

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

Capítulo IV (O MEF na análise elasto-plástica de treliças planas)

Sergio Persival Baroncini Proença

Prof. Titular

São Carlos, Outubro de 2018.

1. O problema elasto-plástico de valor de contorno: caso unidimensional

Considere-se uma barra de comprimento L , área de seção transversal A , fixa numa extremidade e livre na outra, conforme ilustra a Figura 1a. A barra está submetida a uma força concentrada P em sua extremidade livre. O material da barra apresenta resposta elasto-plástica.

Empregando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, o chamado *problema elasto-plástico unidimensional de valor de contorno* pode ser colocado na forma que segue:

Determinar $u(x)$, atendendo à condição de contorno essencial, tal que para todo deslocamento virtual δu admissível (diferenciável e homogêneo nessa mesma condição de contorno),

$$\int_L N(\varepsilon(u)) d\delta u = P\delta u(L) \quad \forall \delta u \text{ diferenciável} \quad (1)$$

A relação anterior exprime em forma fraca uma condição de equilíbrio entre a distribuição de força normal (compatível com o campo incógnito mediante relações constitutiva e de compatibilidade) e a força P .

Na relação (1), pela condição δu diferenciável se entende que existe:

$$d\delta u = \frac{d(\delta u)}{dx} dx = (\delta u)' dx.$$

Observa-se que uma interpretação para $(\delta u)'$ decorre do modelo cinemático que descreve a deformação da barra submetida a força axial. De acordo com esse modelo, o campo de deformação virtual se relaciona com o campo de deslocamento virtual pela relação: $\delta\varepsilon = (\delta u)'$. Assim, o trabalho virtual das forças normais pode ser escrito como:

$$\int_0^L N d\delta u = \int_0^L N \underbrace{\delta u'}_{d\delta u} dx = \int_0^L \sigma A \delta\varepsilon dx.$$

Ainda na relação anterior a tensão normal $\sigma(x)$ pode ser colocada em correspondência com um campo de deformações reais mediante o modelo constitutivo elasto-plástico. Por essa razão, o problema de valor de contorno é não-linear e sua resolução envolve a aplicação do carregamento em *passos*

finitos de modo a se poder empregar consistentemente o modelo constitutivo *elasto-plástico* incremental.

Por outro lado, o emprego do método dos elementos finitos permite a obtenção de soluções aproximadas para o problema não-linear de equilíbrio em questão. Na busca de solução, aplica-se a estratégia iterativa de Newton-Raphson, a partir da linearização do erro no equilíbrio. Tais aspectos são tratados neste capítulo.

2. O emprego do MEF

Para abordar de modo simplificado a aplicação do método dos elementos finitos, porém ressaltando convenientemente os aspectos conceituais, admita-se uma discretização do problema em um único elemento finito de dois nós.

Como mostra a Figura 1b, a cada uma das extremidades do elemento associa-se um grau de liberdade virtual. Em conjunto os graus de liberdade caracterizam deslocamentos virtuais nodais, denotados por δu_1 e δu_2 , respectivamente associados à extremidade fixa e livre da barra.

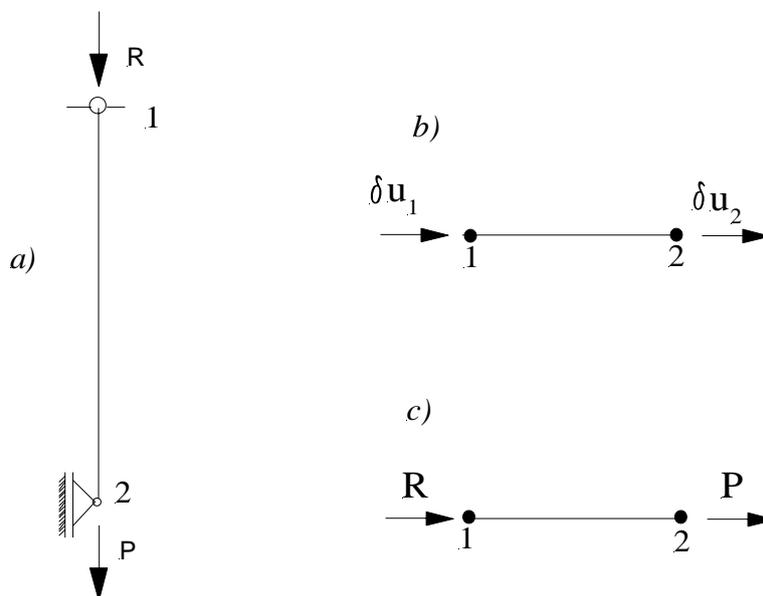


Figura 1 - Graus de liberdade nodais e forças externas admissíveis no elemento genérico

Tais graus de liberdade podem ser reunidos num vetor de deslocamentos virtuais nodais do elemento: $\underline{\delta u}^T = \{\delta u_1 \ \delta u_2\}$.

A Figura 1c ilustra que o elemento admite forças externas de natureza concentrada, aplicadas nos nós, no caso representando a reação no apoio fixo (R) e a força (P) aplicada no apoio livre. Tais forças podem ser reunidas constituindo componentes do vetor de forças nodais: $\underline{F}^T = \{R \ P\}$.

Para o campo de deslocamentos virtuais ao longo do elemento pode-se adotar uma aproximação linear, constituindo uma interpolação dos graus de liberdade nodais virtuais:

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x) \delta u_i \quad (2)$$

sendo: $\varphi_1(x) = \frac{1-x}{L}$ e $\varphi_2(x) = \frac{x}{L}$ com $0 \leq x \leq L$.

Nota-se que as funções de forma $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ verificam a propriedade do delta de Kronecker em relação aos seus valores nodais. Empregando-se uma notação matricial, o campo de deslocamentos virtuais pode ser representado na forma:

$$\delta u(x) = \{\varphi_1(x) \ \varphi_2(x)\} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \underline{\varphi} \underline{\delta u} \quad (3)$$

Analogamente, uma aproximação linear é admitida válida para o campo de deslocamentos reais:

$$u(x) = \{\varphi_1(x) \ \varphi_2(x)\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underline{\varphi} \underline{u} \quad (4)$$

Naturalmente, \underline{u} é o vetor dos graus de liberdade nodais reais.

Na forma fraca do equilíbrio aparece a deformação virtual $\delta \varepsilon$. A partir de sua definição e da aproximação linear adotada para os deslocamentos virtuais, essa deformação se determina por:

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon &= \frac{d\delta u}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx}\delta u_1 + \frac{d\varphi_2}{dx}\delta u_2 \\
&= \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = (\underline{B}\underline{\varphi})\delta u \\
&= \underline{\delta u}^T (\underline{B}\underline{\varphi})^T
\end{aligned} \tag{5}$$

Tendo-se em vista a discretização e a aproximação adotada para o campo virtual, o equilíbrio expresso pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais assume a seguinte forma aproximada:

$$\int_L \underline{\delta u}^T (\underline{B}\underline{\varphi})^T \sigma A dx = \underline{\delta u}^T \underline{F} \rightarrow \underline{\delta u}^T \left[\int_L (\underline{B}\underline{\varphi})^T \sigma A dx - \underline{F} \right] = 0 \quad \forall \underline{\delta u} \tag{6}$$

Da última igualdade segue a condição de equilíbrio em forma aproximada:

$$\int_L (\underline{B}\underline{\varphi})^T \sigma A dx = \underline{F} \tag{7}$$

Nota-se que, via modelo constitutivo, tensões normais se relacionam com deformações reais. Estas, por sua vez, são colocadas em compatibilidade com deslocamentos reais via modelo cinemático da barra. Além disso, considerando-se que em função da discretização adotada os deslocamentos reais em qualquer ponto da barra podem ser expressos por interpolação linear dos graus de liberdade nodais reais, conforme mostra a (4), conclui-se sobre a seguinte relação de dependência para as tensões normais:

$$\sigma = \sigma[\varepsilon(\underline{u})] \tag{8}$$

Como o problema do equilíbrio é não-linear, uma estratégia para a busca de solução consiste em adotar uma intensidade para a tensão normal e proceder, então, a uma correção do erro resultante no equilíbrio. Tendo-se em vista a relação de dependência indicada na (8), a tensão normal pode ser obtida a partir de estimativa para o vetor de deslocamentos nodais. Admitindo-se que \underline{u} represente tal estimativa, segue que o erro no equilíbrio exprime-se na forma:

$$\underline{R}(\underline{u}) = \int_L (\underline{B}\underline{\varphi})^T \sigma[\varepsilon(\underline{u})] A dx - \underline{F} \quad (9)$$

A linearização do erro no equilíbrio fornece, conforme o método de Newton-Raphson, uma relação para o cálculo de uma correção da estimativa adotada para os deslocamentos nodais. Nesse sentido, escreve-se:

$$\begin{aligned} \underline{R}(\underline{u} + \underline{\Delta u}) &= \underline{R}(\underline{u}) + \nabla \underline{R}|_{\underline{u}} \underline{\Delta u} \\ &= \underline{R}(\underline{u}) + \underline{K}_T|_{\underline{u}} \underline{\Delta u} = \underline{0} \end{aligned} \quad (10)$$

A rigidez tangente que aparece na relação anterior pode ser representada com o emprego da (9) da seguinte maneira:

$$\underline{K}_T = \int_L (\underline{B}\underline{\varphi})^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial (\underline{u})} A dx \quad (11)$$

Observa-se que para $\varepsilon(\underline{u})$ vale relação análoga à (5), isto é:

$$\varepsilon = \underline{B}\underline{\varphi}\underline{u} \quad (12)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial (\underline{u})} = \underline{B}\underline{\varphi} \quad (13)$$

Assim sendo, a matriz de rigidez tangente resulta de:

$$\underline{K}_T = \int_L (\underline{B}\underline{\varphi})^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} (\underline{B}\underline{\varphi}) A dx \quad (14)$$

Sua determinação efetiva depende de se conhecer a parcela $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$, que por sua vez depende do modelo constitutivo adotado.

Naturalmente que essa abordagem para resolução do problema do equilíbrio vale inclusive para o caso particular do problema linear. De fato, neste caso a

relação constitutiva é definida pela lei de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$). Por um lado, com a (12), escreve-se a lei de Hooke como:

$$\sigma = E B \varphi \underline{u} \quad (15)$$

Nessas condições, a relação que fornece o erro no equilíbrio, dada pela (9), resulta:

$$\begin{aligned} \underline{R}(\underline{u}) &= \int_L (B \varphi)^T EA B \varphi \underline{u} \, dx - \underline{F} \\ &= \left[\int_L (B \varphi)^T EA (B \varphi) \, dx \right] \underline{u} - \underline{F} \\ &= \underline{\underline{K}} \underline{u} - \underline{F} \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\underline{\underline{K}}$ é a matriz de rigidez secante da estrutura.

Por outro lado, valendo a lei de Hooke, de modo direto, conclui-se que: $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E$. Substituindo-se esta conclusão na (14), e levando-se em conta a forma explícita do vetor $(B \varphi)$ dada na (5), após realizar a integral indicada, obtém-se para a rigidez tangente:

$$\underline{\underline{K}}_T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}} \quad (17)$$

Nota-se que no caso linear a rigidez tangente independe do vetor de deslocamentos nodais e coincide com a rigidez secante.

Adotando-se, o que é convencional, um vetor nulo para estimativa inicial do vetor de deslocamentos nodais, a ele corresponde, pela (12), uma deformação nula, e pela lei de Hooke uma tensão normal nula. Segue da (9) que o erro no equilíbrio resulta:

$$\underline{R}(\underline{u}) = -\underline{F} \quad (18)$$

A correção para a estimativa inicial dos deslocamentos nodais determina-se pela (10):

$$\underline{R}(\underline{u}) + \underline{K}_T \Big|_{\underline{u}} \underline{\Delta u} = \underline{0} \quad \rightarrow \quad \underline{K}_T \underline{\Delta u} = \underline{F} \quad \text{ou} \quad \underline{K} \underline{\Delta u} = \underline{F} \quad (19)$$

Como a estimativa inicial foi um vetor nulo, a nova estimativa fica corrigida para: $\underline{u} = \underline{\Delta u}$. A resposta corrigida deve ser testada em relação ao erro no equilíbrio a ela associado. Neste teste, usa-se a (16) e leva-se em conta a (19):

$$\underline{R}(\underline{\Delta u}) = \underline{K} \underline{\Delta u} - \underline{F} = \underline{F} - \underline{F} = \underline{0}! \quad (20)$$

Conclui-se que o resíduo é nulo e, portanto, o método de Newton-Raphson realiza apenas uma iteração no caso linear!

Já no caso do modelo constitutivo não-linear elasto-plástico, as relações para o cálculo do vetor resíduo e da matriz de rigidez tangente podem ser deduzidas empregando a forma incremental do modelo. Tomando-se, por exemplo, o modelo com encruamento isótropo linear, reproduzem-se abaixo as relações de interesse de sua forma incremental:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^t - E \Delta \lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^t) \\ \sigma_{n+1}^t &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \\ \Delta \lambda_{n+1} &= \frac{f_{n+1}^t}{(E + k)} \quad \text{com} \quad \Delta \lambda_{n+1} \geq 0 \\ f_{n+1}^t &= |\sigma_{n+1}^t| - (\sigma_y + k \alpha_n) \end{aligned} \quad (21)$$

Lembra-se que o sobre índice t indica um valor de tentativa, ou previsão, enquanto que o índice $n+1$ se refere ao valor determinado ao final do passo. Portanto, para fins do cálculo do resíduo e da rigidez tangente: $\sigma_{n+1} = \sigma$ e $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon$. Assim, com as (21) segue que:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^t}{\partial \varepsilon_{n+1}} - E \left(\frac{\partial \Delta \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \text{sign}(\sigma_{n+1}^t) \quad (22)$$

Para o caso particular de $\Delta \lambda_{n+1} = 0$, com a (21) a (22) fornece:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^t}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E \quad (23)$$

Em outra possibilidade, admitindo-se $\Delta \lambda_{n+1} > 0$, novamente com as (21) a relação (22) assume a forma:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E - \frac{E}{(E+k)} \left(\frac{\partial |\sigma_{n+1}^t|}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \text{sign}(\sigma_{n+1}^t) \quad (24)$$

Pode-se, agora, levar em conta que:

$$\sigma_{n+1}^t = |\sigma_{n+1}^t| \text{sinal}(\sigma_{n+1}^t) = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \Rightarrow |\sigma_{n+1}^t| = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \text{sinal}(\sigma_{n+1}^t) \quad (25)$$

Finalmente, sempre na hipótese de $\Delta \lambda_{n+1} > 0$:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E - \frac{E^2}{(E+k)} = \frac{Ek}{(E+k)} \quad (26)$$

As possibilidades dadas pelas (23) e (26) podem ser reunidas, escrevendo-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E^{ep} \quad (27)$$

E^{ep} pode ser definido como um módulo constitutivo tangente de rigidez elasto-plástica, e assume os seguintes valores:

$$E^{ep} = \begin{cases} E & \text{se } \Delta \lambda > 0 \\ \frac{Ek}{(E+k)} & \text{se } \Delta \lambda = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Sendo $\sigma = \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^t - E \Delta \lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^t)$, $\Delta \lambda_{n+1} \geq 0$ e com a (27), o vetor resíduo e a matriz de rigidez tangente assumem as seguintes formas, respectivamente:

$$\underline{R}(\underline{u}) = \left[\int_L (B\underline{\varphi})^T \sigma(\underline{u}) A dx \right] - \underline{F} \quad (29 \text{ a,b})$$

$$\underline{K}_{\underline{T}} = \int_L (B\underline{\varphi})^T E^{ep} A (B\underline{\varphi}) dx$$

Observa-se que a matriz de rigidez tangente resulta:

$$\underline{K}_{\underline{T}} = \frac{E^{ep} A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

3. O elemento finito de treliça plana

O modelo unidimensional da barra solicitada por força normal tratado no item anterior pode ser empregado mesmo que a barra esteja inserida num plano onde se definem a vinculação externa e as forças aplicadas alinhadas com um referencial global (X-Y) cujos eixos têm direções que diferem da direção da barra. Trata-se, por exemplo, do caso ilustrado na Figura 2.

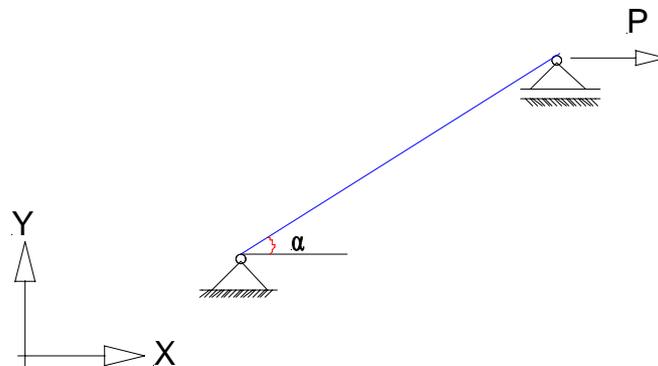


Figura 2 – Barra inserida num espaço bidimensional

O mesmo modelo se aplica num âmbito ainda mais amplo à análise de treliças planas. Para estas estruturas, adota-se a idealização usual segundo a qual as ligações, sejam elas as internas entre barras ou com o meio externo, constituem-se em articulações perfeitas. Além disso, as forças externas devem ser aplicadas exclusivamente nos nós. Resulta que cada uma de suas barras fica submetida somente à força normal, de tração ou de compressão, constante

ao longo do seu comprimento. Em termos de deformação, o estado é homogêneo, podendo as barras sofrer somente alongamento ou encurtamento na direção de seu eixo.

Portanto, cada barra da treliça pode ser interpretada como um elemento finito, com aproximação linear para o campo de deslocamentos, uma vez que sua primeira variação tem correspondência com um estado homogêneo de deformação. Justifica-se, desse modo, a aplicação do modelo elasto-plástico tratado no item anterior diretamente às barras de treliça.

Todavia, a aplicação consistente do modelo para uma análise bidimensional requer uma expansão da ordem (2X2) da matriz de rigidez do elemento finito, válida estritamente para uma análise elasto-plástica unidimensional.

Nesse sentido, considerem-se as três representações do elemento de barra e respectivos graus de liberdade indicados na Figura 3. Na Figura 3a ilustra-se o caso até o momento considerado, de elemento finito de barra para análise unidimensional, com graus de liberdade nodais formados somente por deslocamentos na direção axial.

Uma vez que este elemento passe a ser inserido num espaço bidimensional, compondo uma barra de uma treliça plana, genericamente o alongamento ou encurtamento pode vir acompanhado de mudança na direção do seu eixo, induzida pelos deslocamentos que os nós da treliça venham a apresentar na situação equilibrada.

Para levar em conta a possibilidade de variação de direção eventualmente sofrida pelo eixo da barra, introduzem-se novos graus de liberdade nodais com direção transversal ao eixo da barra, conforme indica a Figura 3b.

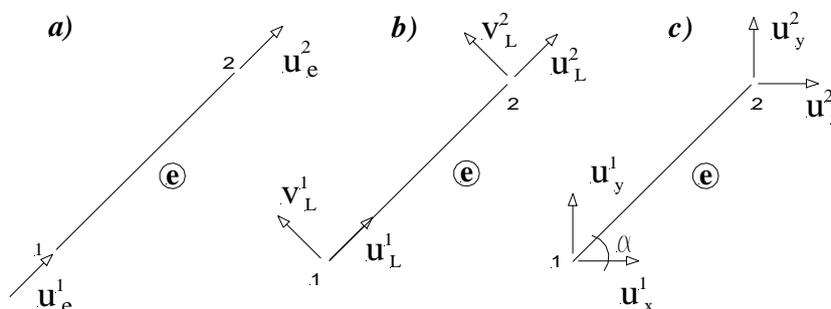


Figura 3 – Graus de liberdade para análises uni e bidimensionais

Ocorre que entre os graus de liberdade mostrados nas Figuras 3a e 3b pode-se construir a seguinte relação, mediante uma matriz de mapeamento $\underline{\underline{A}}^{(e)}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]}_{\underline{\underline{A}}^{(e)T}} \left\{ \begin{array}{c} u_{(e)}^1 \\ u_{(e)}^2 \end{array} \right\} \quad (31)$$

A mesma matriz de mapeamento pode ser empregada para aumentar a ordem da matriz de rigidez elasto-plástica do elemento, passando de (2X2) para (4X4), em correspondência com o novo conjunto de graus de liberdade nodais, mediante a seguinte relação:

$$\underline{\underline{K}}_L^{ep} = \underline{\underline{A}}^{(e)T} \underline{\underline{K}}^{ep} \underline{\underline{A}}^{(e)} \quad (32)$$

De modo explícito, a relação anterior se escreve:

$$\underline{\underline{K}}_L^{ep} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} ES/L_e & -ES/L_e \\ -ES/L_e & ES/L_e \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

ou ainda,

$$\underline{\underline{K}}_L^{ep} = \left[\begin{array}{cccc} ES/L_e & 0 & -ES/L_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ES/L_e & 0 & ES/L_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (33)$$

Nota-se, claramente, que as linhas e colunas nulas na nova matriz expandida indicam que não há rigidez associada aos novos graus de liberdade, de modo

que a barra tem preservada a característica de rigidez associada apenas às deformações axiais (mesmo mudando de direção ocorrem somente alongamentos ou encurtamentos axiais).

Por outro lado, o vetor de forças nodais do elemento finito de barra também pode ser expandido para a ordem (4X1) mediante a matriz $\underline{\underline{A}}^{(e)}$:

$$\underline{\underline{F}}_L = \underline{\underline{A}}^{(e)T} \underline{\underline{F}} \quad (34)$$

Entretanto, conforme já comentado, no plano as direções atreladas ao eixo da barra, mostradas na Figura 3b, não necessariamente coincidem com as direções atreladas ao referencial global, mostradas na Figura 3c. Pode haver, portanto, uma defasagem entre elas, verificando-se uma relação conhecida de transformação por rotação. Tal relação entre os graus de liberdade locais e globais exprime-se para cada nó nas formas:

$$\begin{cases} u_x^1 \\ u_y^1 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{cases} u_L^1 \\ v_L^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x^2 \\ u_y^2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{cases} u_L^2 \\ v_L^2 \end{cases}$$

As relações anteriores podem ainda ser reunidas numa única transformação:

$$\begin{cases} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{cases} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{cases} \quad (35)$$

Em forma condensada, a (35) pode ser escrita como:

$$\underline{\underline{u}}_g = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{u}}_L \quad (36)$$

Uma relação análoga vale para o vetor de forças nodais, o qual pode passar a ser escrito com referência aos graus de liberdade globais:

$$\underline{\underline{F}}_g = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{F}}_L \quad (37)$$

Sendo P_1 e P_2 as forças nodais, a relação (37) desenvolvida fornece:

$$\begin{Bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \cos \alpha \\ P_1 \text{sen} \alpha \\ P_2 \cos \alpha \\ P_2 \text{sen} \alpha \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Nota-se que a matriz \underline{R} é ortogonal, no sentido que sua inversa coincide com a sua transposta; portanto, as relações (36) e (37) podem ser invertidas simplesmente pré-multiplicando ambas por \underline{R}^T .

Partindo da relação de equilíbrio para a barra, escrita considerando-se os graus de liberdade locais expandidos, com a ajuda das formas inversas das (36) e (37), pode-se obter a relação para a matriz de rigidez elasto-plástica da barra no sistema global de graus de liberdade, conforme o desenvolvimento que segue:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_L^{ep} \underline{u}_L &= \underline{F}_L \\ \underline{\underline{K}}_L^{ep} \underline{R}^T \underline{u}_g &= \underline{R}^T \underline{F}_g \\ \underline{\underline{R}} \underline{\underline{K}}_L^{ep} \underline{R}^T \underline{u}_g &= \underline{F}_g \end{aligned} \quad (39)$$

Segue da última relação que:

$$\underline{\underline{K}}_g^{ep} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{K}}_L^{ep} \underline{\underline{R}}^T \quad (40)$$

Realizando as substituições e operações matriciais indicadas, obtém-se:

$$\underline{\underline{K}}_g^{ep} = \frac{E^{ep} S}{L_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

onde as letras c e s resumem, respectivamente, $\cos \alpha$ e $\text{sen} \alpha$. Em relação a esse ângulo, trata-se do ângulo de inclinação do eixo da barra em relação à

direção do eixo referencial global (X) adotado, como exemplificado na Figura 1.

Considerando-se que os nós das extremidades do elemento sejam numerados sequencialmente como 1 e 2, genericamente o cálculo do seu comprimento, do seno e do cosseno do ângulo de inclinação em relação à horizontal pode ser feito pelas seguintes relações:

$$L_e = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2} \quad (42)$$

$$\cos \alpha = \frac{(X_2 - X_1)}{L_e}; \quad \text{sen} \alpha = \frac{(Y_2 - Y_1)}{L_e} \quad (43)$$

4. Procedimento incremental-iterativo de solução do P.V.C.

Seja uma treliça com um número $n_{nós}$ de nós e n_{el} de elementos, numa situação de equilíbrio para certo passo i de carregamento ao final do qual se acumularam intensidades de forças nodais concentradas reunidas num vetor \underline{F}_i^{ext} . Admita-se que nesta situação a condição fundamental de equilíbrio tenha sido atendida, portanto, com resíduo nulo no balanço de forças internas e externas. Tal condição pode ser representada como:

$$\underline{R}_i = \underline{F}_i^{int} - \underline{F}_i^{ext} = \underline{0}$$

Na relação anterior, considerando-se as contribuições de todos os elementos finitos, definem-se:

$$\underline{F}_i^{int} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{M}_e^T \underline{R}_e \underline{A}_e^T \int_{L_e} (B\underline{\varphi})_e^T (\sigma A)_e dx \quad ; \quad \underline{F}_i^{ext} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{M}_e^T \underline{F}_{g_{ei}}^{ext} \quad (44)$$

e \underline{M}_e^T é o operador que realiza o mapeamento dos graus de liberdade locais do elemento para os globais da estrutura.

Portanto, na situação em questão \underline{u}_i é o vetor de deslocamentos nodais globais correspondente à situação de equilíbrio com as forças externas acumuladas ao final do passo de carregamento. Em cada elemento finito as variáveis

compatíveis com o modelo constitutivo elasto-plástico com encruamento isótropo linear, por exemplo, são: σ_{ei} , ε_{ei}^p e α_{ei} .

Considere-se, então, que seja imposto um novo passo de carregamento, ou incremento no nível de forças, tal que:

$$\underline{F}_{i+1}^{ext} = \underline{F}_i^{ext} + \Delta \underline{F}_{i+1}^{ext} \quad (45)$$

O problema que se põe consiste em determinar $\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i + \Delta \underline{u}_{i+1}$ que leva em cada elemento a uma distribuição de tensões $\sigma_{e(i+1)}$ e de variáveis internas $\varepsilon_{e(i+1)}^p$ e $\alpha_{e(i+1)}^{(*)}$ compatíveis com o modelo constitutivo, de tal modo que a condição de equilíbrio $\underline{F}_{i+1}^{int} - \underline{F}_{i+1}^{ext} = \underline{0}$ seja novamente atendida.

Em virtude da não-linearidade da relação de equilíbrio, decorrente da não-linearidade do modelo constitutivo, a estratégia adotada para a obtenção da solução equilibrada é a de Newton-Raphson, prevendo-se uma estimativa inicial para a solução e corrigindo-se iterativamente o erro na condição de equilíbrio linearizada. Configura-se, assim, um processo iterativo dentro do incremento de carregamento.

Seja, então, $\Delta \underline{u}_{(i+1)}^k$ a parcela de correção do deslocamento obtida na ‘ k -ésima’ iteração de correção dentro do passo ($i+1$). Resume-se a estratégia iterativa de solução no algoritmo que segue:

a. Seja $\underline{u}_{(i+1)}^k = \underline{u}_{(i+1)}^{k-1} + \Delta \underline{u}_{(i+1)}^k$, onde o índice superior (k) indica iteração.

Tendo-se em vista a discretização adotada, pode-se considerar o deslocamento global restrito ao domínio de um elemento genérico e determinar, como indica a relação (12) um campo de deformação compatível:

$$\varepsilon_{e(i+1)}^k = \underline{B} \underline{\varphi} \underline{u}_{e(i+1)}^k \quad (46)$$

b. Com o campo de deformação obtém-se o correspondente campo de tensão normal $\sigma_{e(i+1)}^k$ por integração do modelo constitutivo;

c. Passa-se à verificação do equilíbrio global, calculando-se $\underline{F}_{(i+1)}^{int(k)}$ a partir da contribuição de todos os elementos.

^(*) Pode-se incluir também a variável de encruamento cinemático, caso este tipo de modelo seja considerado.

Se o equilíbrio entre $\underline{F}_{(i+1)}^{int(k)}$ e $\underline{F}_{(i+1)}^{ext}$ é verificado para certa tolerância pré-definida, então a solução foi encontrada e pode-se passar a um novo incremento de carregamento.

d. Caso contrário determina-se nova correção $\Delta \underline{u}_{(i+1)}^{k+1}$ e volta-se ao passo **a** com $k = k+1$.

No algoritmo anterior é fundamental uma estimativa razoável para $\Delta \underline{u}_{(i+1)}^{k+1}$.

Nesse sentido, o procedimento de Newton-Raphson propõe a linearização do erro no equilíbrio. A forma linearizada em questão é a seguinte:

$$\underline{F}_{(i+1)}^{int}(\sigma_{(i+1)}^k) + \frac{\partial \underline{F}_{(i+1)}^{int}(\sigma_{(i+1)}^k)}{\partial \underline{u}_{(i+1)}^k} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} - \underline{F}_{i+1}^{ext} = 0 \quad (47)$$

Na expressão acima aparece a derivada parcial de \underline{F}^{int} , que define a rigidez tangente e pode ser obtida no problema discretizado a partir da contribuição de cada um dos elementos, como indicado abaixo:

$$\frac{\partial \underline{F}^{int}}{\partial \underline{u}_{(i+1)}^k} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} = \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{M}_e^T \underline{R}_e \underline{A}_e^T \left[\int_{L_e} \frac{\partial ((\underline{B}\underline{\varphi})_e^T \sigma_e^k)}{\partial \underline{u}_e^k} \frac{\partial \underline{u}_{e(i+1)}^k}{\partial \underline{u}_{(i+1)}^k} dx \right] \right\} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{F}^{int}}{\partial \underline{u}_{(i+1)}^k} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} &= \\ & \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{M}_e^T \underline{R}_e \underline{A}_e^T \left[\int_{L_e} \frac{\partial ((\underline{B}\underline{\varphi})_e^T \sigma_e^k)}{\partial \sigma_e^k} \frac{\partial \sigma_e^k}{\partial \varepsilon_e^k} \frac{\partial \varepsilon_e^k}{\partial \underline{u}_e^k} dx \right] \underline{A}_e \underline{R}_e^T \underline{M}_e \right\} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} \\ &= \left\{ \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{M}_e^T \underline{R}_e \underline{A}_e^T \left[\int_{B_e} (\underline{B}\underline{\varphi})_e^T \frac{\partial \sigma_e^k}{\partial \varepsilon_e^k} (\underline{B}\underline{\varphi})_e dx \right] \underline{A}_e \underline{R}_e^T \underline{M}_e \right\} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} \quad (49) \end{aligned}$$

Da última igualdade, pode-se representar a matriz de rigidez elasto-plástica tangente do elemento genérico por: $\underline{\underline{K}}_{e(i+1)}^{ep(k)} = \int_{L_e} (\underline{B}\underline{\varphi})_e^T \frac{\partial \sigma_{e(i+1)}^k}{\partial \varepsilon_{e(i+1)}^k} (\underline{B}\underline{\varphi})_e dx$, e a matriz de rigidez elasto-plástica tangente da estrutura por:

$$\underline{\underline{K}}_{(i+1)}^{ep(k)} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{M}_e^T \underline{R}_e \underline{A}_e^T \underline{\underline{K}}_{e(i+1)}^{ep(k)} \underline{A}_e \underline{R}_e^T \underline{M}_e \quad (50)$$

Com a rigidez tangente da estrutura, a relação (49) assume a forma:

$$\frac{\partial \underline{F}^{int}}{\partial \underline{u}_{(i+1)}^k} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} = \underline{\underline{K}}_{(i+1)}^{ep(k)} \Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} \quad (51)$$

Nota-se, conforme visto anteriormente, que: $\frac{\partial \sigma_{e(i+1)}^k}{\partial \varepsilon_{e(i+1)}^k} = E_{e(i+1)}^{ep(k)}$, é denominado

de módulo algorítmico de rigidez tangente elasto-plástica. No caso de um modelo de encruamento não-linear esse módulo algorítmico deve ser determinado ponto a ponto através do modelo constitutivo adotado.

Assim sendo, a nova aproximação para o incremento de deslocamentos é determinada a partir da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\Delta \underline{u}_{(i+1)}^{(k+1)} = - \left[\underline{\underline{K}}_{(i+1)}^{ep(k)} \right]^{-1} \left[\underline{F}^{int}(\sigma_{(i+1)}^k) - \underline{F}_{(i+1)}^{ext} \right] \quad (52)$$

O procedimento incremental-iterativo para a análise estrutural elasto-plástica pode ser ilustrado graficamente, por exemplo, num caso de uma barra tracionada, como indicado na Figura 4.

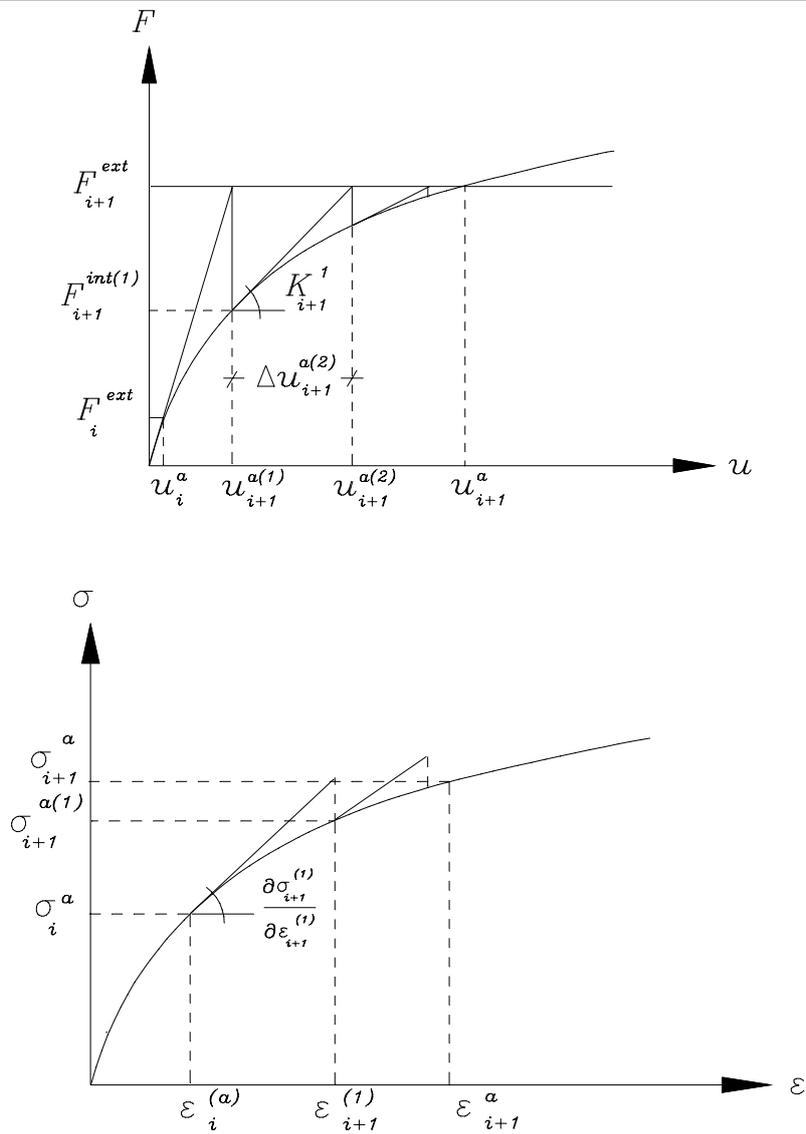


Figura 4 – Procedimento incremental-iterativo

4. Exemplo de aplicação do MEF

Para a aplicação do Método dos Elementos Finitos ao problema estudado no capítulo anterior, e reproduzido na Figura 5, nota-se que as próprias barras de treliça compõem a discretização da estrutura.

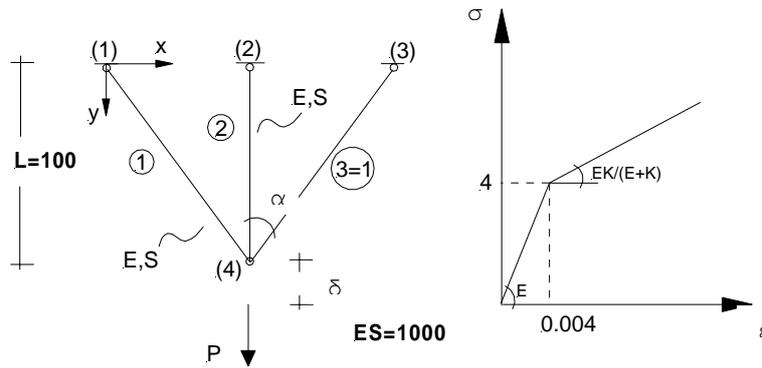


Figura 5 – Treliça plana

Deve-se considerar, inicialmente, a matriz de rigidez elástica para uma situação geral de elemento inclinado em relação aos eixos de referência. Tal matriz representa-se como:

$$K = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

sendo o comprimento L , o cosseno (c) e o seno (s) determinados em função das coordenadas dos nós da barra conforme indicado na Figura 6. Valem:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad \cos \beta = \frac{(x_2 - x_1)}{L}; \quad \sin \beta = \frac{(y_2 - y_1)}{L}; \quad (54)$$

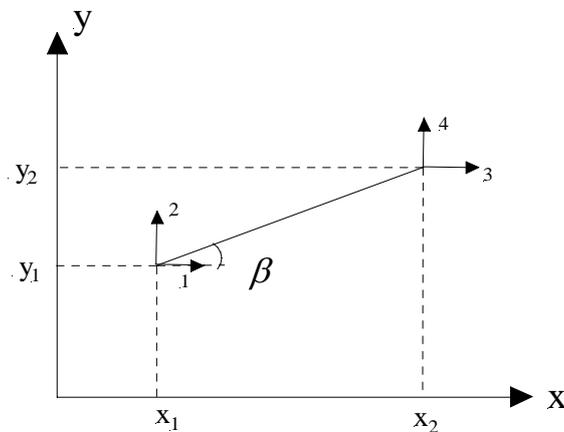


Figura 6 – Barra inclinada

Tendo-se em vista as indicações de geometria da Figura 5, para compor as matrizes de rigidez das três barras do sistema, determinam-se com as (54) os seguintes ângulos:

Barra (1): nó inicial 1 e nó final 4 $\rightarrow \beta = 30^\circ$

Barra (2): nó inicial 2 e nó final 4 $\rightarrow \beta = 90^\circ$

Barra (3): nó inicial 3 e nó final 4 $\rightarrow \beta = -30^\circ$

As matrizes resultam:

$$K_1 = \frac{ES}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$K_3 = \frac{ES}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$K_2 = \frac{ES}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(55 a,b,c)

A matriz de rigidez da estrutura tem ordem (8X8), de modo que cada uma das matrizes anteriores deve ser mapeada para este espaço mediante uma matriz de mapeamento de ordem (8X4). Operando-se às contribuições das matrizes na formação da matriz da estrutura, e após a imposição das condições de contorno, obtém-se o seguinte sistema representando o equilíbrio global:

$$\frac{ES}{L_2} \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (56)$$

onde $L_2 = L = 100$, u_7 e u_8 são, respectivamente, as componentes horizontal e vertical do deslocamento do nó 4 indicado na Figura 5.

Na resolução apresentada no capítulo anterior, a análise foi conduzida impondo-se deslocamentos, uma vez que o objetivo maior era o de ressaltar a estratégia de integração do modelo constitutivo. Neste item, a análise será conduzida mediante imposição de força aplicada, pois o objetivo agora é ressaltar a estratégia incremental-iterativa de resolução do problema não-linear de equilíbrio.

A força é aplicada em forma incremental ('passos de carregamento'). Em cada passo, quando necessário, aplica-se o método de Newton, processando-se iterações para que a condição de equilíbrio com as forças normais nas barras seja verificada, respeitando-se o modelo constitutivo.

Seja, então, um primeiro passo com força aplicada com intensidade $P = 5$. Uma estimativa inicial para o correspondente deslocamento decorre de se admitir que a estrutura responda linearmente à força imposta. Nesse sentido, valem as relações do sistema (26):

$$10 \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore u_7 = \delta = 0,4; \quad u_8 = 0.$$

A resposta obtida corresponde à solução correta se também o modelo constitutivo estiver sendo respeitado. Mais especificamente, deve-se verificar se as tensões normais nas barras não excedem o limite inicial de escoamento ($\sigma_y = 4$). Nesse sentido, toma-se o resultado obtido ($\delta = 0,4$) como dado de entrada para a verificação do modelo constitutivo, operando-se exatamente como na resolução apresentada no capítulo anterior. Assim procedendo, conclui-se que:

$$\sigma_1 = N_1 = 1; \quad \sigma_2 = N_2 = 4;$$

e que o critério de plastificação não é violado em nenhuma barra. Portanto, para esse nível de força aplicada ($P = 5$) a solução obtida é a seguinte:

$$\delta = 0,4; \quad \sigma_1 = N_1 = 1; \quad \sigma_2 = N_2 = 4; \quad \varepsilon_1^p = 0; \quad \varepsilon_2^p = 0; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0.$$

Para o próximo passo, aplica-se, por exemplo, $\Delta P = 1,4$ totalizando $P = 6,4$. A análise se processa para esse incremento, sendo que o seu resultado se acumula ao resultado do passo anterior. Novamente admite-se uma resposta puramente linear e o incremento de deslocamento correspondente pode ser determinado pela resolução do sistema (56):

$$10 \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_7 \\ \Delta u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore \Delta u_7 = \Delta \delta = 0,112; \quad \Delta u_8 = 0.$$

O deslocamento acumulado passa a: $\delta = 0,4 + 0,112 = 0,512$.

Passa-se à verificação do modelo constitutivo com as etapas de previsão e correção.

Inicialmente, com o acréscimo de deslocamento determinado, podem ser calculados os acréscimos de deformação em cada barra, resultando:

$$\Delta \varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \frac{\Delta \delta}{L_1} \cos \alpha = \frac{0,112}{400} = 0,00028; \quad \Delta \varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta \delta}{L_2} = \frac{0,112}{100} = 0,00112$$

Na etapa de previsão admite-se que as barras respondam elasticamente no passo, portanto:

$$\Delta \varepsilon_1^p = 0; \quad \Delta \alpha_1 = 0; \quad \Delta \varepsilon_2^p = 0; \quad \Delta \alpha_2 = 0$$

$$\Delta \sigma_1^t = E \Delta \varepsilon_1 = 1000 \left(\frac{0,112}{400} \right) = 0,28; \quad \Delta \sigma_2^t = E \Delta \varepsilon_2 = 1000 \left(\frac{0,112}{100} \right) = 1,12$$

As tensões normais totais nas barras passam a ser:

$$\sigma_1 = N_1 = 1,28; \quad \sigma_2 = N_2 = 5,12;$$

A validade da hipótese de resposta elástica no incremento é testada pelo critério de plastificação aplicado em cada barra. Conclui-se que a tensão total na barra 2 excede o limite especificado $\sigma_y = 4$ e, portanto, para ela deve-se proceder a uma correção. Nesse sentido seguem:

$$\Delta \varepsilon_2^p = \frac{E}{(E+K)} \Delta \varepsilon_2; \quad \Delta \alpha_2 = |\Delta \varepsilon_2^p|; \quad \Delta \sigma_2 = \frac{EK}{(E+K)} \Delta \varepsilon_2$$

ou ainda,

$$\Delta \varepsilon_2^p = \frac{1000}{(1111)} 0,00112 = 0,00101; \quad \Delta \alpha_2 = 0,00101;$$

$$\Delta \sigma_2 = 100 \cdot 0,00112 = 0,112$$

Resultam ao final da etapa de correção:

$$\sigma_1 = N_1 = 1,28; \quad \sigma_2 = N_2 = 4 + 0,112 = 4,112; \quad \delta = 0,512; \quad \varepsilon_1^p = 0;$$

$$\varepsilon_2^p = 0,00101; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0,00101$$

Pela condição de equilíbrio determina-se: $P = 5,4$. Nota-se que este valor não coincide com o valor total aplicado ao final do passo: $P = 5 + 1,4 = 6,4$. Caracteriza-se uma diferença, ou resíduo, em relação a este valor de: $\psi_1 = 1,0$. Para que se obtenha uma resposta relativa ao nível de força efetivamente aplicado é preciso proceder a uma etapa iterativa que tem por objetivo aplicar o resíduo e retornar ao nível $P = 6,4$.

Ao aplicar o resíduo, cria-se um novo acréscimo de deslocamento e novas variações das tensões normais nas barras. Para estimar o acréscimo de deslocamento em correspondência à aplicação do resíduo, podem-se admitir duas possibilidades básicas: que o sistema responda com a rigidez inicial ou com a rigidez tangente construída em decorrência do processo de plastificação da barra 2. As duas possibilidades serão testadas no que segue.

Na primeira possibilidade, se a estrutura responde com a rigidez inicial, então valem as relações do sistema (56), com a força imposta igual ao valor do resíduo ψ_1 . Segue daí:

$$10 \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^{(1)} u_7 \\ \Delta^{(1)} u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore \Delta^{(1)} u_7 = \Delta \delta = 0,08; \quad \Delta^{(1)} u_8 = 0.$$

O deslocamento acumulado passa a: $\delta = 0,512 + 0,08 = 0,592$.

Passa-se à verificação do modelo constitutivo com as etapas de previsão e correção, conforme realizado anteriormente.

Com o acréscimo de deslocamento determinado, podem ser calculados os acréscimos de deformação em cada barra, resultando:

$$\Delta^{(1)} \varepsilon_1 = \frac{\Delta \delta}{L_1} \cos \alpha = \frac{0,08}{400} = 0,0002;$$

$$\Delta^{(1)} \varepsilon_2 = \frac{\Delta \delta}{L_2} = \frac{0,08}{100} = 0,0008$$

Na etapa de previsão admite-se que as barras respondam elasticamente no passo, portanto:

$$\Delta^{(1)} \varepsilon_1^p = 0; \quad \Delta^{(1)} \alpha_1 = 0; \quad \Delta^{(1)} \varepsilon_2^p = 0; \quad \Delta^{(1)} \alpha_2 = 0$$

$$\Delta \sigma_1^t = E \Delta \varepsilon_1 = 1000 \cdot 0,0002 = 0,2;$$

$$\Delta \sigma_2^t = E \Delta \varepsilon_2 = 1000 \cdot 0,0008 = 0,8$$

As tensões normais totais nas barras passam a ser:

$$\sigma_1^{(1)} = N_1 = 1,28 + 0,2 = 1,48; \quad \sigma_2^{(1)} = N_2 = 4,112 + 0,8 = 4,912;$$

Conclui-se que a tensão total na barra 2 excede o limite atual admissível $\sigma_y + K \alpha_2 = 4,112$ e, portanto, para ela deve-se proceder a uma correção. Nesse sentido seguem:

$$\Delta \varepsilon_2^p = \frac{1000}{(1111)} 0,0008 = 0,00072; \quad \Delta \alpha_2 = 0,00072;$$

$$\Delta \sigma_2 = 100 \cdot 0,0008 = 0,08$$

Resultam ao final da etapa de correção:

$$\sigma_1 = N_1 = 1,48; \quad \sigma_2 = N_2 = 4,112 + 0,08 = 4,192; \quad \delta = 0,592; \quad \varepsilon_1^p = 0;$$

$$\varepsilon_2^p = 0,00101 + 0,00072 = 0,00173; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0,00173$$

Pela condição de equilíbrio determina-se: $P = 5,672$. Nota-se que em relação ao nível $P = 6,4$ o resíduo diminuiu para: $\psi_2 = 0,728$. Portanto, buscando encontrar a solução para o nível de força efetivamente aplicado, passa-se a uma nova iteração, impondo-se o resíduo e procedendo de modo idêntico à primeira iteração. Cabe notar, entretanto, que mantida a hipótese de determinação da resposta da estrutura ao resíduo aplicado empregando a sua rigidez inicial, a convergência do resíduo para um valor nulo, ou próximo dele, de acordo com uma tolerância adotada, se dará lentamente.

Objetivando-se acelerar o processo de convergência, pode-se adotar uma segunda hipótese, qual seja a da resposta estrutural com rigidez atualizada em função do processo de plastificação. A aplicação dessa segunda hipótese passará a ser detalhada no que segue.

Volta-se, portanto, à primeira iteração, quando se aplica o resíduo $\psi_1 = 1,0$. Naquela situação valiam:

$$\sigma_1 = N_1 = 1,28; \quad \sigma_2 = N_2 = 4,112; \quad \varepsilon_1^p = 0; \quad \varepsilon_2^p = 0,00101; \\ \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0,00101; \quad \delta = 0,512$$

Como a barra 2 está em regime plástico, sua rigidez passa a ser dada por $\frac{EK}{(E+K)} = 100$ e a matriz de rigidez passa a ser:

$$K_2 = \frac{EKS}{(E+K)L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a rigidez da estrutura, resultante das contribuições das rijezas de cada elemento, altera-se para:

$$10 \begin{bmatrix} 14/40 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Considerando-se o valor do resíduo, do sistema anterior resultam:

$$\Delta^{(1)}u_7 = \Delta^{(1)}\delta = 0,286; \quad \Delta^{(1)}u_8 = 0$$

O deslocamento acumulado passa a valer: $\delta = 0,512 + 0,286 \approx 0,8$.

Passa-se à verificação do modelo constitutivo com as etapas de previsão e correção. Com o acréscimo de deslocamento determinado, podem ser calculados os acréscimos de deformação em cada barra, resultando:

$$\Delta^{(1)}\varepsilon_1 = \frac{\Delta\delta}{L_1} \cos\alpha = \frac{0,286}{400} = 0,000715; \quad \Delta^{(1)}\varepsilon_2 = \frac{\Delta\delta}{L_2} = \frac{0,286}{100} = 0,00286$$

Na etapa de previsão admite-se que as barras respondam elasticamente no passo, portanto:

$$\Delta^{(1)}\varepsilon_1^p = 0; \quad \Delta^{(1)}\alpha_1 = 0; \quad \Delta^{(1)}\varepsilon_2^p = 0; \quad \Delta^{(1)}\alpha_2 = 0$$

$$\Delta\sigma_1^t = E\Delta\varepsilon_1 = 1000 \cdot 0,000715 = 0,715; \quad \Delta\sigma_2^t = E\Delta\varepsilon_2 = 1000 \cdot 0,00286 = 2,86$$

As tensões normais totais nas barras passam a ser:

$$\sigma_1^{(1)} = N_1 = 1,28 + 0,715 = 1,995; \quad \sigma_2^{(1)} = N_2 = 4,112 + 2,86 = 6,972;$$

Conclui-se que a tensão total na barra 2 excede o limite atual admissível $\sigma_y + K\alpha_2 = 4,112$ e, portanto, para ela deve-se proceder a uma correção. Nesse sentido seguem:

$$\Delta\varepsilon_2^p = \frac{1000}{(1111)} 0,00286 = 0,0026; \quad \Delta\alpha_2 = 0,0026;$$

$$\Delta\sigma_2 = 100 \cdot 0,00286 = 0,286$$

Resultam ao final da etapa de correção:

$$\sigma_1 = N_1 = 1,995; \quad \sigma_2 = N_2 = 4,112 + 0,286 = 4,4; \quad \delta \approx 0,8; \quad \varepsilon_1^p = 0;$$

$$\varepsilon_2^p = 0,00101 + 0,0026 = 0,00361; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0,00361$$

Observa-se que para este estado, por equilíbrio tem-se: $P \approx 6,4$, ou seja, o resíduo em relação à força aplicada é mínimo.

Nota-se que a resposta atual praticamente coincide com aquela obtida no primeiro item para um deslocamento imposto $\delta = 0,8$. Assim, a aplicação do resíduo com atualização da rigidez da estrutura permite anular o resíduo em apenas uma iteração (isto para o encruamento linear!) e, portanto, trata-se de recurso claramente mais eficiente do que o emprego da rigidez inicial.

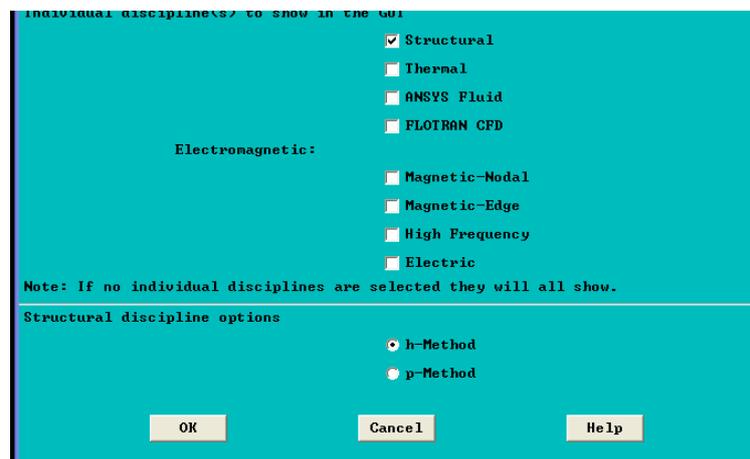
5. Solução pelo ANSYS

O exemplo em questão pode ser processado pelo programa ANSYS, devendo-se proceder às etapas de pré-processamento, solução e pós-processamento. Na primeira introduzem-se os dados referentes ao tipo de elemento finito, geometria da estrutura, material, vinculação e carregamento. Na etapa de solução informam-se o tamanho e o número de passos de carregamento, e a frequência para a saída de resultados. O pós-processamento trata da visualização e análise de resultados.

Neste item, cada uma das três etapas é detalhada. Nota-se que o detalhamento é feito tendo-se em vista a versão 5.5 educacional do programa e a análise se processa com incremento de deslocamento.

5.1 Etapa de pré-processamento

Na tela inicial escolhe-se em *Preferences* a opção: *Structural* → *OK*.

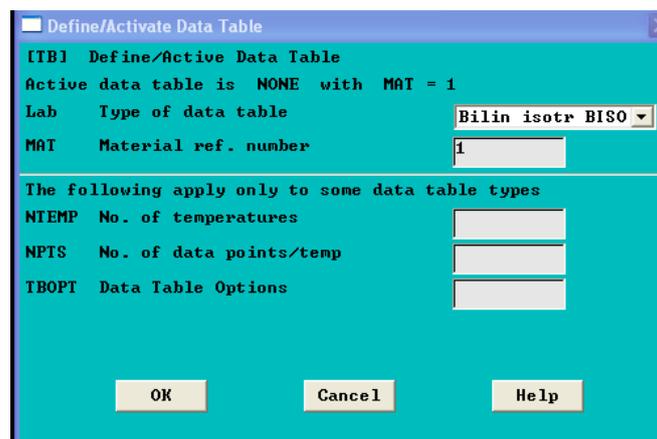


Na opção *Preprocessor* escolhe-se: *Element Type* → *Add* → *Link* → *2D spar 1* → *OK* → *Close*.

Escolhe-se a opção *Real Constants* (do menu *Preprocessor*) → *Add* → *OK*. Insere-se o valor 1 no espaço correspondente à *AREA* → *OK* → *Close*.

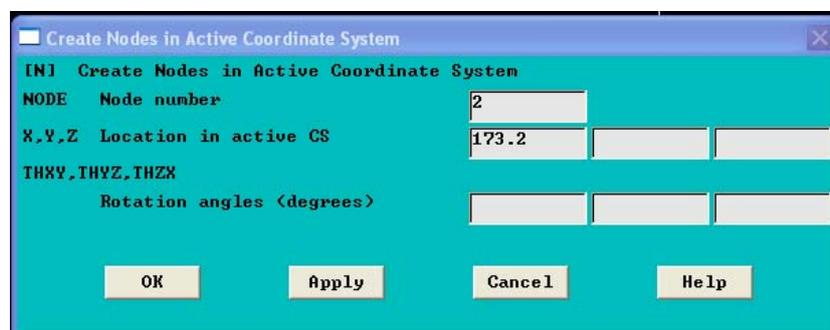
Escolhe-se a opção *Material Properties* (do menu *Preprocessor*) → *Isotropic* → *OK* → inserindo o valor 1000 no espaço correspondente à *Young's Modulus* e 0.3 no espaço correspondente a *Poisson's Ratio (minor)* → *OK*.

Ainda no menu *Material Properties* escolhe-se a opção *Data Tables* → *Define/Activate* e escolhendo a opção *Bilin Isotr BISO* em *Type of data table* → *OK*.



Dentro do menu *Data Tables* escolhe-se *Edit Active* introduzindo-se na primeira coluna da tabela os valores 4 e 100 respectivamente para os parâmetros *Yld Strs* e *Tang Modul*. Para sair da tabela deve-se optar por *File* → *Apply/Quit*.

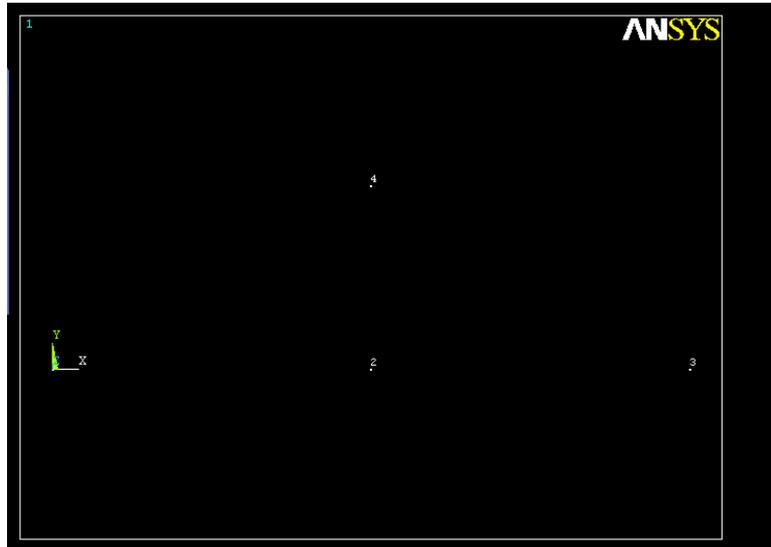
Voltando ao menu *Preprocessor* no setor *Modeling* escolhe-se a opção *Create* → *Nodes* → *in Active CS*. Abre-se um espaço para a introdução das coordenadas dos nós.



As informações sobre os nós podem ser introduzidas seguindo uma numeração e ordem arbitrária, porém, concluída a informação de um nó, deve-se optar por

Apply, para passar ao nó seguinte. Somente após o último nó seleciona-se a opção *OK*.

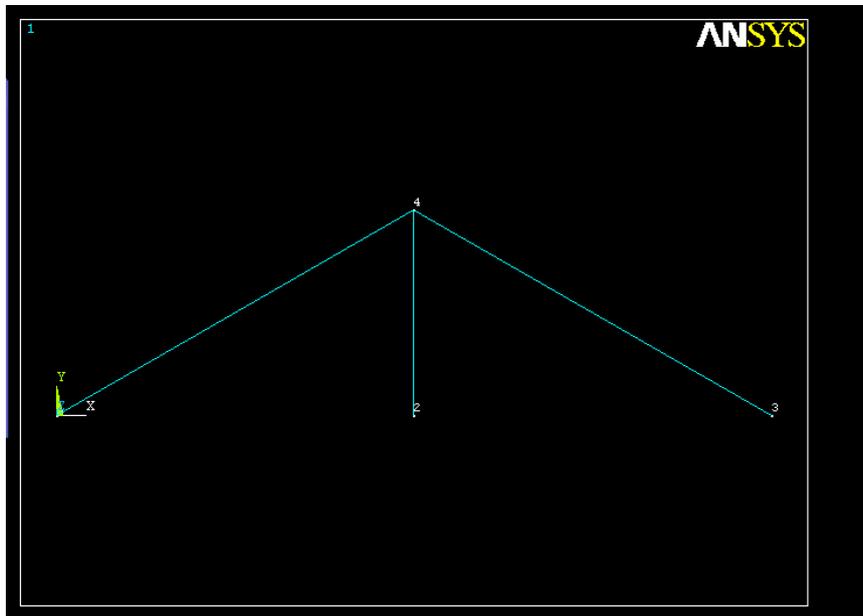
Os nós aparecem posicionados na tela.



No menu *Create* seleciona-se *Elements* → *Thru Nodes*. Introdz-se uma barra por vez, selecionando-se os dois nós de suas extremidades. Por exemplo, selecionam-se os nós 1 e 4 → *Apply* → nós 2 e 4 → *Apply* → nós 3 e 4 → *OK*.

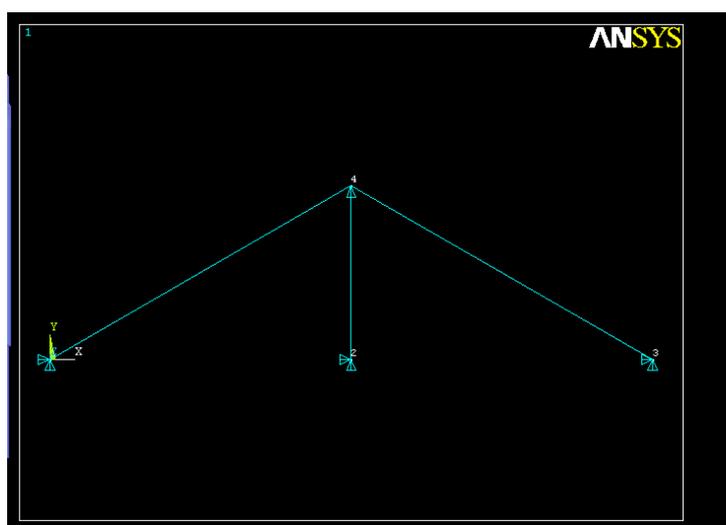


Concluída essa operação o arranjo de barras aparece montado na tela.



Seleciona-se a opção *Loads* no menu *Preprocessor* → *Apply* → *displacement* → *On nodes*. Seleciona-se um nó com vinculação de contorno por vez. Por exemplo, seleciona-se o nó 1 → *Apply* → *All DOF* → *Apply* → nó 2 → *Apply* → *All DOF* → *Apply* → nó 3 → *Apply* → *All DOF* → *Apply* → nó 4. Seleciona-se a opção *UY* em *DOFs to be constrained* e escreve-se o valor 2 no espaço correspondente a *Displacement Value* → *OK*.

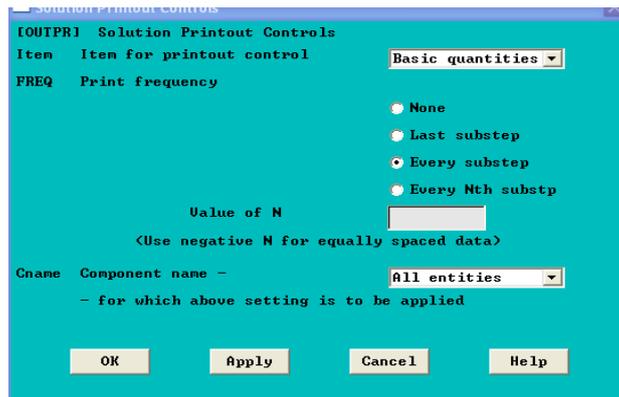
Ao final da operação aparece a vinculação sobre o conjunto de barras.



5.2 Etapa de solução

Fecha-se o menu *Preprocessor* e passa-se ao menu *Solution*.

Em *Load Step Opts* selecciona-se *OutputCtrls* → *Solu Printout* → *every substep* → *OK*.



Em *Load Step Opts* selecciona-se *OutputCtrls* → *DB/Results File* → *every substep* → *OK*.



Em *Load Step Opts* selecciona-se *Time/Frequenc* → *Time-Time Step*. Introduz-se 2 no campo *Time at the end of load step*. Introduz-se 0.4 no campo *Time step size*. Selecciona-se ON em *Automatic time stepping*. Introduz-se 0.4 no campo *Minimum time step size* e 0.4 no campo *Maximum time step size* → *OK*.

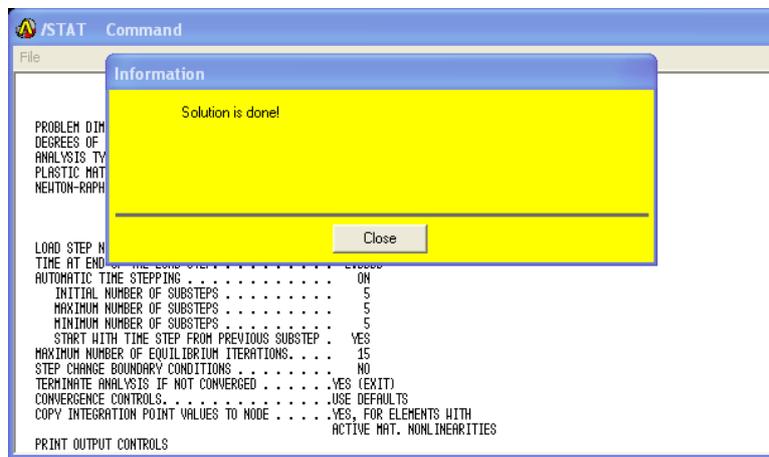
[DELTIM] Time step size	<input type="text" value="0.4"/>
[KBC] Stepped or ramped b.c.	<input checked="" type="radio"/> Ramped <input type="radio"/> Stepped
[AUTOTS] Automatic time stepping	<input checked="" type="radio"/> ON <input type="radio"/> OFF <input type="radio"/> Prog Chosen
[DELTIM] Minimum time step size	<input type="text" value="0.4"/>
Maximum time step size	<input type="text" value="0.4"/>
Use previous step size?	<input checked="" type="checkbox"/> Yes
[TSRES] Time step reset based on specific time points	Time points from : <input checked="" type="radio"/> No reset <input type="radio"/> Existing array <input type="radio"/> New array
Note: TSRES command is valid for thermal elements, thermal-electric elements, thermal surface effect elements and FLUID116, or any combination thereof.	

Em *Load Step Opts* seleciona-se *Time/Frequenc* → *Time and Substps*. Introduz-se 2 no campo *Time at the end of load step*. Introduz-se 5 no campo *Number of substeps*. Seleciona-se ON em *Automatic time stepping*. Introduz-se 5 no campo *Maximum no. of substeps* e 5 no campo *Minimum no. of substeps* → OK.

Number of substeps	<input type="text" value="5"/>
Stepped or ramped b.c.	<input checked="" type="radio"/> Ramped <input type="radio"/> Stepped
Automatic time stepping	<input checked="" type="radio"/> ON <input type="radio"/> OFF <input type="radio"/> Prog Chosen
Minimum no. of substeps	<input type="text" value="5"/>
Maximum no. of substeps	<input type="text" value="5"/>
Use previous step size?	<input checked="" type="checkbox"/> Yes
[TSRES] Time step reset based on specific time points	Time points from : <input checked="" type="radio"/> No reset <input type="radio"/> Existing array <input type="radio"/> New array
Note: TSRES command is valid for thermal elements, thermal-electric elements, thermal surface effect elements and FLUID116, or any combination thereof.	

No menu *Solution / Solve* → *Current LS* → OK.

Seleciona-se *Close* no campo em amarelo.



5.3 Etapa de pós-processamento

Passa-se ao menu *General Postproc* → *Results summary*.

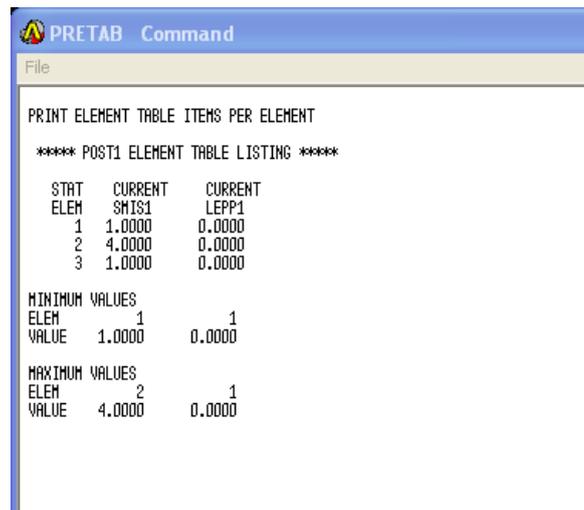
```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****
SET  TIME/FREQ  LOAD STEP  SUBSTEP  CUMULATIVE
1  0.40000     1          1         2
2  0.80000     1          2         3
3  1.2000     1          3         4
4  1.6000     1          4         5
5  2.0000     1          5         6

```

No menu *General Postproc* → *Element Table* → *Define Table* → *Add*. Rola-se a barra até aparecer *By sequence num* → *SMISC*. Escreve-se *SMISC*, 1 no campo à direita → *Apply*. Seleciona-se novamente *By sequence num* → *LEPPL*. Escreve-se *LEPPL*, 1 no campo à direita → *OK* → *Close*.

No menu *General Postproc* → *First set* → *Element Table* → *Define Table* → *Update* → *Close* → *List elem table*. Selecionam-se os itens *SMISC1* e *LEPPL1* → *OK*.



```

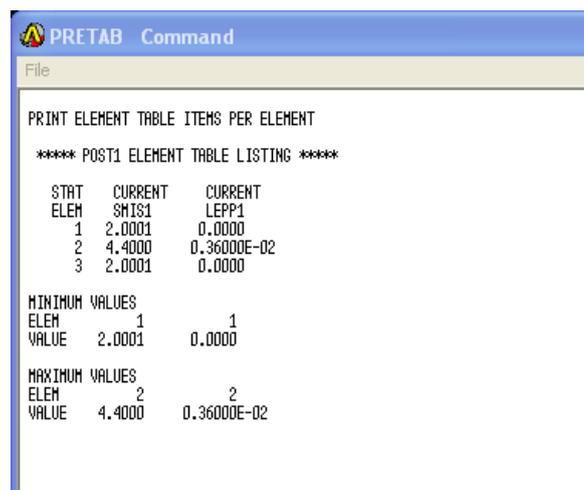
PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****
  STAT  CURRENT  CURRENT
  ELEM  SMISC1  LEPP1
    1    1.0000  0.0000
    2    4.0000  0.0000
    3    1.0000  0.0000

MINIMUM VALUES
  ELEM  1
  VALUE 1.0000  0.0000

MAXIMUM VALUES
  ELEM  2
  VALUE 4.0000  0.0000

```

No menu *General Postproc* → *Next set* → *Element Table* → *Define Table* → *Update* → *Close* → *List elem table*. Seleccionam-se os itens SMISC1 e LEPP1 → *OK*.



```

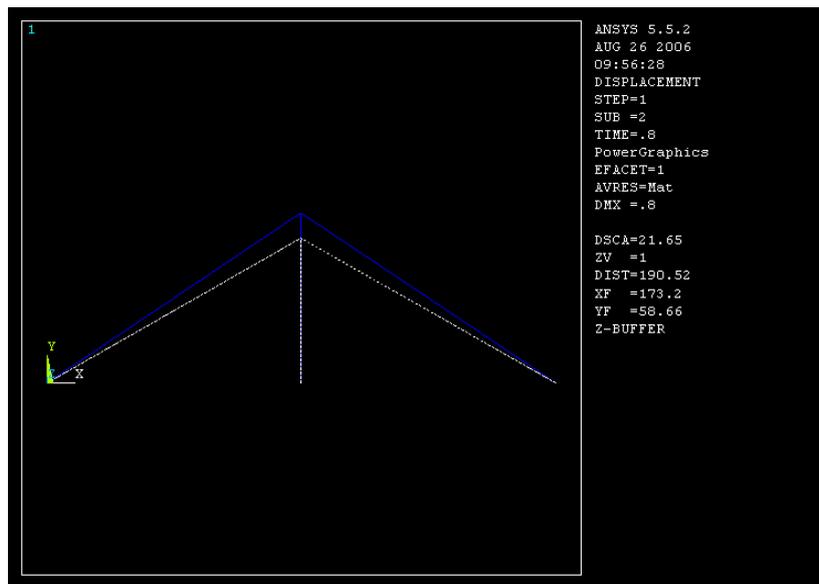
PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****
  STAT  CURRENT  CURRENT
  ELEM  SMISC1  LEPP1
    1    2.0001  0.0000
    2    4.4000  0.36000E-02
    3    2.0001  0.0000

MINIMUM VALUES
  ELEM  1
  VALUE 2.0001  0.0000

MAXIMUM VALUES
  ELEM  2
  VALUE 4.4000  0.36000E-02

```

No menu *General Postproc* → *Plot results* → *Deformed Shape*. Selecciona-se *Def + undeformed* → *OK*.



É possível optar por saída gráfica, selecionando-se no menu principal a opção: *TimeHist Postpro*.

Em *TimeHist Postproc* seleciona-se na barra de tarefas superior a opção *Plot* → *Elements*. No menu *TimeHist Postproc* → *Define variables* → *Add*. Seleciona-se a opção *Reaction forces* → *OK*. Seleciona-se o nó 4 na figura → *Apply*. Escolhe-se a opção *FY* em *Data item* → *OK* → *Close*. No menu *TimeHist postproc* → *Graph variables*.

