

1. INTRODUÇÃO (FUCHS, 1979)

1.1. Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

A distribuição das correntes e diferenças de potencial e a transferência de energia ao longo de uma linha de transmissão podem ser analisadas por diversos processos, sendo de se esperar que todos conduzam ao mesmo resultado. Essa análise, evidentemente, tem por finalidade permitir ao operador chegar a expressões matemáticas finais que serão empregadas diretamente na solução de problemas práticos. Se os diversos métodos conduzem aos mesmos resultados finais, todos deveriam ser aceitáveis. No entanto, em problemas de Engenharia em geral, não é suficiente procurar uma fórmula que possa ser aplicada indiscriminadamente na solução de um problema particular, sem o conhecimento completo das limitações e simplificações admitidas em sua derivação. Tal circunstância poderia levar ao uso indevido da mesma. As chamadas soluções matemáticas dos fenômenos físicos exigem, normalmente, simplificações e idealizações: a derivação matemática de uma fórmula a partir de princípios fundamentais deve, além da fórmula propriamente dita, fornecer todas as informações referentes às restrições, aproximações e limitações que são impostas. É fundamental que se examine com o maior rigor, sob o ponto de vista da generalidade, a aceitabilidade dos princípios fundamentais adotados como ponto de partida para a sua dedução.

É importante ressaltar que, de acordo com a Física, a expressão linha de transmissão se aplica a todos os elementos de circuitos que se destinam ao transporte de energia, independentemente da quantidade de energia transportada (alguns bilhões de kWh-ano ou apenas alguns kWh-ano). A mesma teoria geral é aplicável, feitas as necessárias ressalvas, independentemente do comprimento físico dessas linhas.

1.1.1. Solução das Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

Considere um elemento diferencial de comprimento Δx de uma linha de transmissão sendo uma linha real, incluindo em seu circuito equivalente os elementos representativos das perdas nos condutores (resistência longitudinal) e das perdas nos

dielétricos (condutância transversal). Este elemento diferencial de comprimento Δx pode ser representado conforme o circuito mostrado na Figura 1 (FUCHS, 1979), como citado em WEDY (2006). Nesta figura, r é a resistência longitudinal e g é a condutância transversal da linha por unidade de comprimento.

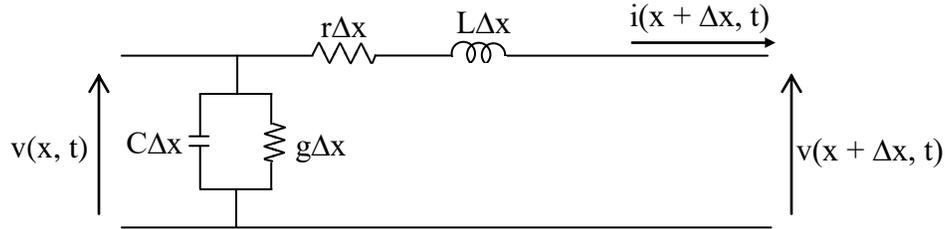


Figura 1. Circuito equivalente de um elemento Δx de uma linha real.

Entre o começo e o final do elemento de linha há uma diferença de potencial que é definida como sendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x \quad (1)$$

As equações da tensão e da corrente são:

$$v(x + \Delta x, t) = v(x, t) - L \cdot \Delta x \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} - r \cdot \Delta x \cdot i(x + \Delta x, t) \quad (2)$$

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - g \cdot \Delta x \cdot v(x, t) - C \cdot \Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

Na equação (3) a corrente e a primeira derivada parcial da corrente podem ser expandidas numa série de Taylor (GUIDORIZZI, 1986). Desta forma obtém-se:

$$i(x + \Delta x, t) \approx i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x + \dots \quad (4)$$

$$\frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} \cdot \Delta x + \dots \quad (5)$$

Substituindo as equações (4) e (5) (desprezando-se os termos de ordem mais alta) na equação (2), chega-se à equação (6):

$$v(x + \Delta x, t) - v(x, t) = -L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r \Delta x \cdot i(x, t) - L \Delta x^2 \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} - r \Delta x^2 \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad (6)$$

Os termos de segunda ordem Δx^2 da equação (6) desaparecem no limite e usando a definição de derivada pode-se concluir que:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{x_2 - x_1} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (7)$$

Assim, a equação diferencial da tensão no elemento é:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = (r \Delta x) \cdot i + (L \Delta x) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (8)$$

Foi usado o sinal negativo em (8) devido aos valores positivos de i e $\frac{\partial i}{\partial t}$, que fazem o valor de v decrescer.

Se dividirmos a equação (8) por Δx , tem-se uma indicação de como v varia ao longo da linha:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = r \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (9)$$

E a equação diferencial das correntes tem a seguinte forma:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x = (g \Delta x) \cdot v + (C \Delta x) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (10)$$

Dividindo a equação (10) por Δx , encontrou-se a seguinte equação:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g.v + C.\frac{\partial v}{\partial t} \quad (11)$$

Na equação (10), o primeiro termo do segundo membro representa a corrente de deslocamento através do dielétrico, provocada pela aplicação da tensão v . O segundo termo fornece o valor da corrente de deslocamento através da capacitância $C.\Delta x$, devida à variação da tensão.

As equações (9) e (11) são expressões da *Lei de Ohm* nas quais v e i são variáveis dependentes da distância x de um ponto da linha a um ponto de referência preestabelecido e de t , o instante de tempo considerado (FUCHS, 1979).

Para encontrar as funções $v(x,t)$ e $i(x,t)$ capazes de resolver os problemas, diferencia-se a equação (9) em relação à x e a equação (11) em relação à t , assim foi encontrado as (12) e (13).

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r.\frac{\partial i}{\partial x} + L.\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = g.\frac{\partial v}{\partial t} + C.\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (13)$$

Em seguida diferencia-se a equação (9) em relação à t e a equação (11) em relação à x , e encontrou-se:

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = r.\frac{\partial i}{\partial t} + L.\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = g.\frac{\partial v}{\partial x} + C.\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \quad (15)$$

No entanto, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \quad (16)$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (17)$$

Substituindo as equações (13) e (14) em (12) e (15), respectivamente obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -r \cdot \frac{\partial i}{\partial x} + g \cdot L \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -g \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + r \cdot C \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (19)$$

Para concluir a solução, as equações (9) e (11) foram substituídas nas equações (18) e (19) respectivamente, e encontrou-se:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r \cdot g \cdot v + (r \cdot C + L \cdot g) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = r \cdot g \cdot i + (r \cdot C + L \cdot g) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (21)$$

As equações (20) e (21) são as equações diferenciais gerais das linhas de transmissão. Equações desse tipo são conhecidas na Física como *equações das ondas*, cujas soluções representam ondas que podem viajar ao longo de uma linha com velocidade v , ou seja, ondas viajantes incidentes ou progressivas. Também conhecidas como *equações da telegrafia*, pois foram primeiramente deduzidas para o estudo dos fenômenos relacionados com a transmissão de pulsos telegráficos como descrito por FUCHS (1979) e posteriormente citado por WEDY (2006).

As soluções das equações (20) e (21) são muito complexas e raramente usadas na análise de problemas de sistema de potência. Uma solução mais simples é para o caso

sem perdas, ou seja, faz-se $r = 0$ e $g = 0$ nas equações (20) e (21). Assim têm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L.C. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L.C. \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (23)$$

1.1.2. Solução Analítica para as Equações Diferenciais de uma Linha de Transmissão sem Perdas (HEDMAN, 1983)

A solução analítica das equações diferenciais da linha de transmissão não pode ser facilmente obtida se as perdas na linha são levadas em consideração. No entanto, as equações de linhas sem perdas são bem conhecidas e permitem o estudo do comportamento das ondas de tensões e correntes que se propagam ao longo da mesma.

Conforme mostrado no capítulo 2, sabe-se que a tensão ao longo de uma linha sem perdas pode ser descrita, no domínio do tempo, de acordo com uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L.C. \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L.C. \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (25)$$

Aplicando a Transformada de Laplace (BOYCE & DIPRIMA, 2001) nas equações (24) e (25) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} = s^2 .L.C.V(s, x) \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 I(s, x)}{\partial x^2} = s^2 .L.C.I(s, x) \quad (27)$$

Nas equações (26) e (27) os termos $V(s,x)$ e $I(s,x)$ são, respectivamente as transformadas de Laplace de $v(x,t)$ e $i(x,t)$.

Sabe-se que as equações diferenciais mostradas nas equações (26) e (27) possuem solução do tipo (HEDMAN, 1983):

$$V(s, x) = A(s) \cdot e^{-s \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot x} + B(s) \cdot e^{+s \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot x} \quad (28)$$

$$I(s, x) = \frac{A(s)}{z_0} \cdot e^{-s \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot x} - \frac{B(s)}{z_0} \cdot e^{+s \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot x} \quad (29)$$

Na equação (29) o termo z_0 é a impedância característica da linha, que é definido como sendo:

$$z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (30)$$

Nas equações (28) e (29), uma descrição espacial completa para a porção, que é função de x , está contida na exponencial, enquanto que a solução no tempo, ou da parte que é função do tempo, está contida tanto nas constantes arbitrárias $A(s)$, $B(s)$, $D(s)$ e $E(s)$ como na exponencial.

A expressão $e^{-x \cdot s}$, quando transformada para o domínio do tempo, resulta em um degrau unitário $u(t-x)$ atrasado. Demonstra-se também que $u(t-x)$ é uma representação matemática da onda viajante.

Para obter a solução no domínio do tempo, aplica-se a transformada inversa de Laplace nas equações (28) e (29). Desta maneira obtém-se:

$$v(t, x) = A(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot x) \cdot u(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot x) + B(t + \sqrt{L \cdot C} \cdot x) \cdot u(t + \sqrt{L \cdot C} \cdot x) \quad (31)$$

$$i(t, x) = D(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot x) \cdot u(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot x) + E(t + \sqrt{L \cdot C} \cdot x) \cdot u(t + \sqrt{L \cdot C} \cdot x) \quad (32)$$

A equação (31) mostra que a tensão comporta-se como duas ondas viajantes, uma direta na direção $+x$ e a outra na direção $-x$. A mesma interpretação vale para a equação (32), que descreve a corrente ao longo da linha.

As ondas de correntes e tensões, mostradas nas equações (31) e (32) propagam-se ao longo da linha com uma velocidade v definida como:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad m \ s^{-1} \quad (33)$$

1.2. Análise Qualitativa da Propagação de Ondas em Linhas de Transmissão de Energia Elétrica (HEDMAN, 1983)

O aspecto fundamentalmente único das linhas de transmissão, relativo aos circuitos mais comuns de constantes concentradas, resulta do aspecto finito da velocidade da luz e, portanto, da propagação da energia elétrica e magnética ao longo da linha como uma onda viajante. Se uma variação de corrente ou de tensão ocorre em um terminal de uma linha longa de transmissão, o outro terminal não toma conhecimento desta variação enquanto a onda elétrica percorre o comprimento da linha com a velocidade da luz. Logo, o terminal no lado receptor desta linha de transmissão, não pode influenciar na propagação da tensão da fonte, até que a onda tenha viajado da fonte até a ponta receptora e, através da interação entre este terminal e a linha de transmissão, seja enviada uma resposta de volta à fonte. Os sinais elétricos tendem a se propagar para frente e para trás, como ondas viajantes, normalmente dissipando energia no material.

Um exame detalhado da física eletromagnética do problema resulta numa análise, mostrando que ondas eletromagnéticas viajantes guiadas ocorrerão em qualquer linha de transmissão aérea aberta. Uma análise mais profunda das equações eletromagnéticas mostra que qualquer sistema com baixa perda pode ser analisado, primeiramente, especificando-se a indutância e a capacitância separadamente, assim usando este sistema de constantes concentradas para formar uma malha. A equação diferencial que descreve esta malha prediz o efeito da onda viajante.

Uma vez que as equações diferenciais da linha de transmissão são utilizadas para desenvolver uma solução geral para as ondas viajantes na linha, condições de contorno devem ser usadas para calcular a solução específica da onda viajante. O problema de condição de contorno será referenciado como problema de terminal e as soluções nos

terminais resultarão em coeficientes de reflexão e de refração, os quais são funções de como está caracterizado o terminal da linha (em aberto, em curto ou em carga).

1.2.1. Análise Genérica da Propagação de Ondas em Linhas de Transmissão

Sabe-se que as correntes e tensões em uma linha de transmissão comportam-se como ondas viajantes que obedecem as seguintes equações:

$$v(t, x) = A(t - \sqrt{L.C} \cdot x) \cdot u(t - \sqrt{L.C} \cdot x) + B(t + \sqrt{L.C} \cdot x) \cdot u(t + \sqrt{L.C} \cdot x) \quad (34)$$

$$i(t, x) = D(t - \sqrt{L.C} \cdot x) \cdot u(t - \sqrt{L.C} \cdot x) + E(t + \sqrt{L.C} \cdot x) \cdot u(t + \sqrt{L.C} \cdot x) \quad (35)$$

As equações (34) e (35) representam duas ondas viajantes, sendo que a função $A(t - \sqrt{L.C} \cdot x) \cdot u(t - \sqrt{L.C} \cdot x)$ representa uma onda propagando-se na direção progressiva e a função $B(t + \sqrt{L.C} \cdot x) \cdot u(t + \sqrt{L.C} \cdot x)$ representa uma onda de propagação regressiva. Assim, pares de ondas de tensão de corrente propagam-se nas direções positivas e negativas (HEDMAN, 1983).

Dessa forma, é possível decompor as ondas viajantes em componentes diretas e inversas da tensão e da corrente no terminal da linha. Esta relação pode ser escrita e reduzida da seguinte forma:

$$v_T = v_f + v_r \quad (36)$$

$$i_T = i_f + i_r \quad (37)$$

As equações (36) e (37) são correspondentes às equações (34) e (35) onde f é de ordem direta de propagação e r a ordem inversa de propagação, sendo v_T e i_T a tensão e corrente no terminal receptor da linha de transmissão respectivamente.

Considerando z_0 como sendo a impedância característica (ou impedância natural) da linha de transmissão, tem-se (HEDMAN, 1983):

$$v_f = z_0 \cdot i_f \quad (38)$$

$$v_r = -z_0 \cdot i_r \quad (39)$$

Uma solução simultânea das equações (36) a (39), levando em consideração o tipo de carga que está conectada no terminal da linha, resultará em um conjunto de condições de contorno que irão mostrar, de maneira qualitativa, como se comportam as ondas que propagam na linha de transmissão.

1.2.2. Relação entre as Ondas Incidentes e Refletidas de Corrente e Tensão no Terminal da Linha

A Figura 2 mostra uma linha de transmissão de comprimento d , com uma carga resistiva R em seu terminal receptor, sendo energizado com uma tensão v .

Para um instante imediatamente anterior ao fechamento da chave S em, $t < 0$ s, os terminais da fonte estão sob uma diferença de potencial v . No instante em que a chave S for ligada ($t = 0$ s) o terminal B , aparecerá à mesma diferença de potencial v . Uma vez que diferenças de potencial somente são possíveis entre cargas elétricas, a tensão no terminal B da linha foi provocada por um deslocamento de cargas elétricas originárias da fonte, através da chave S .

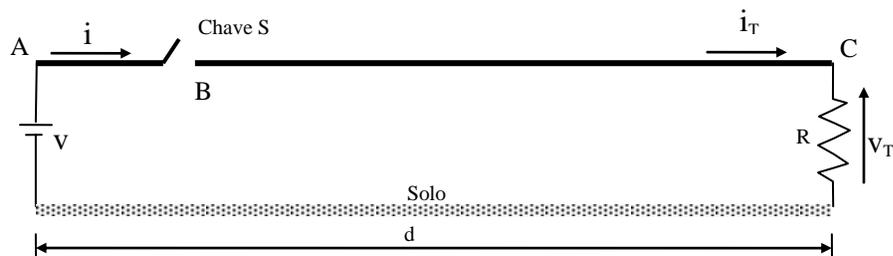


Figura 2. Energização de uma linha com carga R em seu terminal.

As cinco equações seguintes definem, completamente, a informação conhecida no terminal C da linha de transmissão (HEDMAN, 1983):

$$v_T = v_f + v_r \quad (40)$$

$$i_T = i_f + i_r \quad (41)$$

$$i_T \cdot R = v_T \quad (42)$$

$$v_f = z_0 \cdot i_f \quad (43)$$

$$v_r = - z_0 \cdot i_r \quad (44)$$

Nas equações (40) a (44) têm-se:

- v_f Tensão incidente da linha;
- i_f Corrente incidente no terminal da linha;
- v_T Tensão no terminal da linha;
- i_T Corrente no terminal da linha;
- v_r Tensão refletida no terminal da linha;
- i_r Corrente refletida no terminal da linha;
- R Carga resistiva conectada no terminal da linha;
- z_0 Impedância característica da linha;

Os valores de v_f , R , z_0 , são conhecidos enquanto que as grandezas v_T , i_T , v_r , i_r , não são conhecidas.

Nas equações (40) a (44) existem cinco incógnitas, portanto, a solução para o sistema de equações é possível, e podem ser manipuladas da seguinte maneira:

$$i_f + i_r = \frac{v_f}{z_0} - \frac{v_r}{z_0} = i_T \quad (45)$$

$$v_f + v_r = i_T \cdot R \quad (46)$$

ou

$$v_f + v_r = \frac{R}{z_0} \cdot v_f - \frac{R}{z_0} \cdot v_r \quad (47)$$

Resolvendo a equação (47) para v_r , tem-se:

$$v_r \cdot \left(1 - \frac{R}{z_0}\right) = v_f \cdot \left(\frac{R}{z_0} - 1\right) \quad (48)$$

ou

$$v_r = \frac{R - z_0}{R + z_0} \cdot v_f \quad (49)$$

A partir da equação (49), pode-se determinar:

$$\Gamma_v = \frac{R - z_0}{R + z_0} \quad (50)$$

O termo Γ_v é definido como *coeficiente de reflexão de tensão*.

A equação (49) mostra que existe uma relação entre as tensões incidentes e refletidas no terminal da linha. Esta relação é definida pelo coeficiente de reflexão de tensão.

Analogamente, pode-se obter uma relação entre as correntes incidentes e refletidas no terminal da linha. Deste modo, obtêm-se (HEDMAN, 1983):

$$i_r = \frac{R - z_0}{R + z_0} \cdot i_f \quad (51)$$

e

$$\Gamma_i = -\frac{R - z_0}{R + z_0} \quad (52)$$

O termo Γ_i é definido como *coeficiente de reflexão de corrente*.

A equação (51) mostra que existe uma relação entre as ondas de corrente incidentes e refletidas que é definida pelo coeficiente de reflexão de corrente.

As equações (50) e (52) mostram que os coeficientes de reflexão de tensão e corrente são definidos pela impedância característica da linha e também pela carga conectada no terminal da mesma.

1.2.2.1. Linha com o Terminal Aberto

Se na linha mostrada na Figura 2 for considerado $R \rightarrow \infty$, pode-se considerar que o terminal da mesma está em aberto, conforme mostra a Figura 3.

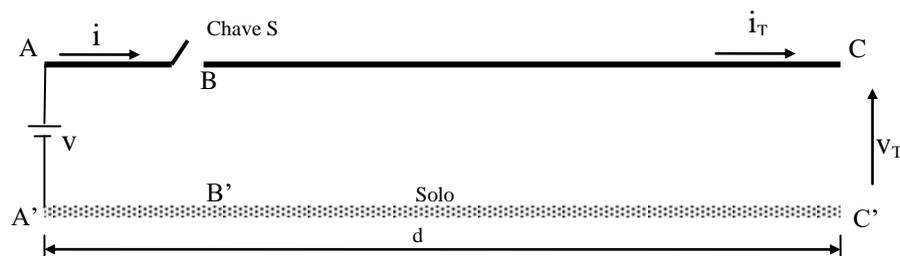


Figura 3. Linha de transmissão com seus terminais em aberto.

Na Figura 3 a fonte de tensão v é uma fonte de tensão constante, do tipo degrau unitário.

Após o fechamento da chave S , pode-se considerar uma onda de tensão propagando-se ao longo da linha e chegando ao receptor da mesma, conforme mostra a Figura 4.

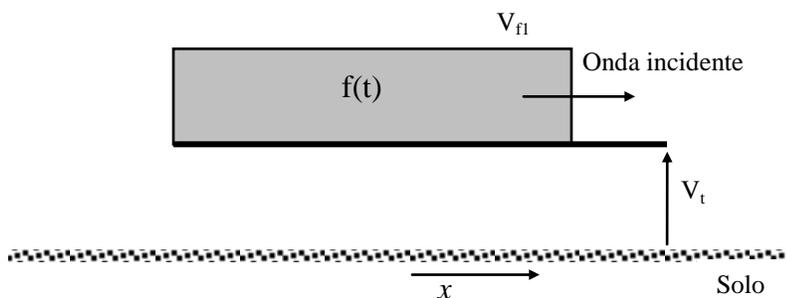


Figura 4. Onda incidente no terminal de uma linha de transmissão.

Substituindo, nas equações (50) e (52) a condição $R \rightarrow \infty$, pode-se obter os coeficientes de reflexão de tensão e de corrente para a linha em aberto. Deste modo:

$$\Gamma_v = 1 \quad (53)$$

$$\Gamma_i = -1 \quad (54)$$

Portanto, para uma linha com o terminal em aberto, a onda da tensão incidente é igual à onda da tensão refletida, com a mesma magnitude e sinal, ou seja:

$$v_f = v_r \quad (55)$$

Substituindo a equação (55) na equação (49) obtém-se:

$$v_T = 2.v_f \quad (56)$$

A expressão (56) mostra que, para uma linha em aberto, a tensão no terminal da linha atinge duas vezes o valor da tensão incidente no terminal da mesma. Analogamente, obtém-se:

$$i_f = -i_r \quad (57)$$

Substituindo a equação (57) na expressão (51) obtém-se:

$$i_T = 0 \quad (58)$$

A expressão (58) mostra que a corrente no terminal de uma linha em aberto é nula.

Assim, conclui-se que se uma onda v_f chega a uma extremidade aberta de uma linha de transmissão, a tensão do terminal é igual a duas vezes a tensão que está chegando. A tensão refletida é igual à tensão chegando e a corrente refletida é igual a menos a corrente chegando.

A Figura 5 mostra, esquematicamente, as correntes e tensões em uma linha cujo terminal está em aberto. Nota-se que esse efeito de tensão dupla propaga-se de volta ao longo da linha de transmissão e, para o caso de um degrau unitário, eventualmente, carregaria completamente a linha com uma tensão cujo valor seria duas vezes o valor da tensão da fonte. Analogamente, a corrente chegando com a onda direta, é “eliminada” pela corrente negativa refletida, deixando a linha com corrente zero, entre o terminal aberto e a onda refletida.

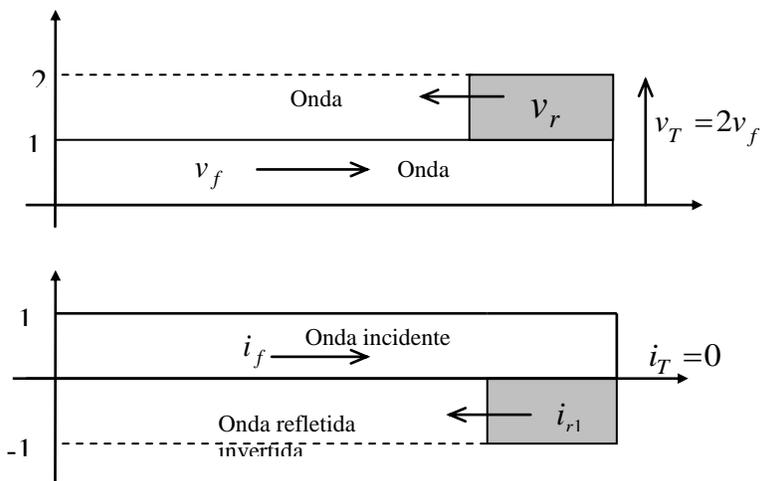


Figura 5. Ondas de tensão e corrente refletidas.

Desde que a onda de tensão original se propague pela linha para a extremidade aberta, a energia desta onda é armazenada nos campos magnético e elétrico em torno da linha de transmissão. Metade da energia é armazenada no campo elétrico ($1/2 C.v^2$) e a outra metade é armazenada no campo magnético ($1/2 L.i^2$). A energia armazenada na região, após a onda refletida passar, é de natureza diferente daquela da onda viajante direta original. Devido a corrente ser zero, não existe energia magnética armazenada na linha. Toda a energia será armazenada no campo elétrico (HEDMAN, 1983).

1.2.2.2. Linha com os Terminais em Curto-circuito

A Figura 6 mostra uma linha de transmissão com os terminais C e C' configurados em curto-circuito, ou seja, o valor de R tendendo a zero.

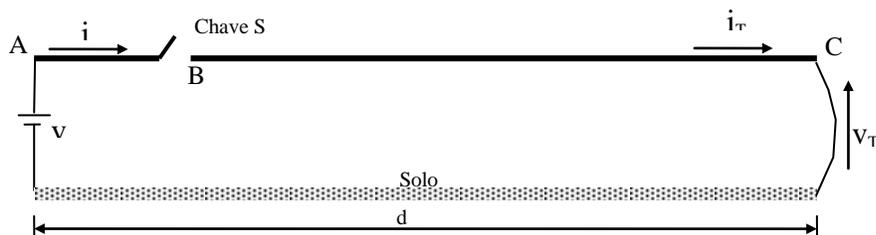


Figura 6. Linha de transmissão com seus terminais em aberto.

A partir das equações (50) e (52) para R tendendo a zero, o coeficiente de reflexão da tensão é negativo e o coeficiente de reflexão da corrente é positivo. A tensão refletida é igual à tensão incidente em magnitude, mas é inversa, conforme a equação (59), e com isso a tensão no terminal da linha de transmissão é nula, pois a tensão incidente é anulada pela tensão refletida, demonstrada em (60).

$$v_f = -v_r \quad (59)$$

$$v_T = 0 \quad (60)$$

O coeficiente de reflexão da corrente é positivo, a onda de corrente refletida tem a mesma magnitude e amplitude que a onda incidente, conforme a equação (61), assim a corrente no terminal da linha de transmissão é a soma da corrente incidente com a corrente refletida, como se tem na equação (62).

$$i_f = i_r \quad (61)$$

$$i_T = 2.i_f \quad (62)$$

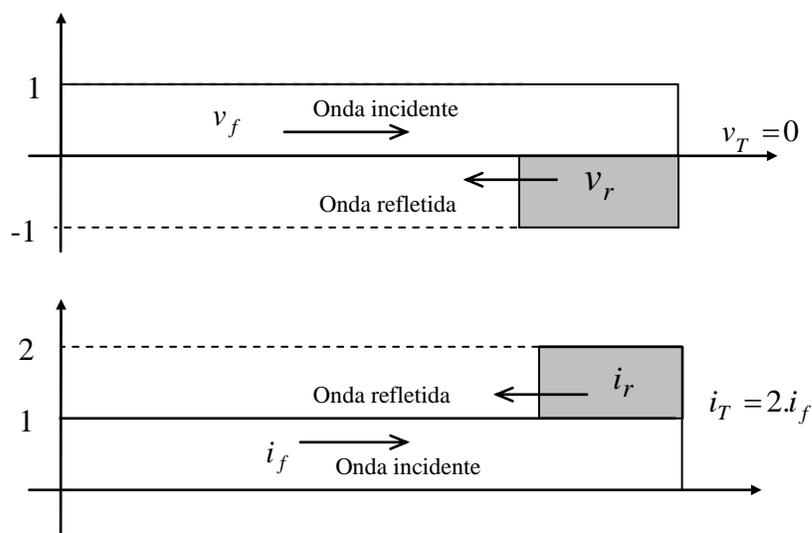


Figura 7. Ondas de tensão e corrente refletidas.

Na Figura 7, tem-se que se uma onda v_f chega a uma extremidade em curto-circuito de uma linha de transmissão, a tensão do terminal é nula. A corrente refletida é igual a corrente incidente, assim elas se somam e dobram de amplitude.

Como toda energia que estava armazenada no campo elétrico não pode ser armazenada pelo mesmo, ela é cedida ao campo magnético, que também recebe toda a energia que a fonte continua a fornecer, aumentando assim seu valor até um valor máximo de saturação (FUCHS, 1979).

1.2.2.3. Linha com Carga de Mesmo Valor que a Impedância Característica

A Figura 8 mostra uma linha de transmissão de comprimento d sendo energizada com uma tensão v , com uma carga R de mesmo valor que z_0 em ohms, que é a impedância característica da linha.

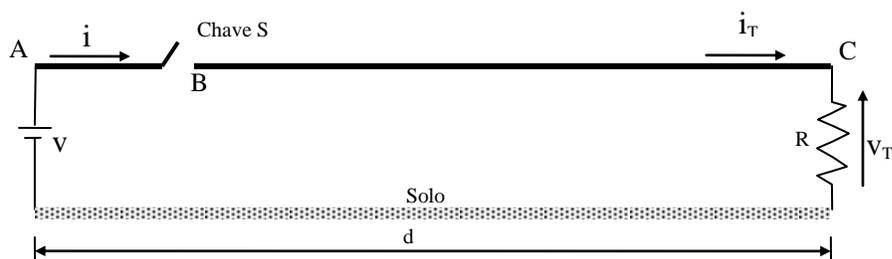


Figura 8. Energização de uma linha com carga R em seu terminal.

A Figura 9 mostra a onda de tensão de energização se propagando ao longo da linha com uma carga em seu terminal.

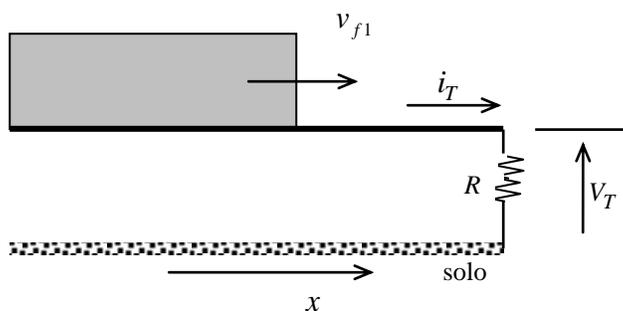


Figura 9. Energização de uma linha com carga em seu terminal.

Como a carga tem o mesmo valor que a impedância característica da linha de transmissão, das equações (50) e (51) tem-se que os coeficientes de reflexão de tensão e corrente são nulos, ou seja, não há tensão e corrente refletidas.

A tensão no terminal da linha tem a mesma amplitude que a onda incidente, que é a tensão de energização, conforme a equação (63):

$$v_T = v_f \quad (63)$$

A corrente também não tem onda refletida, assim a corrente no terminal da linha de transmissão é igual a corrente incidente, conforme a equação (64):

$$i_T = i_f \quad (64)$$

A Figura 10 ilustra o comportamento das ondas de corrente e tensão sem reflexão.

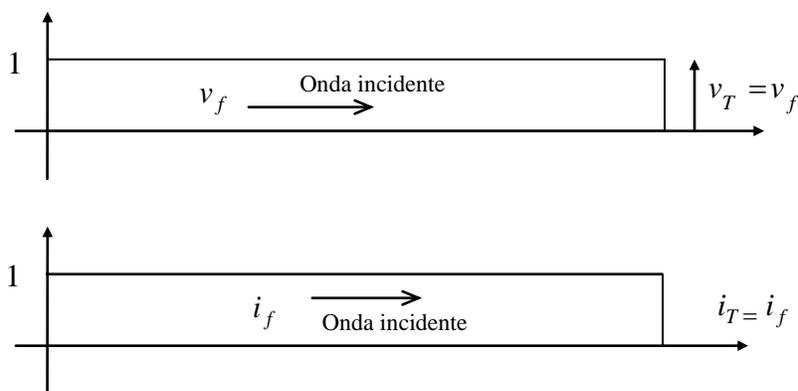


Figura 10. Ondas de tensão e corrente, sem reflexão.

1.3. Representação da Linha por meio de Cascata de Circuitos π e Variáveis de Estado

Os modelos de linhas de transmissão de energia elétrica podem ser desenvolvidos no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

No entanto, o sistema elétrico no qual as linhas de transmissão estão inseridas possui diversos elementos, cujas características não permitem que os mesmos sejam representados como sendo elementos lineares, dificultando a representação do sistema elétrico no domínio da frequência (MARTI, 1988).

Uma outra vantagem dos modelos que representam a linha diretamente no domínio do tempo é que os mesmos são facilmente implementados em programas computacionais que realizam simulações de transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência.

Um dos primeiros modelos a representar a linha de transmissão diretamente no domínio do tempo foi desenvolvido por H. W. Dommel e baseou-se no método das características ou método de Bergeron. Ele consiste em combinar o método das características com o método numérico de integração trapezoidal, resultando em um algoritmo que é capaz de simular transitórios eletromagnéticos em redes cujos parâmetros são discretos ou distribuídos. Este algoritmo sofreu sucessivas evoluções e atualmente é conhecido como *Eletromagnetic Transients Program* (EMTP) (DOMMEL, 1969).

Em situações em que se deseja simular a propagação de ondas eletromagnéticas resultantes de operações de manobras e chaveamento realizadas nas linhas de transmissão, pode-se representar a mesma como sendo uma cascata de circuitos π . Nesse modelo cada segmento é constituído de uma associação série e paralela de resistores e indutores que resultam em uma resistência e uma indutância, variáveis em função da frequência, que representam o efeito solo e o efeito pelicular (TAVARES, 1999). Este modelo, que é desenvolvido diretamente no domínio do tempo, é então implementado em *softwares* do tipo EMTP.

Devido ao fato de que programas do tipo EMTP não são de fácil utilização (NELMS *et al.*, 1989), diversos autores (NELMS, MAMIS, MÁCIAS) sugerem descrever as correntes e tensões na cascata de circuitos π por meio de variáveis de estado. As equações de estado são então transformadas em equações de diferenças e podem ser resolvidas utilizando qualquer linguagem computacional.

A representação da linha por meio de variáveis de estado pode ser utilizada no ensino de conceitos básicos de propagação de ondas em linhas de transmissão (NELMS *et al.*, 1989), na análise da distribuição de correntes e tensões ao longo da linha e na simulação de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão que tenham elementos não lineares (MAMIS, 2003).

1.3.1. Linha Representada por meio de Cascata de Circuitos π

Uma linha de transmissão de comprimento d pode ser representada por meio de uma cascata de n circuitos π .

Cada segmento consiste em uma resistência e uma indutância em série e um desvio de condutância e capacitância em paralelo, como mostra a Figura 11. Usando esta representação de linha, um modelo de estado é formulado para o sistema de energia que usa as tensões no capacitor e correntes no indutor como as variáveis de estado. O sistema que descreve as equações de estado é transformado em um conjunto de equações diferenciais linear pelo uso de integração trapezoidal. As variáveis de estado são encontradas através da resolução do conjunto de equações.

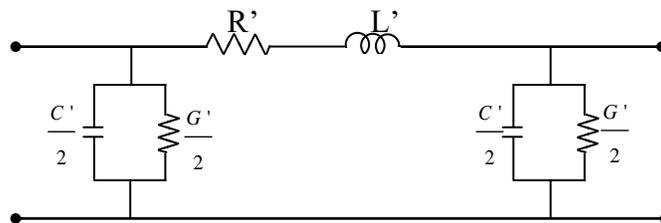


Figura 11. Linha de comprimento d representada por meio de n circuitos π .

Na Figura 11 os parâmetros R , L , G e C são calculados como sendo:

$$R = R' \frac{d}{n} \quad (65)$$

$$L = L' \frac{d}{n} \quad (66)$$

$$G = G' \frac{d}{n} \quad (67)$$

$$C = C' \frac{d}{n} \quad (68)$$

Nas equações (65) a (68), R' e L' são, respectivamente, a resistência e a indutância longitudinal da linha por unidade de comprimento, enquanto que os termos G'

e C' são a condutância e a capacitância transversal da linha por unidade de comprimento. Uma metade dos valores calculados da condutância G e capacitância C é colocada a cada início e fim dos segmentos π como mostra a Figura 12.

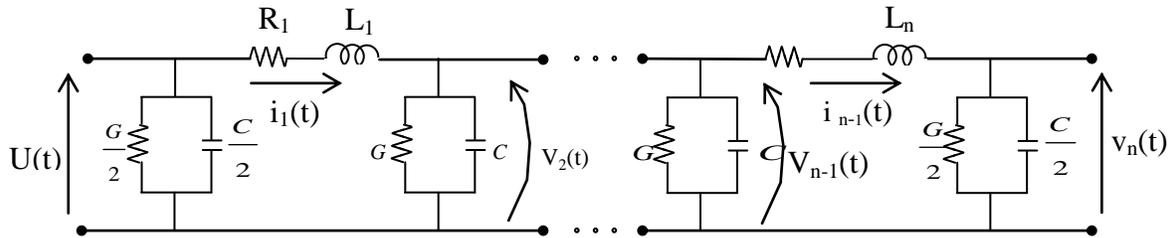


Figura 12. Cascata de n circuitos π .

Entre cada série de resistência e indutância não se tem a metade dos valores da capacitância e condutância, isso ocorre devido a cada saída do segmento de circuito π conectar-se à entrada do circuito π seguinte, sendo que capacitâncias e condutâncias em paralelo se somam.

1.3.2. Representação de um Sistema por meio de Variáveis de Estado

(DORF & BISHOP, 2001)

Em um sistema dinâmico, o estado do sistema num instante t é descrito em termos de um conjunto de valores das variáveis de estado $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. As variáveis de estado são as variáveis que determinam o comportamento futuro de um sistema quando são conhecidos o estado presente do sistema e os sinais de excitação.

A Figura 13 mostra um diagrama de blocos de um sistema dinâmico.

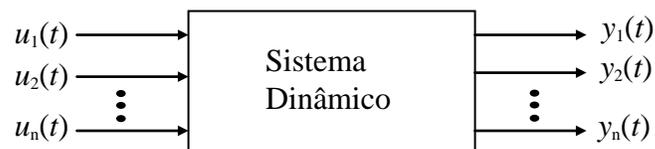


Figura 13. Diagrama de blocos de um sistema dinâmico.

Seja o sistema mostrado na Figura 13, onde $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ são os sinais de saída e $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ são os sinais de entrada. Um conjunto de variáveis de estado (x_1, x_2, \dots, x_n) para o sistema mostrado na Figura 13 é um conjunto no qual o conhecimento dos valores iniciais das variáveis de estado $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ no instante t_0 e dos sinais de entrada $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ para $t \geq t_0$, é suficiente para determinar os valores futuros das saídas e das variáveis de estado.

A forma geral de um sistema dinâmico é esboçada na Figura 14.

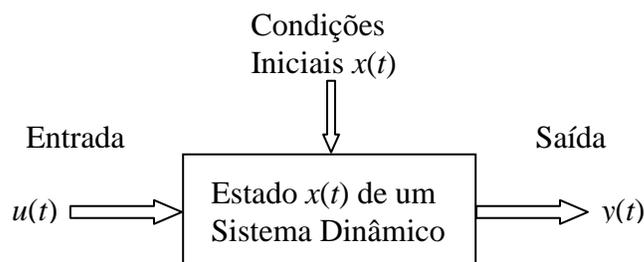


Figura 14. Sistema dinâmico.

O sistema dinâmico mostrado na Figura 14, expresso na forma de variáveis de estado, é descrito como sendo:

$$\dot{[x(t)]} = [A].[x(t)] + [B].u(t) \quad (69)$$

O sistema mostrado na equação (69) pode ser resolvido através de métodos de integração numérica. Dentre estes métodos podemos citar o método de Euler e a fórmula de Heun (ou regra do trapézio para integração numérica).

O sistema da Figura 14 pode ser representado por uma linha de transmissão que quando representada pelo modelo de uma cascata de circuitos π apresenta suas variáveis de estado em uma notação compacta de equações diferencial de estado $\dot{x} = [A].x + [B].u$.

1.3.3. Representação da Linha por meio de Cascata de Circuitos π e Variáveis de Estado

Para descrever a linha de transmissão por meio de variáveis de estado, inicialmente, deve-se representar a mesma por meio de uma cascata de circuitos π conforme mostrado na Figura 12.

O estado de um sistema é descrito por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, escrito em termos das variáveis de estado (x_1, x_2, \dots, x_n). Estas equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas na forma geral, como em (70), (71) e (72).

$$\dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + b_{11} \cdot u_1 + \dots + b_{1m} \cdot u_m, \quad (70)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n + b_{21} \cdot u_1 + \dots + b_{2m} \cdot u_m, \quad (71)$$

$$\dot{x}_n = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n + b_{n1} \cdot u_1 + \dots + b_{nm} \cdot u_m \quad (72)$$

Onde $\dot{x} = dx/dt$. Assim, este sistema de equações diferenciais simultâneas pode ser escrito na forma matricial, como segue a seguir:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (73)$$

A matriz x é composta pelas variáveis de estado e denominada vetor de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (74)$$

O vetor dos sinais de entrada é definido como u . Então, o sistema pode ser representado através da notação compacta das equações diferenciais de estado, como na equação (75).

$$\dot{x} = A.x + B.u \quad (75)$$

As variáveis de estado da Figura 13 serão as correntes longitudinais e as tensões transversais da linha.

Onde o vetor \dot{x} será a matriz contendo as equações diferenciais das correntes e tensões, conforme a equação (76).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_n(t)}{dt} \\ \frac{dv_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dv_n(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (76)$$

O vetor A é dado por parâmetros da linha como a resistência R , a indutância L , a capacitância C e a condutância G , conforme a equação (77).

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \dots & 0 & -\frac{1}{L_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{R}{L} & \frac{1}{L_n} & \dots & -\frac{1}{L_n} \\ \frac{1}{C} & \dots & -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{2}{C} & 0 & \dots & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (77)$$

O vetor x é dado pelas variáveis de estado da linha, como na equação (78).

$$x = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} \quad (78)$$

O vetor B é dado pela equação (79).

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

O vetor u tem a mesma dimensão que o vetor B , e todos os seus valores são iguais a tensão de energização $u(t)$.

1.3.3.1. Linha Representada por um Único Circuito π

Considerando uma linha de transmissão representada por um único circuito π , conforme mostra a Figura 15.

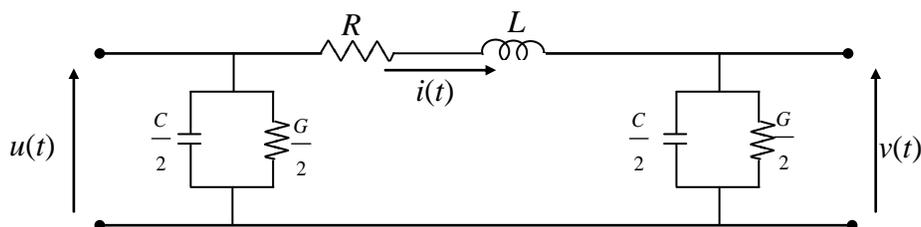


Figura 15. Representação para um circuito π .

Na Figura 15, $u(t)$ é a tensão que alimenta a linha, $i(t)$ é a corrente longitudinal da linha e $v(t)$ é a tensão transversal da linha.

Para o circuito mostrado na Figura 15, podem-se escrever as seguintes equações:

$$u(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - v(t) = 0 \quad (80)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - v(t) + u(t) \quad (81)$$

Dividindo os dois lados da equação (81) pela indutância L , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{L}u(t) \quad (82)$$

A corrente $i(t)$ é soma das correntes que passam através da condutância e da capacitância, sendo $i_G(t)$ a corrente que passa através da condutância e $i_C(t)$ a corrente que passa através do capacitor, logo:

$$i(t) = i_G(t) + i_C(t) \quad (83)$$

Sendo a corrente na condutância uma função da tensão, a tensão é $u(t)$ e a condutância é $\frac{G}{2}$, a corrente na condutância é:

$$i_G = v(t) \frac{G}{2} \quad (84)$$

Substituindo a equação (84) em (83):

$$i(t) = v(t) \frac{G}{2} + i_C(t) \quad (85)$$

Reescrevendo a equação (85) obtém-se:

$$i_c(t) = i(t) - v(t) \frac{G}{2} \quad (86)$$

Através dos estudos básicos de circuitos elétricos sabe-se que a tensão no capacitor é dada pelo inverso da capacitância multiplicado pela integral da corrente no tempo, assim:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt \quad (87)$$

Substituindo a equação (86) em (87) e a devida capacitância, obtemos:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int \left(i(t) - v(t) \frac{G}{2} \right) dt = \frac{2}{C} \int \left(i(t) - v(t) \frac{G}{2} \right) dt \quad (88)$$

Derivando os dois lados da equação (88), ressaltando que a derivada da integral de uma função é a própria função, obtém-se:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d \left(\frac{2}{C} \int \left(i(t) - \frac{G}{2} v(t) \right) dt \right)}{dt} \quad (89)$$

A partir de (89) obtém-se:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{2}{C} \left(i(t) - \frac{G}{2} v(t) \right) = \frac{2}{C} i(t) - \frac{G}{C} v(t) \quad (90)$$

Escrevendo as equações (82) e (90) na forma da equação (75), tem-se:

$$[x] = [i_1(t) \quad v_1(t)]^t \quad (91)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$u = u(t) \quad (94)$$

1.3.3.2. Linha Representada por Dois Circuitos π

A obtenção das equações para dois circuitos π é semelhante com as deduções das equações para um único circuito π , considerando alguns passos adicionais. A Figura 16 mostra a representação para uma linha de transmissão para dois circuitos π .

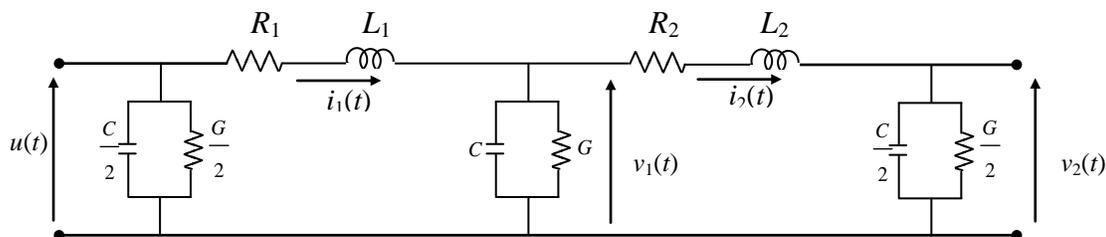


Figura 16. Representação para dois circuitos π .

Através do circuito da Figura 16, obtêm-se as seguintes equações.

$$u(t) - i_1(t)R_1 - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - v_1(t) = 0 \quad (95)$$

$$v_1(t) - i_2(t)R_2 - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - v_2(t) = 0 \quad (96)$$

Reescrevendo as equações (95) e (96):

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_1}i_1(t) - \frac{1}{L_1}v_1(t) + \frac{1}{L_1}u(t) \quad (97)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2}i_2(t) - \frac{1}{L_2}v_1(t) + \frac{1}{L_2}v_2(t) \quad (98)$$

A corrente no capacitor do segundo paralelo entre condutância e capacitor é dada por:

$$i_C(t) = i_1(t) - v_1(t).G - i_2(t) \quad (99)$$

E a corrente no capacitor do terceiro paralelo entre condutância e capacitor é dada por:

$$i_C(t) = i_2(t) - v_2(t). \frac{G}{2} \quad (100)$$

Para determinar a tensão diferencial nos paralelos capacitância e condutância deve-se determinar primeiro a tensão no capacitor em cada paralelo, sendo $v_1(t)$ a tensão no segundo paralelo e $v_2(t)$ a tensão no terceiro paralelo, logo.

$$v_1(t) = \frac{1}{C} \int (i_C(t) dt) \quad (101)$$

Substituindo a equação (99) e a devida capacitância na equação (101), tem-se:

$$v_1(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t) - v_1(t).G) dt \quad (102)$$

Para o terceiro paralelo:

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \quad (103)$$

Substituindo a equação (100) e a devida capacitância na equação (103), obtêm-se (104):

$$v_2(t) = \frac{2}{C} \int (i_2(t) - \frac{G}{2} v_2(t)) dt \quad (104)$$

Derivando as equações (102) e (104), obtêm-se as seguintes equações.

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_1(t) - \frac{1}{C} i_2(t) - \frac{G}{C} v_1(t) \quad (105)$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{2}{C} i_2(t) - \frac{G}{C} v_2(t) \quad (106)$$

Escrevendo as equações (107), (108), (105) e (106) na forma da equação (75) tem-se:

$$[x] = [i_1(t) \quad i_2(t) \quad v_1(t) \quad v_2(t)]^t \quad (107)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} & 0 \\ 0 & \frac{2}{C} & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \quad (109)$$

$$u = u(t) \quad (110)$$

Sendo as equações (94) e (110) iguais.

1.3.3.3. Linha Representada por Três Circuitos π

Os cálculos das equações para três circuitos π serão os mesmos desenvolvidos anteriormente, a Figura 17 mostra a representação para uma linha de transmissão para três circuitos π .

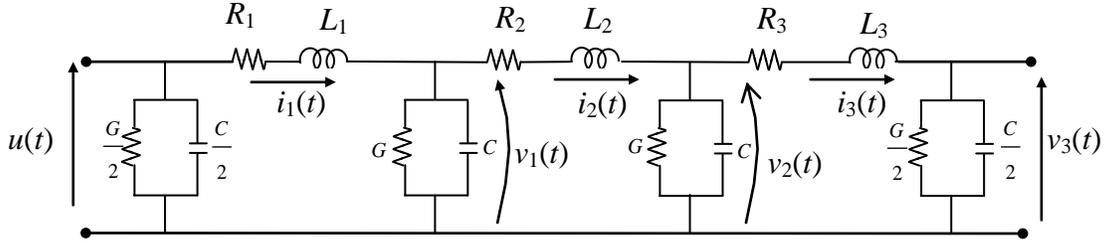


Figura 17. Representação para três circuitos π .

Através da malha do circuito da Figura 17.

$$u(t) - R_1 i_1(t) - L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - v_1(t) = 0 \quad (111)$$

$$v_1(t) - R_2 i_2(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - v_2(t) = 0 \quad (112)$$

$$v_2(t) - R_3 i_3(t) - L_3 \frac{di_3(t)}{dt} - v_3(t) = 0 \quad (113)$$

Reescrevendo as equações (111), (112) e (113) obtém-se:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1(t) - \frac{1}{L_1} v_1(t) + \frac{1}{L_1} u(t) \quad (114)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2(t) + \frac{1}{L_2} v_1(t) - \frac{1}{L_2} v_2(t) \quad (115)$$

$$\frac{di_3(t)}{dt} = -\frac{R_3}{L_3} i_3(t) + \frac{1}{L_3} v_2(t) - \frac{1}{L_3} v_3(t) \quad (116)$$

As correntes nos três últimos paralelos são:

$$i_{C1}(t) = i_1(t) - i_2(t) - Gv_1(t) \quad (117)$$

$$i_{C2}(t) = i_2(t) - i_3(t) - Gv_2(t) \quad (118)$$

$$i_{C3}(t) = i_3(t) - \frac{G}{2}v_3(t) \quad (119)$$

A tensão no segundo paralelo será:

$$v_1(t) = \frac{1}{C} \int i_{C1}(t) dt \quad (120)$$

Substituindo a equação (117) e a devida capacitância na equação (120) obtém-se (121):

$$v_1(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t) - Gv_1(t)) dt \quad (121)$$

A tensão no terceiro paralelo é dada por:

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int i_{C2}(t) dt \quad (122)$$

Substituindo a equação (118) e a capacitância na equação (122) tem-se

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int (i_2(t) - i_3(t) - Gv_2(t)) dt \quad (123)$$

e no quarto paralelo a tensão é

$$v_3(t) = \frac{1}{C} \int i_{C3}(t) dt \quad (124)$$

Substituindo a equação (120) e a devida capacitância na equação (124) chega-se a (125):

$$v_3(t) = \frac{1}{C} \int (i_3(t) - \frac{G}{2} v_3(t)) dt = \frac{2}{C} \int (i_3(t) - \frac{G}{2} v_3(t)) dt \quad (125)$$

Para determinar as tensões diferenciais nos paralelos é necessário derivar as equações (121), (123) e (125), logo:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_1(t) - \frac{1}{C} i_2(t) - \frac{G}{C} v_1(t) \quad (126)$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_2(t) - \frac{1}{C} i_3(t) - \frac{G}{C} v_2(t) \quad (127)$$

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{2}{C} i_3(t) - \frac{G}{C} v_3(t) \quad (128)$$

Colocando as equações (114) a (116) e (126) a (128) na forma da equação (75) obtém-se:

$$[x] = [i_1(t) \quad i_2(t) \quad i_3(t) \quad v_1(t) \quad v_2(t) \quad v_3(t)]^t \quad (129)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & -\frac{G}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & -\frac{G}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{C} & 0 & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & & & & & \end{bmatrix}^t \quad (131)$$

1.3.3.4. Linha Representada para n Circuitos π

Na Figura 18, tem-se uma representação para n circuitos π :

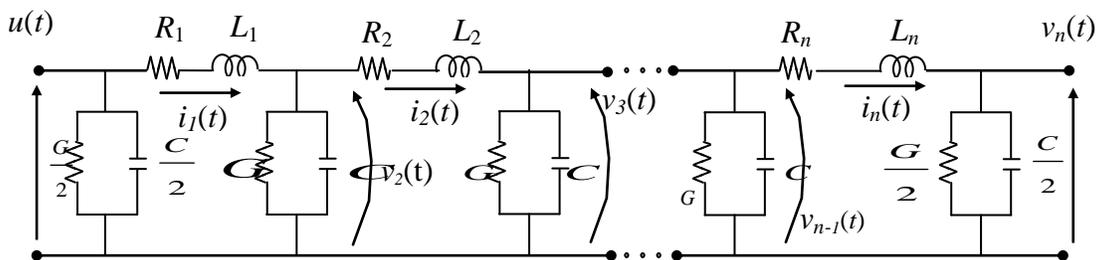


Figura 18. Representação para n circuitos π .

Sendo o vetor $[x]$ dado pela equação (132), o a matriz $[B]$ expressa pela equação (133) e a matriz $[A]$ dada pela equação (134).

$$[x] = [i_1(t) \quad i_2(t) \quad i_3(t) \quad \dots \quad i_n(t) \quad v_1(t) \quad v_2(t) \quad v_3(t) \quad \dots \quad v_n(t)]^t \quad (132)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{L_1} & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (133)$$

Os resultados obtidos para a linha de transmissão com os terminais em aberto podem ser estendidos para as linhas de transmissão com os terminais em curto-circuito e com uma carga resistiva, o que diferencia da linha de transmissão com os terminais em aberto é que a ultima linha da matriz $[A]$ tem seus valores modificados.

$$[A] = \begin{bmatrix}
 -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L_3} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{R_n}{L_n} & 0 & 0 & \frac{1}{L_n} & \dots & -\frac{1}{L_n} \\
 \hline
 \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & \dots & 0 & -\frac{G}{C} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & \dots & 0 & 0 & -\frac{G}{C} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{C} & \dots & -\frac{1}{C} & 0 & 0 & -\frac{G}{C} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{C} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{G}{C}
 \end{bmatrix} \quad (134)$$

1.4. Solução das Equações no Espaço de Estado por meio de Métodos Numéricos

A importância de resolver equações diferenciais está vinculada à modelagem matemática de diversos problemas em diversas áreas do conhecimento, entre elas, a Física. Geralmente, modelar um problema físico gera uma equação diferencial associada a esse problema (BRUNET, 2003).

Equações diferenciais aparecem com grande frequência nos modelos que descrevem quantitativamente fenômenos em diversas áreas, como por exemplo, mecânica de fluidos, fluxo de calor, reações químicas e nucleares, circuitos elétricos etc.

Infelizmente, nem todas as equações diferenciais têm uma solução dita analítica, isto é, uma solução exata, que possa ser obtida "manualmente". Existem também equações algébricas que não têm solução analítica.

Para determinar a solução dessa classe de equações que não podem ser resolvidas analiticamente, sejam elas algébricas ou diferenciais, foram desenvolvidos métodos de cálculo aproximado. Em geral, esses métodos consistem em repetir uma certa regra, um

certo número de vezes, e quanto mais iterações forem feitas dessa regra, mais próximo chega-se à solução da equação. O computador é, portanto, a ferramenta para esse tipo de trabalho tendo em vista a rapidez com que pode executar tarefas repetitivas.

Os métodos de cálculo aproximado são comumente chamados de métodos numéricos e, no caso de uma equação diferencial, é um método de integração numérica (BRUNET, 2003).

1.4.1. Métodos de Integração Numérica

A integração numérica é normalmente empregada na determinação de uma integral definida, cuja função ou não é disponível ou não possui uma solução analítica.

Como métodos de integração de equações diferenciais pode-se citar o método de Euler, a fórmula de Heun e o método de Runge-Kutta (RUGGIERO & LOPES, 1996).

Nesta seção será feito um breve estudo dos métodos de Euler e de Heun. A escolha destes dois métodos foi devido ao método de Euler ser a primeira tentativa de resolução numérica de uma equação diferencial e a escolha do método de Heun se deu devido a este método ser um aperfeiçoamento do método de Euler. A escolha de método de Heun (ou método de integração trapezoidal) se justifica a este ser usado também no programa EMTP (DOMMEL, 1986).

1.4.1.1. Método de Euler

A primeira tentativa de resolução numérica de uma equação diferencial foi feita por Euler, aproximadamente em 1768. Euler usou o que se chama hoje de método da tangente ou método de Euler (RUGGIERO & LOPES, 1996).

Considere a equação diferencial

$$y' = f(t, y) \tag{135}$$

com a condição inicial $y(t_0) = y_0$.

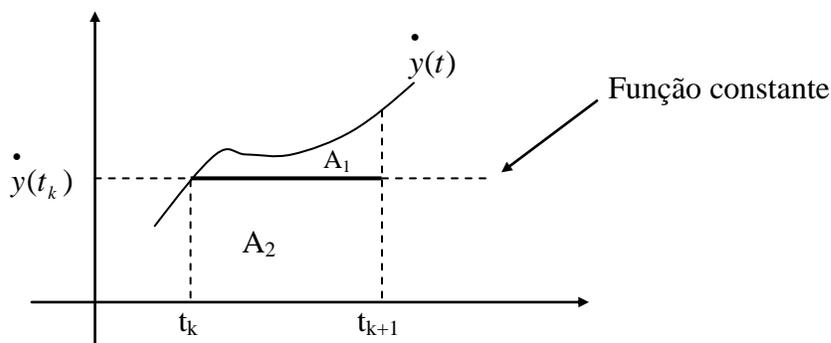


Figura 19. Aproximação da função $\dot{y}(t)$ por uma função constante.

O método de Euler consiste em aproximar a área sob a curva $\dot{y}(t)$ pela área de uma função constante no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Como os valores de t_0 e $y_0 = y(t_0)$ são conhecidos, sabe-se calcular $\dot{y}(t_0) = f(t_0, y_0)$. Para isso, na Figura 19 considere a área A_1 abaixo da curva $\dot{y}(t)$ igual a área A_2 abaixo da função constante:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t_k) dt \quad (136)$$

Integrando os dois membros da equação (136) obtém-se:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \dot{y}(t_k)(t_{k+1} - t_k) \quad (137)$$

Onde a equação (138) é o passo de cálculo e é constante:

$$h = t_{k+1} - t_k \quad (138)$$

Tem-se então que a equação (137) será:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \dot{y}(t_k) \cdot h \quad (139)$$

Para $\dot{y}(t)$ conhecido em todos os pontos do domínio em que a mesma é integrada, é possível obter numericamente a função $y(t)$ a partir da equação (139). A equação (139) é a fórmula de Euler para obter numericamente a solução de uma equação diferencial.

Para o sistema da equação (140), tem-se:

$$\dot{x}(t_{k+1}) = \dot{x}(t_k) + \ddot{x}(t_k) \cdot h \quad (140)$$

Sendo a equação (140) uma equação de estado, a mesma pode ser escrita como sendo:

$$\dot{x}(t_k) = [A] \cdot x(t_k) + [B] \cdot u(t_k) \quad (141)$$

Substituiu-se a equação (140) na equação (141), obtém-se a equação (142):

$$\dot{x}(t_k) = [I + hA] \cdot x(t_k) + h \cdot [B] \cdot u(t_k) \quad (142)$$

Onde [I] é uma matriz identidade. A equação (142) é a solução da equação de estado através do método de Euler.

1.4.1.2. Método de Heun ou Trapezoidal

Também conhecido como regra do trapézio, este método é um aperfeiçoamento do método de Euler. A Regra dos Trapézios consiste em se aproximar o valor da função contínua $\dot{y}(t)$ no intervalo (t_k, t_{k+1}) por uma função de primeira ordem; isto é, geometricamente, é equivalente a aproximar uma curva qualquer por uma reta, conforme mostra a Figura 20. Desta forma, a área sob a função $\dot{y}(t)$, que é equivalente à integral

dessa função, é aproximada pela área do trapézio cuja largura é igual a $(t_{k+1} - t_k)$ e a altura média igual a $[\dot{y}(t_k) + \dot{y}(t_{k+1})]/2$ (BRUNET, 2003).

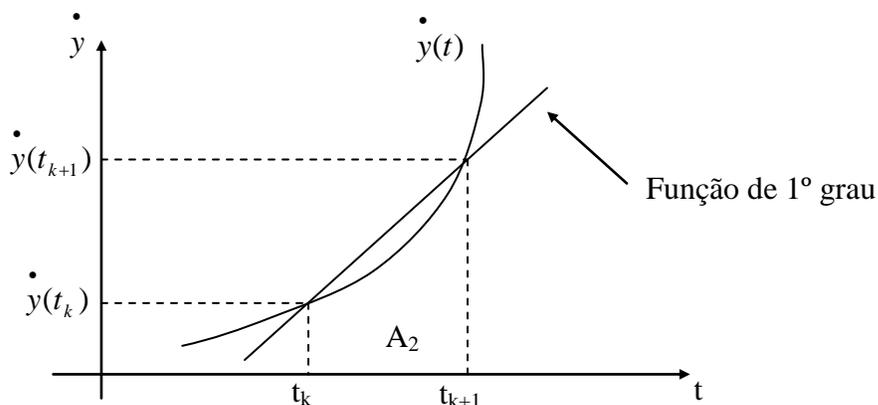


Figura 20. Aproximação da função $\dot{y}(t)$ por uma função de 1º grau no intervalo

$$h = t_{k+1} - t_k.$$

A partir da Figura 20 obteve-se a equação (143):

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t).dt = A_2 \quad (143)$$

Reescrevendo a equação (143), obtém-se a seguinte equação:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)dt = \frac{1}{2}[\dot{y}(t_k) + \dot{y}(t_{k+1})]h \quad (144)$$

Integrando o lado esquerdo da equação (144), obtém-se:

$$\dot{y}(t_{k+1}) = \dot{y}(t_k) + \frac{1}{2}[\dot{y}(t_k) + \dot{y}(t_{k+1})]h \quad (145)$$

Para $\dot{y}(t)$ conhecido em todos os pontos do domínio em que a mesma é integrada, é possível obter numericamente a função $y(t)$ a partir de (145). A equação (145) é a fórmula de Heun para obter numericamente a solução de uma equação diferencial.

Para uma equação diferencial $\dot{x}(t)$, A solução desta equação através do método de Heun é escrita como sendo:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \frac{1}{2} [\dot{x}(t_k) + \dot{x}(t_{k+1})] \cdot h \quad (146)$$

Sendo a equação $\dot{x}(t)$ uma equação de estado de um sistema, a mesma pode ser escrita como sendo:

$$\dot{x}(t_{k+1}) = [A] \cdot x(t_{k+1}) + [B] \cdot u(t_{k+1}) \quad (147)$$

Substituiu-se a equação (147) na equação (146) e mais algumas passagens matemáticas chega-se à equação (148):

$$x(t_{k+1}) = \left[I - \frac{1}{2} hA \right]^{-1} \left[\left(I + \frac{1}{2} hA \right) \cdot x(t_k) + \frac{1}{2} h \cdot [B] \cdot (u(t_k) + u(t_{k+1})) \right] \quad (148)$$

onde [I] é uma matriz identidade. A equação (148) é a solução da equação de estado através do método de Heun.

1.5. Representação da Linha em Variáveis de Estado Considerando o Efeito da Freqüência sobre os Parâmetros Longitudinais (KUROKAWA *et al.*, 2006)

Os modelos de linhas de transmissão de energia elétrica podem ser desenvolvidos no domínio do tempo ou no domínio da frequência, sendo que a mesma é mais facilmente representada no domínio da frequência.

No entanto o sistema elétrico, no qual as linhas de transmissão estão inseridas, possui diversos elementos não lineares que são de difícil representação no domínio da frequência. Deste modo dá-se preferência por modelos de linha que são desenvolvidos diretamente no domínio do tempo, segundo MARTI (1988).

Um outro fato que faz com que os modelos de linhas desenvolvidos diretamente no domínio do tempo serem mais utilizados, é que a maioria dos programas que realizam simulações de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos requerem que os componentes do sistema estejam representados no domínio do tempo.

No caso do modelo desenvolvido por H. W. Dommel (citado no item 1.3), cada segmento é constituído de uma associação série e paralela de resistores e indutores que resultam em uma resistência e uma indutância, variáveis em função da frequência, que representam o efeito solo e o efeito pelicular, de acordo com TAVARES *et al.* (1999). Este modelo, que é desenvolvido diretamente no domínio do tempo, é então implementado em *softwares* do tipo EMTP.

Apesar da técnica de variáveis de estado ser amplamente utilizada na representação de linhas de transmissão, é aplicada apenas em representações de linhas cujos parâmetros longitudinais possam ser considerados constantes e independentes da frequência, ou seja, desconsidera-se o efeito solo e pelicular.

No entanto, reconhece-se atualmente que a utilização de parâmetros constantes para representar a linha em toda a faixa de frequência, presente nos sinais durante a ocorrência de distúrbios na mesma, pode resultar em respostas em que as componentes harmônicas de alta frequência possuam amplitudes maiores do que são na realidade, de acordo com MARTI (1982), citado por KUROKAWA *et al.* (2006).

1.5.1. Circuito π Considerando os Efeitos Solo e Pelicular

Os parâmetros longitudinais de linhas de transmissão com retorno através do solo são fortemente dependentes da frequência. A descrição do efeito solo foi desenvolvida

por Carson e por Pollaczek, em DOMMEL (1986). Ambos os modelos apresentam resultados iguais quando aplicados em linhas aéreas. No entanto, em se tratando de cabos subterrâneos, as equações de Pollaczek apresentam melhores resultados (KUROKAWA *et al.*, 2006).

A impedância interna resulta do efeito do campo eletromagnético no interior do condutor. Esta impedância própria é constituída de uma resistência e de uma indutância cujos comportamentos em função da frequência pode ser calculada através de fórmulas derivadas das equações de Bessel. Devido ao efeito pelicular, o valor desta resistência aumenta à medida que a frequência aumenta enquanto que a indutância diminui com o aumento da frequência (MARTI, 1983), como citado por KUROKAWA *et al.* (2006).

Quando se leva em conta os efeitos solo e pelicular, os parâmetros longitudinais, por unidade de comprimento, de um segmento de uma linha de transmissão resulta em uma impedância $Z(\omega)$ escrita como sendo:

$$Z(\omega) = R(\omega) + j.\omega.L(\omega) \quad (149)$$

Na equação (149) $R(\omega)$ e $L(\omega)$ são, respectivamente, a resistência e a indutância longitudinal do segmento de linha.

Geralmente não existe uma função que descreva a impedância $Z(\omega)$ pois os parâmetros $R(\omega)$ e $L(\omega)$ são obtidos por meio de séries numéricas. No entanto, a impedância $Z(\omega)$ pode ser descrita, de maneira aproximada, por meio de uma função racional $F(\omega)$ cujos pólos são todos reais negativos e os resíduos são números reais positivos (KUROKAWA *et al.*, 2006). Deste modo, a impedância $Z(\omega)$ pode ser escrita como sendo (SARTO *et al.*, 2001):

$$Z(\omega) = F(\omega) = Z_0 + \sum_{i=1}^m \frac{K_i}{1 + j.\omega.Q_i} \quad (150)$$

Sendo na equação (150):

$$K_i = -\frac{r_i}{p_i} \quad (151)$$

$$Q_i = -\frac{1}{p_i} \quad (152)$$

Sendo p_i e r_i os pólos e os resíduos, respectivamente, da função racional $F(w)$ (KUROKAWA *et al.*, 2006).

A impedância descrita na equação (150) é relativa ao circuito da Figura 21.

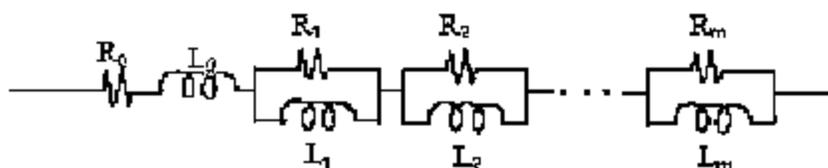


Figura 21. Circuito relativo a função $F(\omega)$.

De acordo com SARTO *et al.* (2001), a impedância equivalente do circuito da Figura 21 é dada por:

$$Z(\omega) = R_0 + j.\omega.L_0 + \sum_{i=0}^m \left(j.\omega. \frac{K_i}{1 + j.\omega.Q_i} \right) \quad (153)$$

sendo

$$R_i = -\frac{K_i}{Q_i} \quad (154)$$

$$L_i = K_i \quad (155)$$

Os resistores e indutores do circuito da Figura 21 representam os parâmetros longitudinais da linha, ou seja, a impedância longitudinal. Os valores dos resistores e

indutores da Figura 21 podem ser obtidos a partir de diversos métodos descritos por SARTO *et al.* (2001) e LIMA *et al.* (2005), citados por KUROKAWA *et al.* (2006).

Considerando que os parâmetros de uma linha de transmissão podem ser sintetizados por meio de um circuito do tipo mostrado na figura 21, pode-se utilizar uma cascata de circuitos π para representar uma linha de transmissão levando em conta o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da mesma, conforme o circuito π explícito na Figura 22:

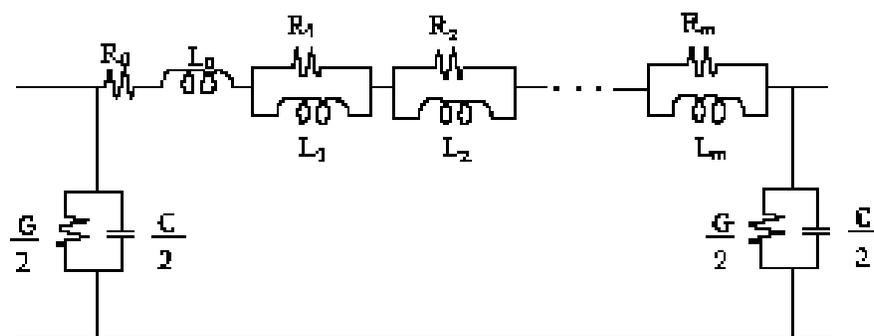


Figura 22. Cascata de circuitos π considerando o efeito da frequência.

Na figura 22 as associações RL paralelas são tantas quantas forem necessárias para representar a variação dos parâmetros em cada década de frequência que será considerada.

1.5.2. Representação da Linha por Meio de Cascata de Circuitos π e Variáveis de Estado

1.5.2.1. Representação por Meio de um Circuito π

Considerando o circuito da Figura 22 e chamando de A sua extremidade esquerda e B sua extremidade direita. Aplicando uma tensão $u(t)$ no terminal A e $v_1(t)$ em B . Considerando também os indutores $L_0, L_1, L_2, \dots, L_m$ onde circulam as correntes $i_{10}(t), i_{11}(t), i_{12}(t), \dots, i_{1m}(t)$ respectivamente.

A partir das correntes e tensões existentes no circuito da figura 22 pode-se determinar:

$$\frac{di_{10}}{dt} = \frac{i_{10}}{L_0} \left(- \sum_{j=1}^m R_j \right) + \frac{1}{L_0} \left(\sum_{j=1}^m R_j \cdot i_{1j} \right) + \frac{1}{L_0} \cdot u(t) - \frac{1}{L_0} \cdot v_1(t) \quad (156)$$

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{R_1}{L_1} \cdot i_{10} - \frac{R_1}{L_1} \cdot i_{11} \quad (157)$$

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{R_2}{L_2} \cdot i_{10} - \frac{R_2}{L_2} \cdot i_{12} \quad (158)$$

$$\frac{di_{1m}}{dt} = \frac{R_m}{L_m} \cdot i_{10} - \frac{R_m}{L_m} \cdot i_{1m} \quad (159)$$

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{2}{C} \cdot i_{10} - \frac{G}{C} \cdot v_1(t) \quad (160)$$

As equações (157) a (160) podem ser descritas na forma matricial, ou seja:

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B]u(t) \quad (161)$$

sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{\sum_{j=1}^m R_j}{L_0} & \frac{R_1}{L_0} & \frac{R_2}{L_0} & \dots & \frac{R_m}{L_0} & -\frac{1}{L_0} \\ \frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{R_m}{L_m} & 0 & 0 & \dots & \frac{R_m}{L_m} & 0 \\ \frac{2}{C} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (163)$$

$$[X]^T = [i_{10} \quad i_{11} \quad i_{12} \quad \cdots \quad i_{1m} \quad v_1(t)] \quad (164)$$

$$[\dot{X}] = \frac{d[X]}{dt} = \left[\frac{di_{10}}{dt} \quad \frac{di_{11}}{dt} \quad \frac{di_{12}}{dt} \quad \cdots \quad \frac{di_{1m}}{dt} \quad \frac{dv_1(t)}{dt} \right] \quad (165)$$

Observando que $[B]^T$ e $[X]^T$ correspondem a $[B]$ e $[X]$ transpostos, respectivamente.

Verifica-se também que o vetor $[X]$ possui $(m+2)$ componentes e a matriz quadrada $[A]$ é de ordem $(m+2)$.

1. 5. 2. 2. Representação por Meio de n Circuitos π

Os resultados obtidos para a linha representada por um único circuito p podem ser estendidos para a linha representada por uma cascata de n circuitos p . Neste caso, a matriz $[A]$ será uma matriz de ordem $n(m+2)$ e o vetor $[X]$ terá dimensão $n(m+2)$ e serão escritos na forma (KUROKAWA *et al.*, 2006):

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \cdots & [A_{1n}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & \cdots & [A_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{n1}] & [A_{n2}] & \cdots & [A_{nn}] \end{bmatrix} \quad (166)$$

$$[X]^T = [[X_1] \quad [X_2] \quad \cdots \quad [X_n]] \quad (167)$$

Em (166), $[A]$ é uma matriz tridiagonal cujos elementos são matrizes quadradas de ordem $(m+2)$. Cada elemento genérico $[A_{kk}]$ de $[A]$ é representado como descrito em (168).

Considerando que a linha é representada por uma cascata de n circuitos π , o vetor $[B]$ possui dimensão $n(m+2)$.

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{\sum_{j=0}^{j=m} R_j}{L_0} & \frac{R_1}{L_0} & \frac{R_2}{L_0} & \dots & \frac{R_m}{L_0} & -\frac{1}{L_0} \\ \frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{R_m}{L_m} & 0 & 0 & \dots & \frac{R_m}{L_m} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (168)$$

No vetor representado em (167), um elemento genérico pode ser descrito como:

$$[X_K]^T = [i_{K0} \quad i_{K1} \quad i_{K2} \quad \dots \quad i_{Km} \quad v_{K1}] \quad (169)$$

Os elementos do vetor explícito em (169) são descritos como:

i_{K0} é a corrente no indutor L_0 , no K-ésimo circuito π

i_{K1} é a corrente no indutor L_1 , no K-ésimo circuito π

i_{K2} é a corrente em L_2 , no K-ésimo circuito π

i_{Km} é a corrente em L_m , no K-ésimo circuito π

v_K é a tensão no capacitor no lado direito do K-ésimo circuito π

A equação de estado, que descreve uma linha representada por uma cascata de n circuitos π , pode então ser resolvida por meio de métodos numéricos (KUROKAWA *et al.*, 2006), como o de *Euler* e de *Heun*.

2. OBJETIVO

O presente trabalho tem como primazia calcular transitórios de tensões e correntes no terminal de uma linha monofásica, composta por um único condutor. A linha foi representada por meio de cascata de circuitos π (para linha com parâmetros fixos e variáveis com a frequência) e variáveis de estado, levando em consideração o terminal em diversas configurações: aberto, em curto e com uma carga equivalente à impedância característica da linha. Tem-se ainda por escopo calcular o comportamento da linha, com terminal ligado a uma carga com impedância característica, quando energizada por uma descarga elétrica atmosférica sem a presença do efeito corona, como simulado por WEDY (2006).

3. MATERIAL E MÉTODOS

A análise realizada no presente relatório é baseada em uma linha de transmissão de energia elétrica monofásica com 10 km de extensão, cascata com 200 circuitos π e resistividade em corrente contínua de $0.05 \Omega km^{-1}$. Foram também considerados os seguintes parâmetros físicos:

indutância longitudinal de $1.73 mH km^{-1}$;

capacitância longitudinal de $7.80 nF km^{-1}$;

condutância longitudinal de $0.556 \mu S km^{-1}$.

A linha é alimentada com uma tensão de 20 kV no instante inicial, com um tempo de simulação de 300 μs e passo de cálculo (entre 0 e 300 μs) de 0.05 μs , resultando num vetor com 6000 amostragens de tensões e correntes no terminal final da linha.

Nas simulações utilizando cascata de circuitos π e variáveis de estado considerado os efeitos solo e pelicular, utilizou-se tempo de simulação de 400 μs e passo de cálculo de 0.1 μs , resultando em um vetor com 4000 amostragens. Os valores dos elementos R e L utilizados para sintetizar o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha

foram obtidos utilizando o método proposto por TAVARES (1998). Os valores das resistências e indutâncias obtidas através do método proposto por TAVARES (1998) são encontrados em KUROKAWA *et al.* (2006). A capacitância e condutância longitudinais são as mesmas citadas anteriormente e a linha é representada, como a representação sem influência da frequência, por uma cascata com 200 circuitos π .

Para análise de uma descarga elétrica atmosférica num dos terminais da linha, considerou-se o terminal ligado a uma carga com impedância característica, tempo de simulação de 70 μs e passo de cálculo de 0.05 μs , o que resultou num vetor de amostragens de 1400 componentes. Foram analisadas as amostragens de tensões e correntes em cinco pontos na extensão da linha: no início; no ponto a 2500 metros; a 5000 metros; 7500 metros e a 10000 metros.

Para resolução das equações de estado foi utilizado o método de integração numérica trapezoidal (método de Heun).

Todos os algoritmos envolvidos nas simulações dos transitórios eletromagnéticos deste trabalho foram desenvolvidos no *software* Matlab, nas versões 5.3, 6.1 e 7.1.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Linha com Terminal Aberto

Considerando a linha de transmissão esboçada na Figura 3, foram gerados os seguintes gráficos, considerando o terminal da linha aberto.

Verifica-se no gráfico da Figura 23, que de acordo com a equação (56), a tensão no terminal da linha é duas vezes maior que a da fonte de alimentação da mesma.

Observa-se no gráfico da Figura 24, agora considerando o efeito solo e pelicular, que a tensão também dobra de valor, como no gráfico da Figura 23.

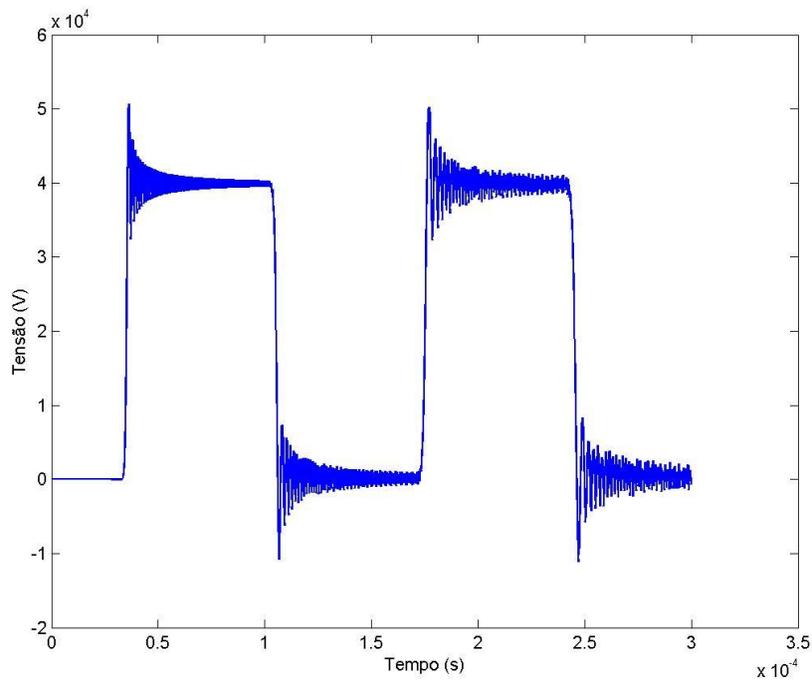


Figura 23. Tensão da linha de transmissão com terminal aberto.

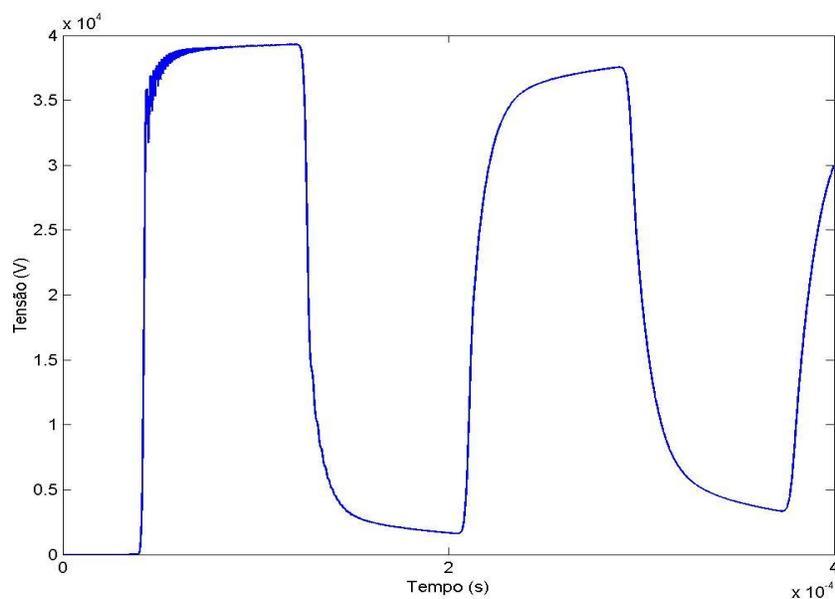


Figura 24. Tensão da linha de transmissão com terminal aberto, levando em conta o efeito da frequência.

Observa-se no gráfico da Figura 25 que a corrente da linha com terminal aberto oscila em torno de zero, com pico próximo a 8 A.

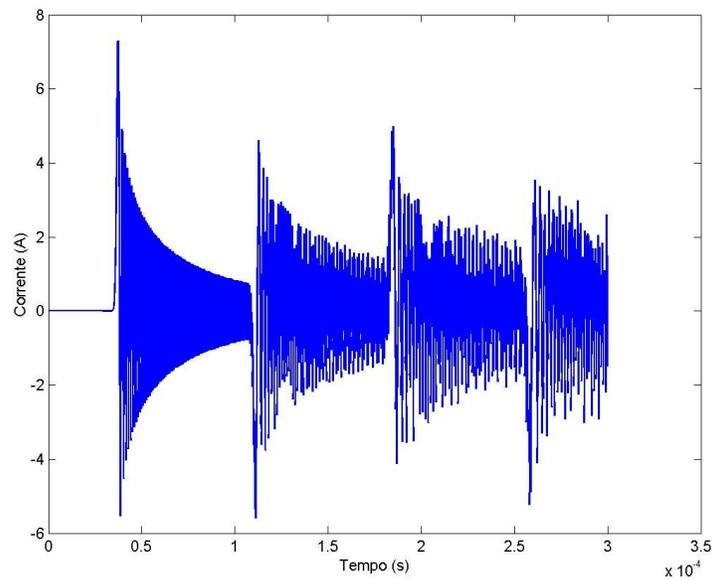


Figura 25. Corrente da linha de transmissão com terminal aberto.

Comparando os resultados obtidos, com e sem o efeito da frequência, pode-se verificar que no gráfico da Figura 26 é observada uma oscilação menor dos valores da corrente, se comparado com o gráfico da Figura 25, oscilando em torno do valor zero.

Vale ressaltar também, no gráfico da Figura 26, um pico inicial de corrente de aproximadamente 8 A, igual ao gráfico da Figura 25.

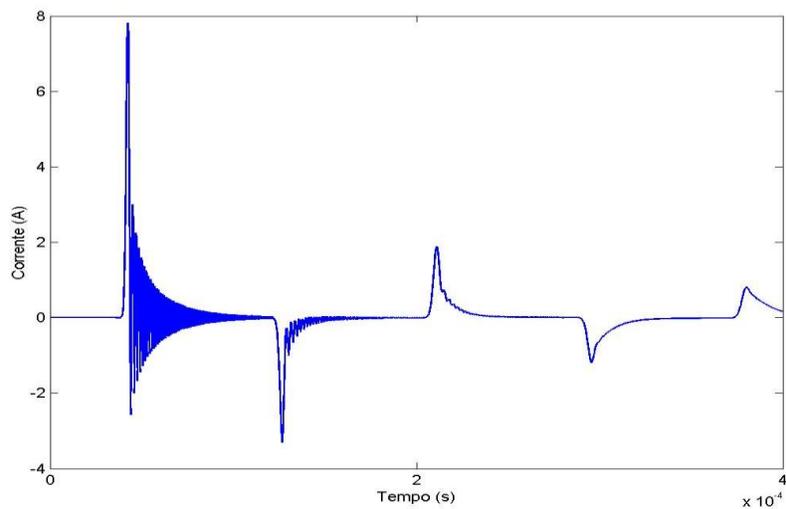


Figura 26. Corrente da linha de transmissão com terminal aberto, considerando o efeito da frequência.

4.2. Linha com Terminal em Curto-Circuito

Considerando a linha de transmissão esboçada na Figura 6, com terminal ligado em curto-circuito, foi possível obter os seguintes resultados.

Verifica-se através da Figura 27, que a tensão no terminal curto-circuitado permanece nula durante toda a simulação, como previsto.

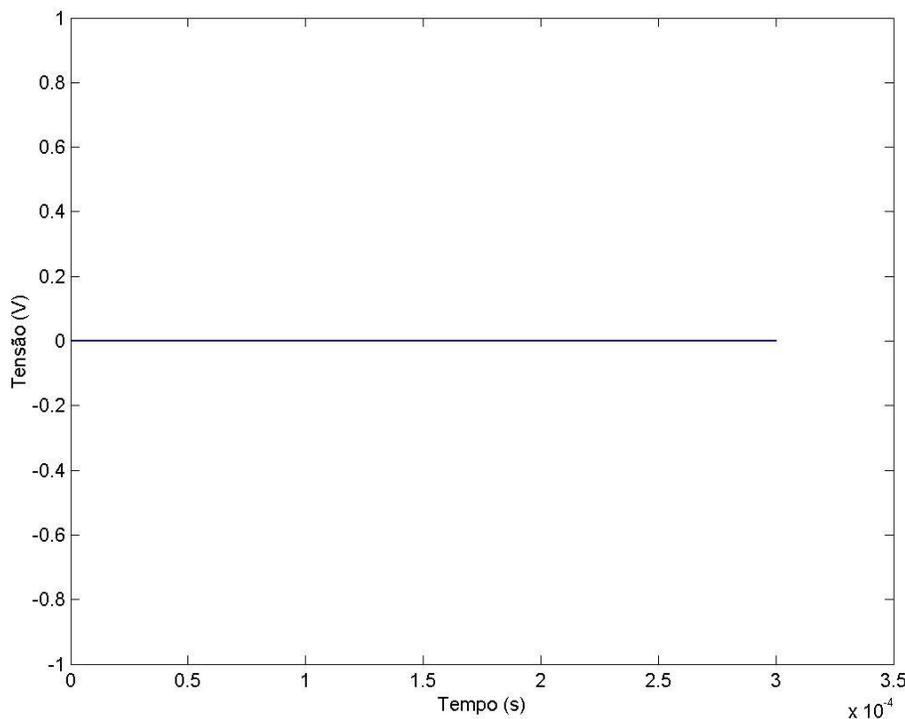


Figura 27. Tensão no terminal da linha em curto-circuito.

Pode-se observar no gráfico da Figura 28 os valores crescentes da corrente relativa à linha com terminal configurado em curto-circuito.

A Figura 29 mostra o gráfico da corrente levando em consideração o efeito da frequência.

Comparando os gráficos das Figuras 28 e 29 pode-se observar semelhanças plausíveis, como por exemplo, o tempo do primeiro degrau de corrente, observado em ambos os gráficos no tempo discreto de aproximadamente $0.04 \mu\text{s}$ e a proporção mantida entre as amostragens de corrente geradas nos dois métodos.

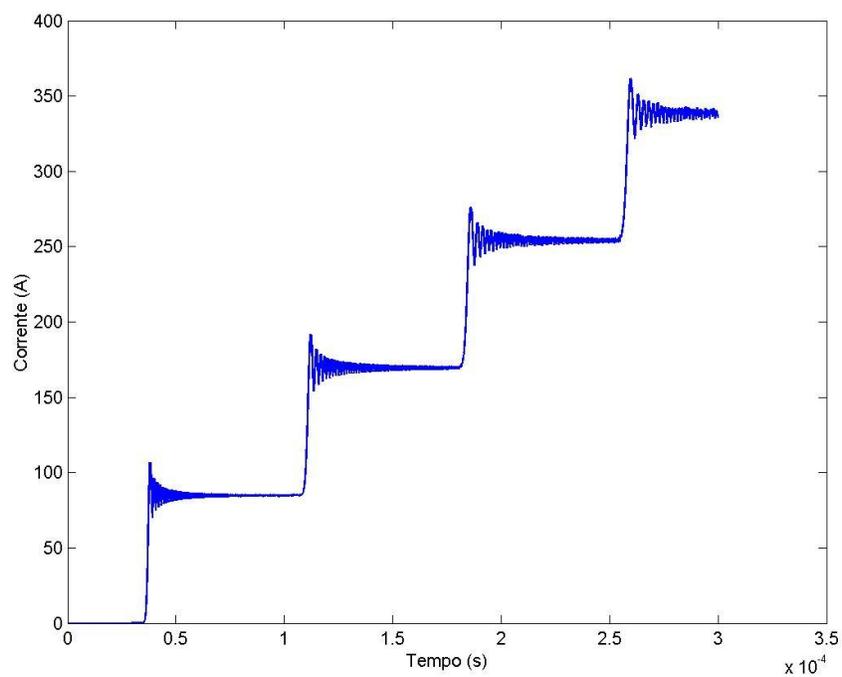


Figura 28. Corrente no terminal da linha em curto-circuito.

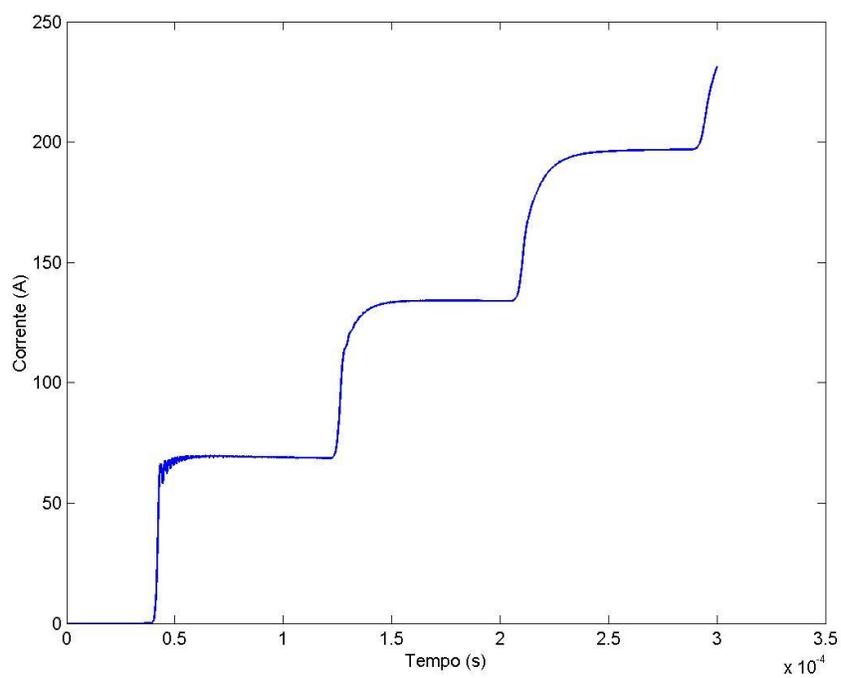


Figura 29. Corrente no terminal da linha em curto-circuito, levando em consideração o efeito da frequência.

4.3. Linha com Terminal Ligado a uma Carga Z_C

Baseando-se na linha de transmissão ligada a uma carga equivalente a impedância característica, mostrada na Figura 2, foi possível obter os seguintes resultados.

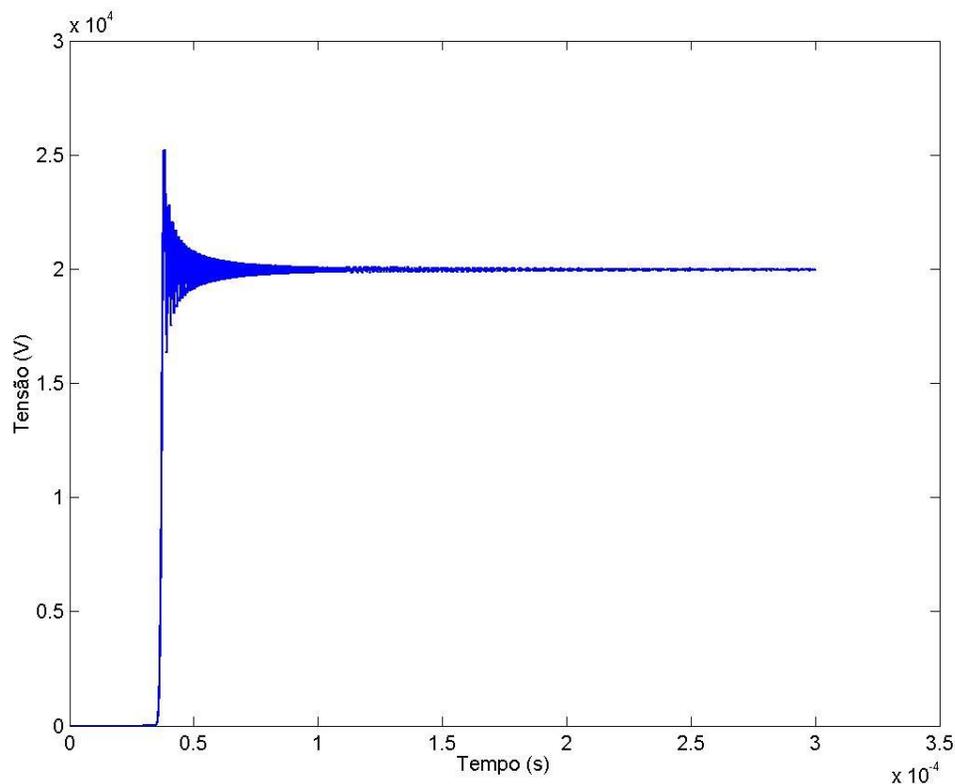


Figura 30. Tensão da linha ligada a uma carga com impedância Z_C .

Verifica-se através do gráfico da Figura 30 que a tensão no terminal da linha estabiliza-se quase que instantaneamente em 20 kV, com um breve pico de tensão de aproximadamente 25 kV próximo ao tempo discreto de $0.04 \mu\text{s}$.

A Figura 31 representa o gráfico considerando o efeito da frequência sobre a linha. A tensão, como previsto, estabiliza-se muito próximo de 20 kV.

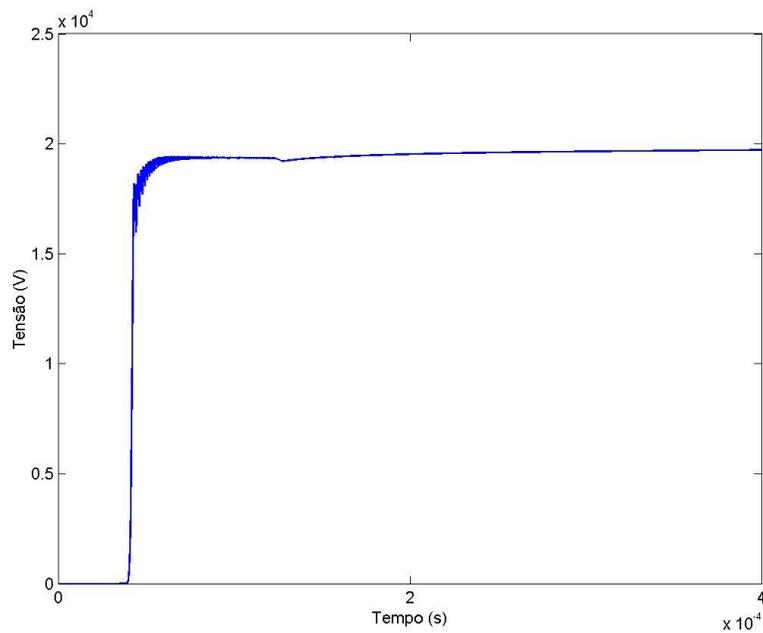


Figura 31. Tensão da linha ligada a uma carga com impedância Z_C , considerando o efeito da frequência.

A Figura 31 representa o gráfico considerando o efeito da frequência sobre a linha. A tensão, como previsto, estabiliza-se muito próximo de 20 kV.

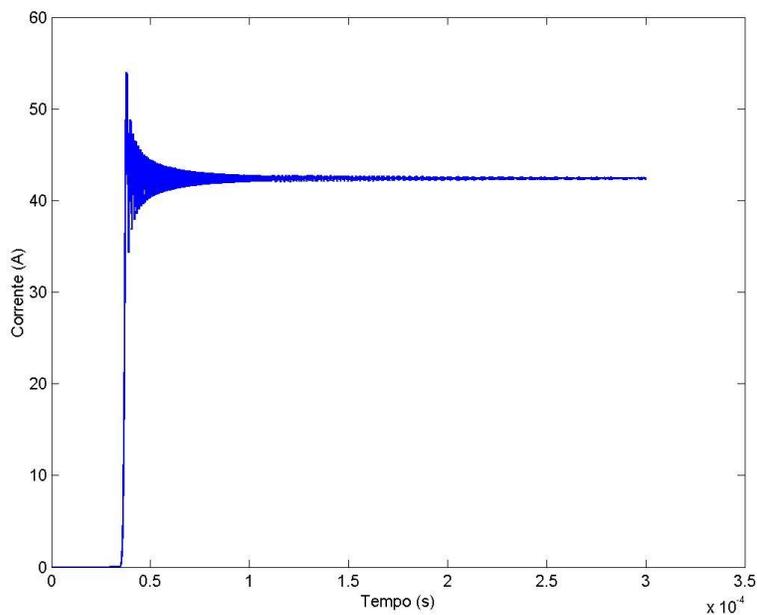


Figura 32. Corrente da linha ligada a uma carga com impedância Z_C .

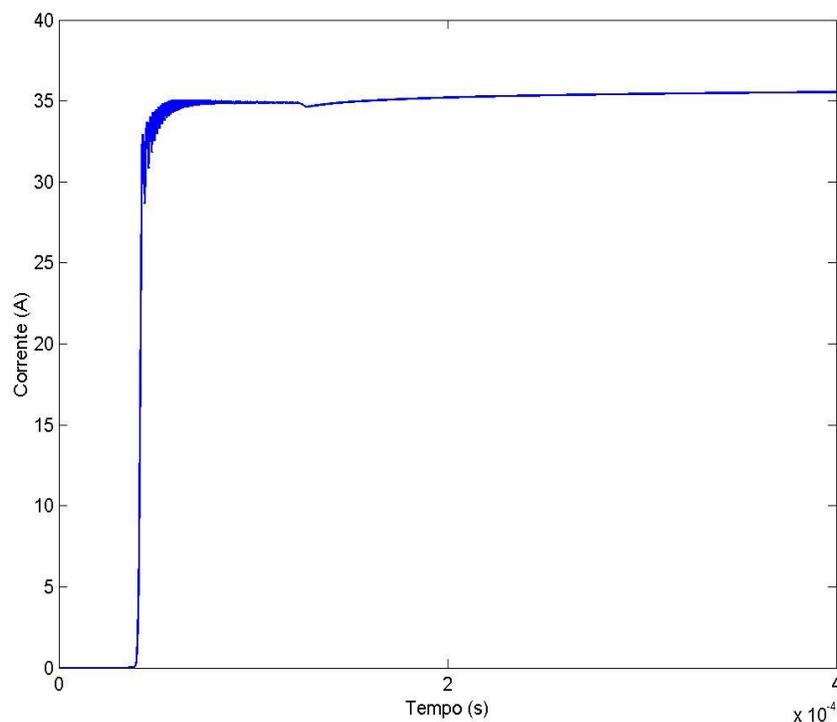


Figura 33. Corrente da linha ligada a uma carga com impedância Z_C , considerando o efeito da frequência.

Através das Figuras 32 e 33 pode-se comparar os resultados obtidos para corrente na linha ligada a uma carga com impedância Z_C , sem e com os efeitos solo e pelicular respectivamente.

4.4. Descarga Elétrica Atmosférica numa Linha Ligada a uma Carga Z_C

Considerando uma linha com um terminal ligado a uma carga equivalente à impedância característica Z_C e o outro terminal aberto e desenergizado, observa-se os resultados obtidos na simulação de uma descarga atmosférica sobre o terminal aberto da mesma.

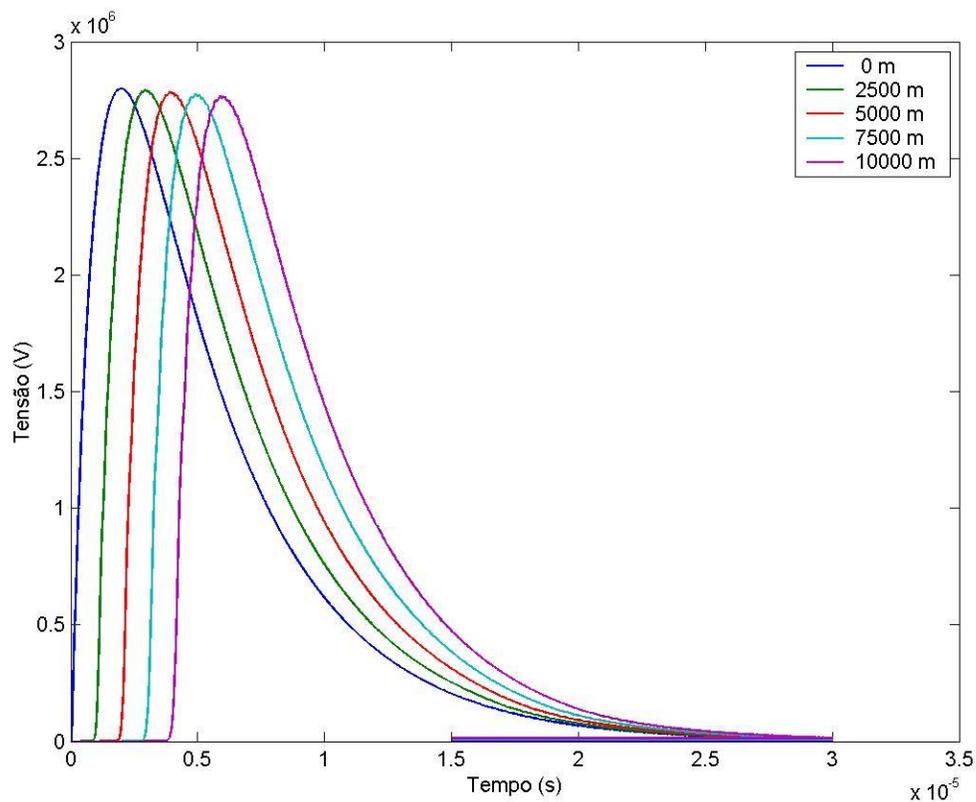


Figura 34. Tensões na linha originadas por uma descarga elétrica atmosférica.

É possível observar no gráfico da Figura 34 as tensões em cinco pontos distintos na extensão da linha, originadas por uma descarga elétrica atmosférica em uma das extremidades. Verifica-se através da figura anterior, com cinco gráficos com cores distintas, o intervalo de tempo em que a onda de tensão percorre toda extensão da linha.

O gráfico da Figura 35 mostra a corrente em diversos pontos da linha, mostrando a progressão da onda de corrente pela extensão da mesma em função do tempo.

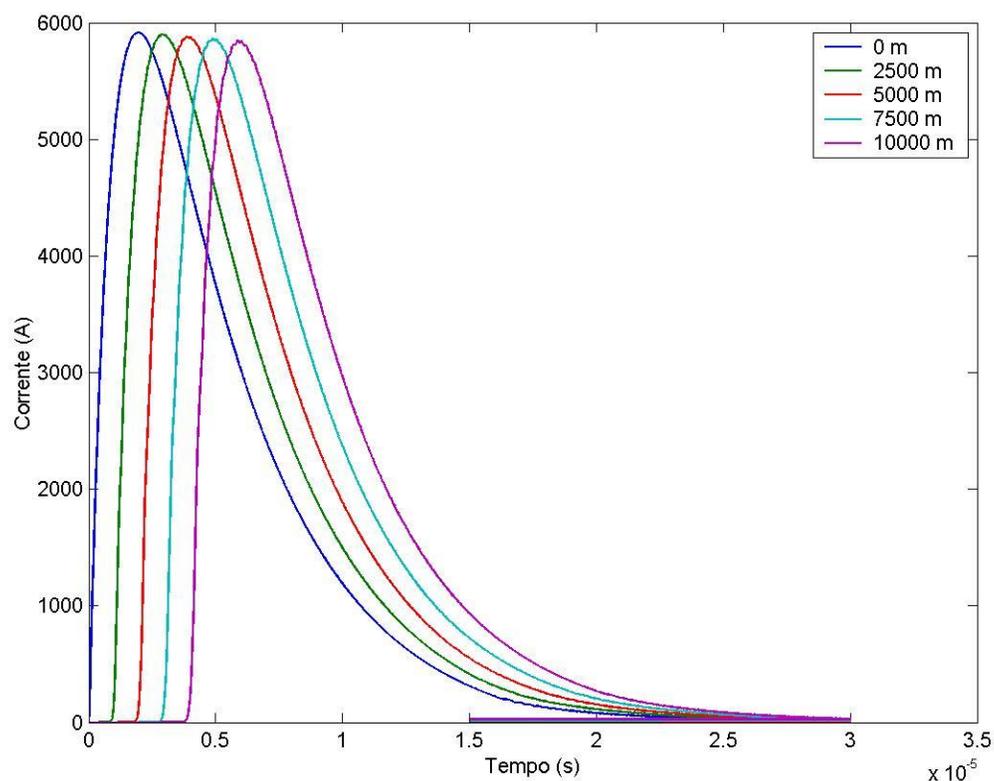


Figura 35. Correntes na linha originadas por uma descarga elétrica atmosférica.

5. CONCLUSÃO

Foi demonstrado no presente trabalho grande parte da teoria envolvida na simulação de linhas de transmissão representadas por meio de cascata de circuitos π e variáveis de estado, bem como a teoria completa sobre os métodos de integração numérica utilizados na resolução das equações de estado.

Foi possível verificar, a partir dos resultados obtidos nas simulações da linha configurada com terminal aberto, a ação das ondas incidentes e refletidas sobre a tensão e corrente no terminal final da mesma. Observa-se a duplicação da tensão da fonte, resultante da soma dos módulos das ondas incidentes e refletidas de tensão, que possuem o mesmo sinal e magnitude para uma linha com terminal aberto. A corrente oscila em torno de zero durante toda a simulação devido à ação de ondas incidentes e refletidas de

corrente com mesma magnitude e sinais opostos, ou seja, as ondas se anulam resultando em uma corrente igual a zero.

Nas simulações envolvendo o efeito da frequência, para linha com terminal aberto, foram obtidos resultados com comportamento muito parecido aos obtidos sem considerar o efeito da frequência. Os resultados, considerando os efeitos solo e pelicular, foram muito parecidos nos picos de tensão e corrente durante os transitórios e na magnitude dos valores esperados na estabilização do sistema, porém com menores oscilações durante a simulação.

Nos resultados das simulações relativas a linha com terminal configurado em curto-circuito foi possível observar a ocorrência de uma corrente crescente em degraus, com e sem o efeito da frequência, e a tensão no terminal zero. É possível concluir a partir dos resultados e a partir da teoria envolvendo as ondas viajantes em linhas de transmissão que, as ondas incidentes e refletidas de tensão se anulam para uma linha curto-circuitada e as ondas viajantes de corrente somam-se, duplicando o valor da corrente.

A partir dos resultados obtidos nas simulações da linha ligada a uma carga com impedância Z_C , verifica-se que as ondas refletidas são nulas, ou seja, não há reflexão das ondas incidentes de tensão e corrente, resultando em uma tensão sobre a carga igual a tensão gerada pela fonte, 20 kV, e corrente de aproximadamente 40 A. Os gráficos obtidos a partir do método considerando o efeito da frequência são bem próximos dos obtidos sem o efeito da frequência. Observa-se apenas uma pequena variação da corrente nos resultados obtidos para corrente, uma variação de 5 A aproximadamente para a corrente após 40 ms.

Nas simulações de uma descarga elétrica atmosférica sobre uma linha de transmissão desenergizada é possível verificar a progressão das ondas de tensão e corrente no decorrer da extensão da linha, em função do tempo. Conclui-se que as ondas de tensão e corrente se propagam aproximadamente na velocidade da luz pelo condutor da linha de transmissão.

6. REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. (2001). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 7. ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, RJ.

BRUNET, L. G. (2003). *Métodos de Integração Numérica*. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/tex/metcomp1/aulas/euler2/node1.html>. Acesso em 25 fev. 2003.

CHIPMAN, R. A. (1976). *Teoria e Problemas de Linhas de Transmissão*. Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, SP.

DOMMEL, H. W. (1969). *Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks*. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-88, No. 4; pp. 388-399.

DOMMEL, H. W. (1986). *Electromagnetic Transients Program Reference Manual*, Department of Electrical Engineering, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. (2001). *Sistemas de Controle Modernos*, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, RJ.

FUCHS, R. D. *Transmissão de energia elétrica: linhas aéreas; teoria das linhas em regime permanente*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; 1979.

GUIDORIZZI, H. L. (1986). *Um Curso de Cálculo*, 2. ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, RJ.

KUROKAWA, S.; YAMANAKA, F. N. R.; PRADO, A. J.; BOVOLATO, L. F.; PISSOLATO, J. (2006). *Representação de Linhas de Transmissão por meio de Variáveis de Estado Levando em Consideração o Efeito da Frequência sobre os Parâmetros Longitudinais*. Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, SP.

LIMA, A. C. S.; FERNANDES, A. B.; CARNEIRO, S. (2005). *Rational Approximation of Frequency Domain Responses in the S and Z Planes*. *Proc. of the 2005 IEEE Power Engineering Society General Meeting*, San Francisco, California, USA.

MÁCIAS, J. A. R.; EXPÓSITO, A. G.; SOLER, A. B. (2005). *A Comparison of Techniques for State-Space Transient Analysis of Transmission Lines*. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 20, No. 2; pp. 894-903.

MAMIS, M. S.; NACAROGLU, A. (2003). *Transient Voltage and Current Distributions on Transmission Lines. IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 149, N0. 6; pp. 705-712.

MAMIS, M. S. (2003). *Computation of Electromagnetic Transients on Transmission Lines with Nonlinear Components. IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 150, N0. 2; pp. 200-203.

MARTI, J. R. (1982). *Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-101, No. 1; pp. 147-155.

MARTI, L. (1983). *Low-Order Approximation of Transmission Line Parameters for Frequency-Dependent Models. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-102, No. 11; pp. 3582-3589.

MARTI, L. (1988). *Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices. IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 3, No. 3; pp. 1099-1110.

MINEGISHI, S.; ECHIGO, H.; SATO, R. (1994). *A Method for Measuring Transients Caused by Impedance. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 36, N. 3, pags. 244-247.

NELMS, R. M.; SHEBLE, G. B.; NEWTON, S. R.; GRIGSBY L. L. (1989). *Using a Personal Computer to Teach Power System Transients. IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 4, No. 3; pp. 1293-1297.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. (1996). *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. Makron Books, São Paulo, SP.

SARTO, M. S.; SCARLATTI, A.; HOLLOWAY, C. L. (2001). *On the Use of Fitting Models for the Time-Domain Analysis on Problems with Frequency-Dependent Parameters. Proc. of the 2001 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Montreal, Canada, pp. 588-593.

TAVARES, M. C. (1998). *Modelo de Linha de Transmissão Polifásico Utilizando Quase-Modos*. Tese de Doutorado. UNICAMP, Campinas, SP.

TAVARES, M. C.; PISSOLATO, J.; PORTELA, C. M. (1999). *Mode Domain Multiphase Line Model-Use in Transients Studies. IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 14, No. 4; pp. 1533-1544.

WEDY, G. F. (2006). *Influencia do Efeito Corona nas Sobretensões Resultantes da Incidência de Descargas Atmosféricas em Linhas de Transmissão*. Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, SP.