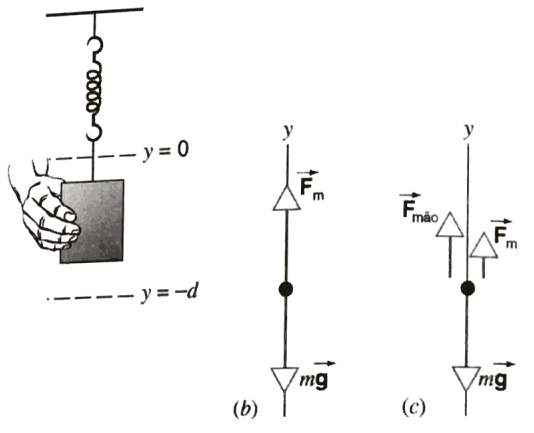

Fig. 11.15 Problema Resolvido 11.4. (*a*) Uma mão baixa um bloco preso a uma mola. (*b*) O diagrama de corpo livre do bloco em sua posição de equilíbrio. (*c*) O diagrama de corpo livre do bloco quando ele é baixado.

(*b*) Para determinar o trabalho W_m realizado pela mola, pode-se utilizar a Eq. 11.7 com $x = -d$:

$$W_m = -\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(506 \text{ N/m})(0{,}124 \text{ m})^2 = -3{,}89 \text{ J}.$$

Este valor é negativo, porque a força e o deslocamento têm sentidos opostos.

(*c*) Para se determinar o trabalho realizado pela mão, é necessário que se conheça a força para cima exercida pela mão $F_{mão}$, na medida em que o bloco é baixado com velocidade constante, $a_y = 0$. Utilizando-se o diagrama de corpo livre da Fig. 11.15*c*, a força resultante durante este processo é $\Sigma F_y = F_m + F_{mão} - mg$, de modo que $F_{mão} = mg - F_m$. Observe que, até o bloco chegar à sua posição de equilíbrio, $mg > F_m$, de modo que $F_{mão} > 0$, o que é o esperado ($F_{mão}$ possui uma componente *y* positiva, uma vez que age para cima). Pode-se determinar o trabalho realizado pela mão utilizando-se a forma integral da Eq. 11.14: $W_{mão} = \int F_{mão}(y)dy$, com $F_{mão} = mg - (-ky)$:

$$W_{mão} = \int_0^{-d} (mg + ky)\,dy = mg(-d) + \tfrac{1}{2}k(-d)^2 = -3{,}89 \text{ J}.$$

Observe que $W_m + W_g + W_{mão} = 0$. Você pode explicar isto?

11.5 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL: CASO BIDIMENSIONAL (OPCIONAL)

A força $\vec{\mathbf{F}}$ que age sobre um corpo pode variar tanto em direção como em intensidade, e a partícula pode mover-se ao longo de uma trajetória curvilínea. Para calcular-se o trabalho neste caso geral, divide-se a trajetória em um número elevado de pequenos deslocamentos $\delta\vec{\mathbf{s}}$, cada um tangente à trajetória e apontando no sentido do movimento. A Fig. 11.16 mostra dois deslocamentos selecionados para uma situação particular; a figura também mostra a força $\vec{\mathbf{F}}$ e o ângulo ϕ entre $\vec{\mathbf{F}}$ e $\delta\vec{\mathbf{s}}$ para cada posição. Pode-se determinar a quantidade do trabalho δW realizado sobre a partícula durante o deslocamento $\delta\vec{\mathbf{s}}$ através da expressão

$$\delta W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \delta\vec{\mathbf{s}} = F \cos\phi\, \delta s. \qquad (11\text{-}18)$$

Aqui, $\vec{\mathbf{F}}$ é a força que age na localização de $\delta\vec{\mathbf{s}}$. Pode-se determinar um valor aproximado para o trabalho realizado pela força variável $\vec{\mathbf{F}}$ sobre a partícula durante o seu movimento de *i* para *f* na Fig. 11.16, somando-se os elementos de trabalho realizado ao longo de cada segmento que compõe a trajetória de *i* para *f*. Se os segmentos $\delta\vec{\mathbf{s}}$ tornarem-se infinitamente pequenos, eles podem ser substituídos por diferenciais $d\vec{\mathbf{s}}$ e a soma sobre os segmentos da linha pode ser substituída por