

**Tópicos de Física Estatística - IFUSP - 2018**  
**Introdução à técnica de grupo de renormalização no espaço dos**  
**momentos**  
**Notas de aula - Silvio Salinas - v2 - 21/10/2018**

A primeira parte dessas notas de aula é sobre o “modelo gaussiano”, versão solúvel mas muito simplificada do modelo de Ising, proposta por Mark Kac em 1947 (ver a reminiscência de Kac em *Physics Today* **17**, #10, 40, 1964).

A função de partição de um modelo de Ising bem geral é escrita como uma soma sobre configurações,

$$Z_I = \sum_{\{\sigma_r\}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H \sigma_r \right\}, \quad (1)$$

em que  $\sigma_r = \pm 1$  é uma variável de spin no sítio  $\vec{r}$  de uma rede cristalina, a primeira soma é sobre as configurações de spins, e as outras duas somas são sobre os sítios da rede. A interação de troca,  $J_{r,r'} = J(|\vec{r}' - \vec{r}|)$ , pode ser bem geral, mas deve depender apenas da distância entre dois sítios da rede;  $H$  é um campo externo aplicado e  $\beta$  é o inverso da temperatura. Para simplificar a notação, desde que não haja ambiguidades, vamos omitir os símbolos de vetor nas posições dos sítios da rede.

Com o objetivo de contornar as dificuldades de uma soma discreta sobre configurações, Mark Kac propôs que as variáveis de spin fossem contínuas, assumindo valores entre  $-\infty$  e  $+\infty$ , mas com um peso gaussiano para assegurar a convergência das integrais. A função de partição desse “modelo gaussiano” é dada por

$$Z_G = \prod_r \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma_r^2 \right) \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H \sigma_r \right\}. \quad (2)$$

A forma quadrática do integrando pode ser diagonalizada através de uma transformação de Fourier. Esse problema é solúvel em qualquer dimensão, mesmo na presença de campo externo, mas o comportamento crítico é do tipo campo médio. Além disso, como há uma catástrofe de baixas temperaturas, pois as integrais divergem abaixo de determinada temperatura crítica,

houve pouco interesse pelo modelo gaussiano durante um certo tempo. Mas o modelo se tornou útil novamente quando se percebeu que o próprio modelo de Ising tem um comportamento crítico do tipo campo médio acima de  $d = 4$  dimensões. Tornou-se então interessante tratar perturbativamente uma versão contínua do modelo de Ising, com base no parâmetro pequeno  $\epsilon = 4 - d$ , em torno da solução gaussiana em quatro dimensões.

Na primeira parte dessas notas definimos o modelo gaussiano, introduzimos transformadas de Fourier na rede, e obtemos resultados exatos para as funções termodinâmicas e para as formas assintóticas das correlações de pares. Esperamos que essas notas sirvam como introdução elementar a conceitos úteis em física estatística e teoria de campos.

Devido às limitações do modelo gaussiano, o próprio Mark Kac propôs um modelo alternativo, com variáveis de spin contínuas, mas submetidas a um vínculo global ao invés dos vínculos gaussianos individuais. A função de partição desse "modelo esférico" é dada por

$$Z_E = \prod_r \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] \delta \left( \sum_r \sigma_r^2 - N^d \right) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H \sigma_r \right\}, \quad (3)$$

em que o argumento da função delta de Dirac contém o "vínculo esférico" ( $N^d$  é o número total de sítios de uma rede  $d$ -dimensional). Introduzindo uma representação integral da função delta e recorrendo à representação de Fourier, é possível reduzir o problema a uma única integral que pode ser resolvida no limite termodinâmico (por uma aplicação judiciosa do método do ponto de sela). Esse modelo esférico também é solúvel em qualquer dimensão, mesmo na presença de campo externo, produzindo expoentes críticos que diferem das previsões usuais de campo médio (mas que também diferem das experiências). Apesar de um tanto distante da realidade física, o modelo esférico tem sido utilizado como excelente laboratório para testes das teorias sobre o comportamento crítico.

No início da segunda parte dessas notas, vamos mostrar que o modelo gaussiano é particularmente adequado para um cálculo de grupo de renormalização no espaço dos momentos, preservando graus de liberdade associados a pequenos momentos (grandes comprimentos de onda). Introduzimos em seguida o hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson, cujo comportamento crítico deve pertencer à mesma classe de universalidade do modelo de Ising. Desenvolvemos então um cálculo perturbativo, baseado na expansão de Wilson-Fisher em torno de  $d = 4$  dimensões, para obter o expoente crítico

térmico do hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson em primeira ordem em  $\epsilon = 4 - d > 0$ .

Esse texto deve ser lido com boa dose de cautela, pois ainda pode haver um certo número de errinhos!

## 1 Modelo gaussiano

Utilizando a notação conhecida da física estatística, a função de partição do modelo gaussiano pode ser escrita na forma

$$Z_G = \left[ \prod_r \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] \exp [\overline{\mathcal{H}}_G], \quad (4)$$

com o hamiltoniano efetivo

$$\overline{\mathcal{H}}_G = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H_r \sigma_r - \sum_r \frac{1}{2} \sigma_r^2, \quad (5)$$

em que estamos aplicando um campo externo  $H_r$  dependendo do sítio da rede. As somas são sobre os sítios de uma rede  $d$ -dimensional e o parâmetro de troca  $J_{r,r'} = J(|r' - r|)$  depende apenas da distância de separação entre os sítios  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ .

Adotando condições periódicas de contorno, introduzimos a transformada discreta de Fourier,

$$\sigma_r = \frac{1}{N^{d/2}} \sum_q \hat{\sigma}_q \exp(iqr), \quad (6)$$

em que o vetor  $q$  pertence à primeira zona de Brillouin.

Usando a condição de ortogonalização,

$$\sum_r \exp[i(q + q')r] = N^d \delta_{q,-q'}, \quad (7)$$

é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_G &= \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \beta J_{r,r'} \sigma_r \sigma_{r'} + \sum_r \beta H_r \sigma_r - \sum_r \frac{1}{2} \sigma_r^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_q \left[ \hat{K}(q) - 1 \right] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \sum_q \hat{\sigma}_q \hat{L}_{-q}, \end{aligned} \quad (8)$$

com as definições

$$\widehat{K}(q) = \sum_h \beta J(|h|) \exp(-iqh) \quad (9)$$

e

$$\widehat{L}_q = \frac{1}{N^{d/2}} \sum_r \beta H_r \exp(-iqr) \quad (10)$$

\*\*\*\*\*

Vamos agora registrar algumas observações:

(i) Considerando (por simplicidade) um caso unidimensional, com parâmetro de rede unitário, as condições periódicas de contorno implicam que

$$\exp(iqN) = 1. \quad (11)$$

Portanto, supondo que o número  $N$  de sítios seja par, a primeira zona de Brillouin é definida pela escolha

$$q = 0, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm 2\frac{2\pi}{N}, \dots, \pm \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{2\pi}{N}, \pi. \quad (12)$$

Essa escolha, que deve ser conferida, não é necessária, mas é muito conveniente. Note que existem sempre  $N$  valores de  $q$ .

(ii) A variável de spin  $\sigma_r$  é real. Levando em conta a escolha da zona de Brillouin, temos então

$$\sum_q \widehat{\sigma}_q \exp(iqr) = \sum_q \widehat{\sigma}_q^* \exp(-iqr) = \sum_q \widehat{\sigma}_{-q}^* \exp(iqr), \quad (13)$$

ou seja,

$$\widehat{\sigma}_q = \widehat{\sigma}_{-q}^*, \quad (14)$$

indicando que a introdução de variáveis de spin complexas não altera o número de graus de liberdade do sistema. É conveniente escrever  $\widehat{\sigma}_q$  em termos das partes real e imaginária,

$$\widehat{\sigma}_q = \frac{1}{\sqrt{2}} (R_q + iI_q), \quad \forall q \neq 0, \quad (15)$$

de onde vem que

$$R_q = R_{-q}; \quad I_q = -I_{-q}. \quad (16)$$

Note que  $\hat{\sigma}_0 = R_0$  é uma variável real.

(iii) Usando essas definições, temos

$$\sum_r \sigma_r^2 = \sum_q \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} = R_0^2 + \sum_{q \neq 0} \frac{1}{2} (R_q^2 + I_q^2), \quad (17)$$

ou seja,

$$\sum_r \sigma_r^2 = R_0^2 + \sum_{q>0} (R_q^2 + I_q^2), \quad (18)$$

em que a soma é feita sobre a "metade positiva" da primeira zona de Brillouin. A partir dessas considerações justificamos a transformação jacobiana

$$\left[ \prod_r \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_r \right] (\dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} dR_0 \left[ \prod_{q>0} \int_{-\infty}^{+\infty} dR_q \int_{-\infty}^{+\infty} dI_q \right] (\dots). \quad (19)$$

\*\*\*\*\*

Na presença de um campo uniforme,  $H_r = H$  para todo  $r$ , fica trivial realizar as integrações gaussianas e escrever a função de partição do modelo gaussiano,

$$Z_G = \exp \left\{ \frac{N^d H^2 \beta^2}{2 [1 - \hat{K}(0)]} \right\} \prod_q \left[ \frac{2\pi}{1 - \hat{K}(q)} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

em que a produtória é sobre todos os pontos da primeira zona de Brillouin. É importante conferir com cuidado os termos dessa expressão; note que  $\hat{K}(q)$  é sempre real, e que  $\hat{K}(q) = \hat{K}(-q)$ .

Nesse ponto o problema está praticamente resolvido. A partir de  $Z_G$  podemos obter o comportamento termodinâmico do sistema. No entanto, essa forma de  $Z_G$  indica que o modelo gaussiano não faz sentido para

$$1 - \hat{K}(q) = 1 - \beta \hat{J}(q) < 0, \quad (21)$$

ou seja, para

$$k_B T < \max_q \hat{J}(q). \quad (22)$$

Portanto, há uma temperatura limite, ou temperatura crítica  $T_c$ , dada por

$$k_B T_c = \max_q \hat{J}(q). \quad (23)$$

## 1.1 Modelo gaussiano ferromagnético numa rede hiper-cúbica

Restringindo o problema a um modelo ferromagnético com interações  $J > 0$  entre primeiros vizinhos numa rede hiper-cúbica em  $d$  dimensões, com parâmetro de rede unitário, temos

$$\hat{K}(q) = \sum_h \beta J (|h|) \exp(-iqh) = 2\beta J \sum_{j=1}^d \cos q_j, \quad (24)$$

ou seja,

$$\hat{K}(q) = 2\beta J d - \beta J q^2 + O(q^4), \quad (25)$$

assumindo um valor máximo,  $\hat{K}(0) = 2\beta J d$ , para  $q = 0$ .

A magnetização por spin é dada por

$$m = \frac{1}{\beta N^d} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z_G = \frac{\beta H}{1 - \hat{K}(0)}, \quad (26)$$

que se anula para  $H = 0$  (e não existe abaixo de  $T_c$ ). Temos então a suscetibilidade magnética,

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{\beta}{1 - \hat{K}(0)} = \frac{\beta}{1 - 2\beta J d} = \frac{1}{k_B T - 2Jd}, \quad (27)$$

que diverge, com expoente  $\gamma = 1$ , na temperatura crítica  $T_c = 2Jd/k_B$ .

Note que, nas vizinhanças do ponto crítico, a magnetização contra o campo pode ser representada por uma curva universal (desde que sejam feitos gráficos de  $m/t^\beta$  contra  $H/t^{\beta+\gamma}$ , em que  $t = (T - T_c)/T_c$  e os expoentes  $\beta$  e  $\gamma$  assumem os valores usuais de campo médio).

A campo nulo, a energia interna por spin é dada por

$$u = -\frac{1}{2N^d} \sum_q \frac{\hat{J}(q)}{1 - \hat{K}(q)}. \quad (28)$$

No limite termodinâmico, temos

$$u = -\frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d q \frac{\widehat{J}(q)}{1 - \widehat{K}(q)}. \quad (29)$$

Note que aparecem estruturas semelhantes na solução do modelo de Ising na rede quadrada. Essa integral deve ser feita na zona de Brillouin. Certamente pode haver problemas nas vizinhanças de  $q = 0$ . Por exemplo, na temperatura crítica devemos analisar o comportamento em  $q = 0$  da integral

$$\int_0^1 q^{d-1} dq \frac{1}{q^2} = \frac{1}{d-2} q^{d-2} \Big|_0, \quad (30)$$

que diverge para  $d < 2$  (note que não tem sentido uma energia interna infinita!)

O calor específico a campo nulo é dado por

$$c_{H=0} = \frac{1}{2} k_B \frac{1}{N^d} \sum_q \left[ \frac{\widehat{K}(q)}{1 - \widehat{K}(q)} \right]^2. \quad (31)$$

Para analisar o comportamento crítico, transformamos a soma numa integral e retemos apenas os termos dominantes, para  $q$  pequeno, no numerador e no denominador. Temos então a forma assintótica

$$c_{H=0} \sim \frac{1}{2} k_B \frac{1}{N^d} \frac{N^d}{(2\pi)^d} \int C_d q^{d-1} dq \frac{(2\beta Jd)^2}{[\Delta T + \beta Jq^2]}, \quad (32)$$

em que

$$\Delta T = 1 - 2\beta Jd \quad (33)$$

vai a zero no ponto crítico, e a constante  $C_d$  incorpora o resultado de integrações angulares. Fazendo uma pequena manipulação algébrica, ainda é fácil mostrar que

$$c_{H=0} \sim t^{\frac{d}{2}-2}, \quad (34)$$

ou seja, o calor específico a campo nulo comporta-se com o expoente  $\alpha = 2 - d/2$  (com  $\alpha = 0$  quando  $d = 4$ ). O calor específico certamente não diverge para  $d \geq 4$ .

## 1.2 Correlações gaussianas

As correlações de dois pontos (spin-spin) são dadas por

$$\Gamma(r, r') = \langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle = \frac{1}{N^d} \sum_q \exp[iq \cdot r + iq' \cdot r'] \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle, \quad (35)$$

em que, por simplicidade, não estamos utilizando a notação vetorial.

Levando em conta a representação das variáveis complexas de spin em termos das componentes reais e imaginárias, dada pela eq. (15), temos

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_{q'} + i R_q I_{q'} + i I_q R_{q'} - I_q I_{q'} \rangle. \quad (36)$$

Como não há acoplamentos entre as variáveis  $R_q$  e  $I_q$ , temos uma expressão mais simples,

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_{q'} \rangle - \frac{1}{2} \langle I_q I_{q'} \rangle. \quad (37)$$

Também é fácil verificar que

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_q \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_q \rangle - \frac{1}{2} \langle I_q I_q \rangle = 0, \quad (38)$$

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q R_{-q} \rangle - \frac{1}{2} \langle I_q I_{-q} \rangle = \frac{1}{2} \langle R_q^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle I_q^2 \rangle = \langle R_q^2 \rangle \quad (39)$$

e

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = 0 \quad \text{para } q' \neq -q. \quad (40)$$

Resumindo, podemos escrever

$$\langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{q'} \rangle = \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle \delta_{q', -q} \quad (41)$$

e

$$\langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle = \frac{1}{N^d} \sum_q \exp[iq \cdot (r - r')] \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle, \quad (42)$$

ficando bem evidente a simetria translacional. Resta agora notar que

$$\hat{\Gamma}(q) = \langle \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} \rangle = \langle R_q^2 \rangle = \frac{1}{1 - \hat{K}(q)}, \quad (43)$$

que é a expressão conhecida do "propagador gaussiano" (verificar esse cálculo).

Finalmente podemos escrever as correlações de dois pontos,

$$\Gamma(r) = \Gamma(r, 0) = \frac{1}{N^d} \sum_q \exp(iq \cdot r) \frac{1}{1 - \widehat{K}(q)}. \quad (44)$$

No limite termodinâmico, para um ferromagneto na rede hipercúbica com interações de primeiros vizinhos, temos

$$\Gamma(r) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{\exp(iq \cdot r)}{1 - 2\beta J (\cos q_1 + \cos q_2 + \dots + \cos q_d)}, \quad (45)$$

que é conhecida como uma função de Green na rede (e que lembra expressões obtidas no contexto das soluções exatas para o modelo de Ising).

Nas vizinhanças da criticalidade, com  $\Delta T = 1 - 2\beta J d \sim 0$ , a equação (45) assume uma forma bem mais simples, restrita aos termos de pequenos momentos (grandes comprimentos de onda) no denominador do integrando. Então escrevemos a forma assintótica

$$\Gamma(r) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{\exp(iq \cdot r)}{\Delta T + \beta J q^2 + \dots}, \quad (46)$$

que ainda pode ser simplificada se a zona de Brillouin for transformada num objeto com simetria esférica, e a variável radial for tomada de 0 a  $\infty$ . Note que o elemento de volume em  $d$  dimensões é dado por

$$d^d q = q^{d-1} \sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1}, \quad (47)$$

e os limites de integração vão de 0 a  $\pi$  para  $\theta_1$  e de 0 a  $2\pi$  para  $\theta_2, \theta_3, \dots$ . Para  $d \geq 4$ , não há o menor problema com essas integrais.

Pelo menos em três dimensões,  $d = 3$ , nas vizinhanças da criticalidade (isto é, com  $\Delta T$  pequeno, mas  $\Delta T \neq 0$ ), é fácil obter um resultado analítico. Nesse caso, descartando termos de ordem  $q^4$  no denominador, temos a forma assintótica

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &\sim \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi q^2 dq \frac{\exp(iqr \cos \theta)}{\Delta T + \beta J q^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi q^2 \left( \frac{\sin qr}{qr} \right) \frac{1}{\Delta T + \beta J q^2} dq. \end{aligned} \quad (48)$$

A forma assintótica que estamos procurando (com  $\Delta T \rightarrow 0$ ) pode ser obtida estendendo os limites de integração. Então temos

$$\Gamma(r) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \frac{\text{sen}(qr)}{qr} \frac{1}{t+q^2} dq, \quad (49)$$

que é uma integral dominada pelo polos complexos,  $q = \pm i\sqrt{t}$ . Recorrendo às técnicas usuais de integração complexa, obtemos finalmente a forma assintótica (para  $t \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow \infty$ )

$$\Gamma(r) \sim \frac{1}{r} \exp\left[-\frac{r}{\xi}\right], \quad (50)$$

em que

$$\xi \sim t^{-1/2} \quad (51)$$

é a comprimento de correlação, com o expoente crítico  $\nu = 1/2$ . Ainda em três dimensões, exatamente na temperatura crítica, isto é, fazendo  $\Delta T = 0$ , temos

$$\Gamma(r) \sim \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\beta J} \int_0^\pi dq \int_{-1}^1 dx \exp(iqrx) \sim \frac{1}{r}, \quad (52)$$

de onde vem o expoente  $\eta = 0$  associado ao decaimento das correlações críticas.

Não é difícil mostrar, pelo menos qualitativamente, que esses resultados ainda permanecem válidos para  $d \geq 4$ , com a forma

$$\Gamma(r) \sim \frac{1}{r^{d-2}} \exp\left[-\frac{r}{\xi}\right] \quad (53)$$

em que  $\xi \sim t^{-1/2}$  é o resultado famoso de campo médio obtido por Ornstein e Zernike.

O modelo gaussiano confirma então a ideia que nós temos das correlações críticas. Fora da criticalidade, as correlações decaem exponencialmente, com um comprimento característico de decaimento, que se torna cada vez maior ao nos aproximarmos do ponto crítico. Na criticalidade, não há comprimento característico, pois as correlações decaem com uma lei de potência.

Nota técnica: há um artifício atribuído a Montroll, na consideração de funções de Green na rede, que pode ser utilizado para obter resultados assintóticos em  $d$  dimensões. A ideia consiste em considerar a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots dq_d \frac{\exp(i \vec{q} \cdot \vec{r})}{q^2 + \kappa^2} \quad (54)$$

e utilizar a identidade

$$\int_0^{\infty} \exp(-\tau x) dx = \frac{1}{\tau} \quad (55)$$

para se livrar do denominador. Após manipulações elementares, temos a integral

$$I = \int_0^{\infty} dt \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} \exp\left(-\kappa^2 t - \frac{r^2}{4t}\right), \quad (56)$$

que pode ser expressa em termos de uma função de Bessel (ver a tabela de Gradshteyn e Ryzhik, Academic Press, edições a partir de 1965). Para  $\kappa = 0$ , é fácil obter um decaimento da forma  $I \sim 1/r^{d-2}$ , confirmando o expoente  $\eta = 0$ . Para  $\kappa \neq 0$ , mas  $\kappa \rightarrow 0$ , temos o resultado assintótico

$$I \sim (\kappa r)^{(d-3)/2} \exp(-\kappa r), \quad (57)$$

confirmando o valor de campo médio,  $\nu = 1$ .

## 2 Renormalização do modelo gaussiano

A idéia do cálculo de grupo de renormalização no espaço dos momentos consiste em integrar sobre as variáveis de spin associadas a valores grandes do vetor de onda  $q$ , fazendo uma operação que é equivalente à eliminação no espaço real dos graus de liberdade de curto alcance, dentro de bloquinhos de dimensão  $b > 1$ . Como os grandes comprimentos de onda não devem influenciar o comportamento crítico, o primeiro passo consiste em deformar a zona de Brillouin, que vai ser tomada como uma esfera de raio unitário. Em seguida essa esfera é dividida num caroço interno, de raio  $1/b$ , e numa coroa externa, com  $1/b < q < 1$  (ver a figura 1). A integração é feita apenas sobre os graus de liberdade correspondentes a valores de  $q$  na coroa externa.

Usando uma notação mais compacta, a função de partição do modelo gaussiano pode ser escrita como

$$Z_G = \int [d\hat{\sigma}_q] \exp(\bar{\mathcal{H}}_G), \quad (58)$$

em que

$$\int [d\hat{\sigma}_q] (\dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} dR_0 \left[ \prod_{q>0} \int_{-\infty}^{+\infty} dR_q \int_{-\infty}^{+\infty} dI_q \right] (\dots) \quad (59)$$

e

$$\bar{\mathcal{H}}_G = \frac{1}{2} \sum_q [2\beta Jd - 1 - \beta Jq^2 + O(q^4)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \beta H N^{d/2} R_0, \quad (60)$$

em que estamos nos restringindo a análise a um modelo numa rede hiper-cúbica de dimensão  $d$ , com interações ferromagnéticas entre primeiros vizinhos, na presença de um campo externo uniforme. Como a integral se fatoriza, ainda podemos escrever

$$Z_G = \int^< [d\hat{\sigma}_q] \int^> [d\hat{\sigma}_q] \exp(\bar{\mathcal{H}}_0^< + \bar{\mathcal{H}}_0^>), \quad (61)$$

em que os símbolos  $<$  ou  $>$  referem-se a valores de  $q$  no caroço interno (dentro) ou na coroa externa (fora) da zona de Brillouin. A integração sobre os graus de liberdade correspondentes a valores de  $q$  na coroa externa produz uma função da temperatura bem comportada, pois as singularidades somente se manifestam nas vizinhanças de  $q = 0$ . Então temos

$$Z_G = f_0(T) \int^< [d\hat{\sigma}_q] \exp(\bar{\mathcal{H}}_0^<), \quad (62)$$

com o hamiltoniano transformado

$$\bar{\mathcal{H}}' = \bar{\mathcal{H}}_0^< = \frac{1}{2} \sum_{|q|<1/b} [2\beta Jd - 1 - \beta Jq^2 + O(q^4)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \beta H N^{d/2} R_0. \quad (63)$$

Vamos tornar essa expressão um pouco mais interessante introduzindo a mudança de variáveis

$$\hat{\sigma}_q \rightarrow \frac{1}{(\beta J)^{1/2}} \hat{\sigma}_q \quad (64)$$

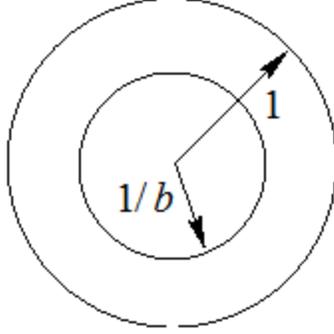


Figure 1: Zona de Brillouin ( $q < 1$ ), dividida em um caroço interno ( $q < 1/b$ ) e uma coroa externa ( $1/b < q < 1$ ).

e a notação

$$r = \frac{2\beta Jd - 1}{\beta J}. \quad (65)$$

Como é comum na área, estamos usando  $r$  ao invés de  $t$ ; o ponto crítico deve corresponder a  $r = 0$  (por favor, não confundam  $r$  com a posição). Temos então

$$\bar{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \sum_{|q| < 1/b} [r - q^2 + \omega q^4 + O(q^6)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \frac{\beta H N^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R_0, \quad (66)$$

em que foi explicitamente incluído um termo de ordem  $q^4$  (e a soma se realiza apenas “sobre o caroço” da zona de Brillouin). Transformado a soma numa integral, temos

$$\bar{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \frac{N^d}{(2\pi)^d} \int_0^{1/b} d^d q [r - q^2 + \omega q^4 + O(q^6)] \hat{\sigma}_q \hat{\sigma}_{-q} + \frac{\beta H N^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R_0. \quad (67)$$

Para comparar com o hamiltoniano original, vamos restaurar os comprimentos e a magnitude das variáveis de spin através das transformações de escala

$$q' = bq \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{b} q' \quad (68)$$

e

$$\widehat{\sigma}_{\frac{1}{b}q'} \rightarrow b\widehat{\sigma}'_{q'}. \quad (69)$$

Essa última escolha, em particular, que mantém inalterado o coeficiente do termo em  $q^2$  do hamiltoniano, vai preservar o decaimento das correlações críticas (isto é, o expoente crítico  $\eta$ ). Num cálculo perturbativo de ordem mais baixa, como no esquema de Wilson-Fisher que vamos utilizar mais adiante, essa escolha ainda é suficiente.

Temos então o hamiltoniano transformado  $\overline{\mathcal{H}}'$ , com  $(N')^d = (N/b)^d$  graus de liberdade, que deve ser comparado com o hamiltoniano inicial,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \frac{(N')^d}{(2\pi)^d} \int_0^1 d^d q' [b^2 r - q'^2 + \omega b^{-2} q'^4 + O(q'^6)] \widehat{\sigma}'_{q'} \widehat{\sigma}'_{-q'} + \\ + b^{1+\frac{d}{2}} \frac{\beta H (N')^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R'_0, \end{aligned} \quad (70)$$

ou seja,

$$\overline{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2} \sum_{q'} [b^2 r - q'^2 + \omega b^{-2} q'^4 + O(q'^6)] \widehat{\sigma}'_{q'} \widehat{\sigma}'_{-q'} + b^{1+\frac{d}{2}} \frac{\beta H (N')^{d/2}}{(\beta J)^{1/2}} R'_0, \quad (71)$$

em que a soma é feita sobre uma zona de Brillouin com  $(N')^d = (N/b)^d$  pontos. Comparando com o hamiltoniano inicial, obtemos as relações de recorrência

$$r' = b^2 r, \quad (72)$$

$$\omega' = b^{-2} \omega \quad (73)$$

e

$$H' = b^{1+\frac{d}{2}} H. \quad (74)$$

de onde vem o ponto fixo gaussiano (de natureza trivial),

$$r^* = \omega^* = H^* = 0. \quad (75)$$

O termo em  $q^4$  é irrelevante (como também seriam os termos de ordem superior). Os expoentes térmico e magnético são dados por

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \frac{d}{2}, \quad (76)$$

de onde obtemos

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad \Delta = \beta + \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{d}{4}. \quad (77)$$

Para  $d = 4$ , recuperamos os valores usuais de campo médio.

\*\*\*\*\*