

SEM0501

Dinâmica Aplicada às Máquinas

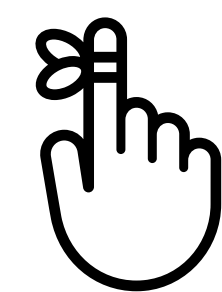
Aula #12 — Momento de inércia

Prof. Dr. Thiago Boaventura

tboaventura@usp.br

São Carlos, 03/10/18



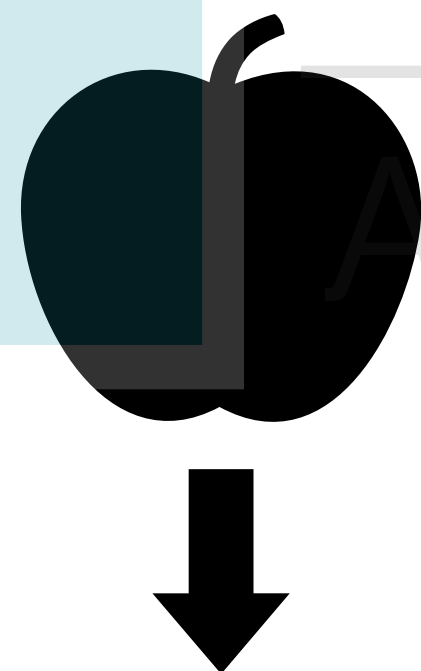


Aula passada...

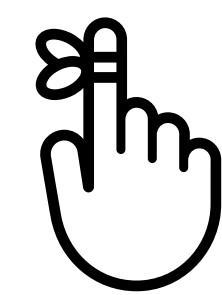
princípio
fundamental da
dinâmica

$$\mathbf{F}_R = \frac{d(\mathbf{L})}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

$$\mathbf{F}_R = m\mathbf{a}$$



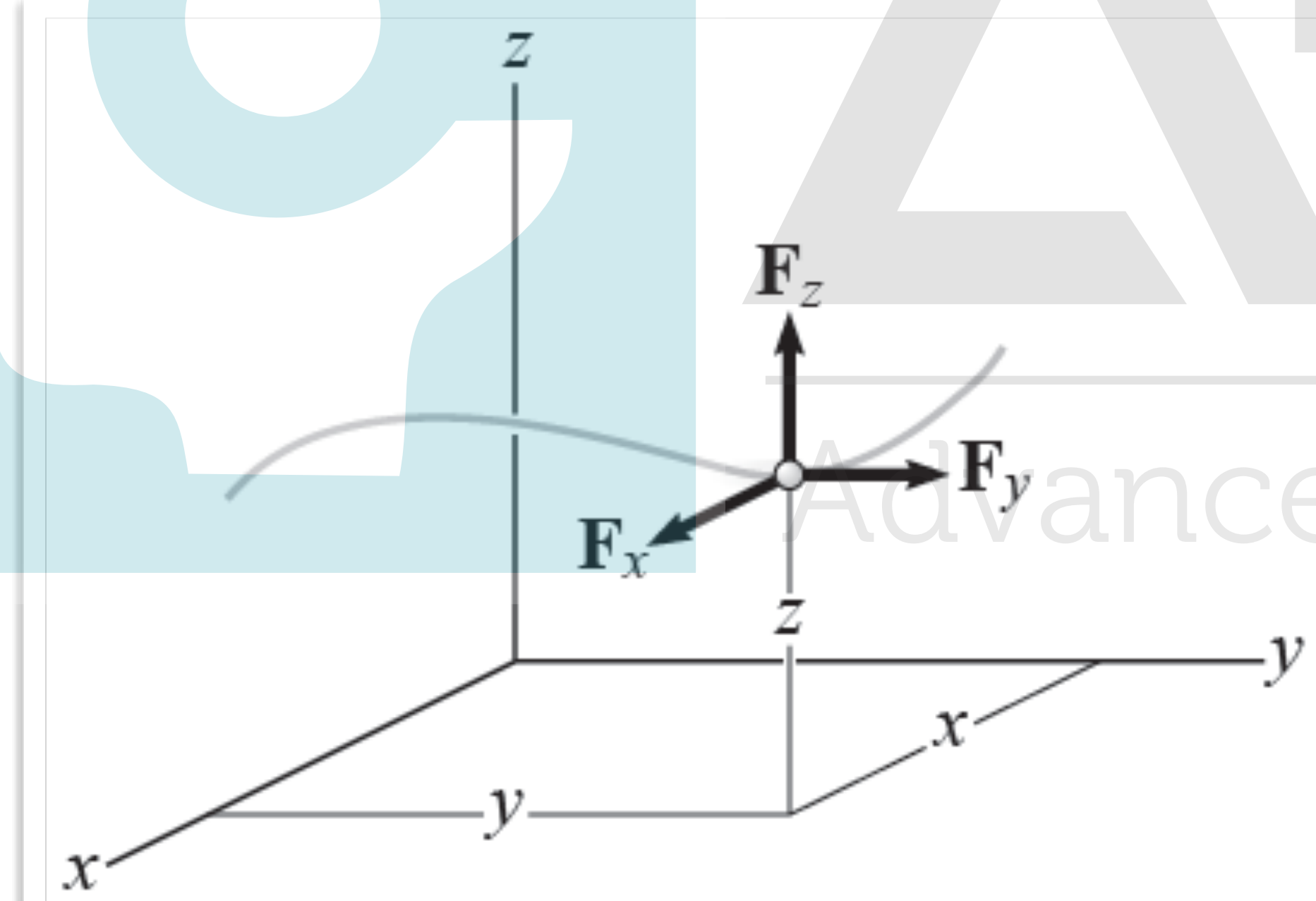
$$\mathbf{F}_R = M\mathbf{a}_G$$



Aula passada...

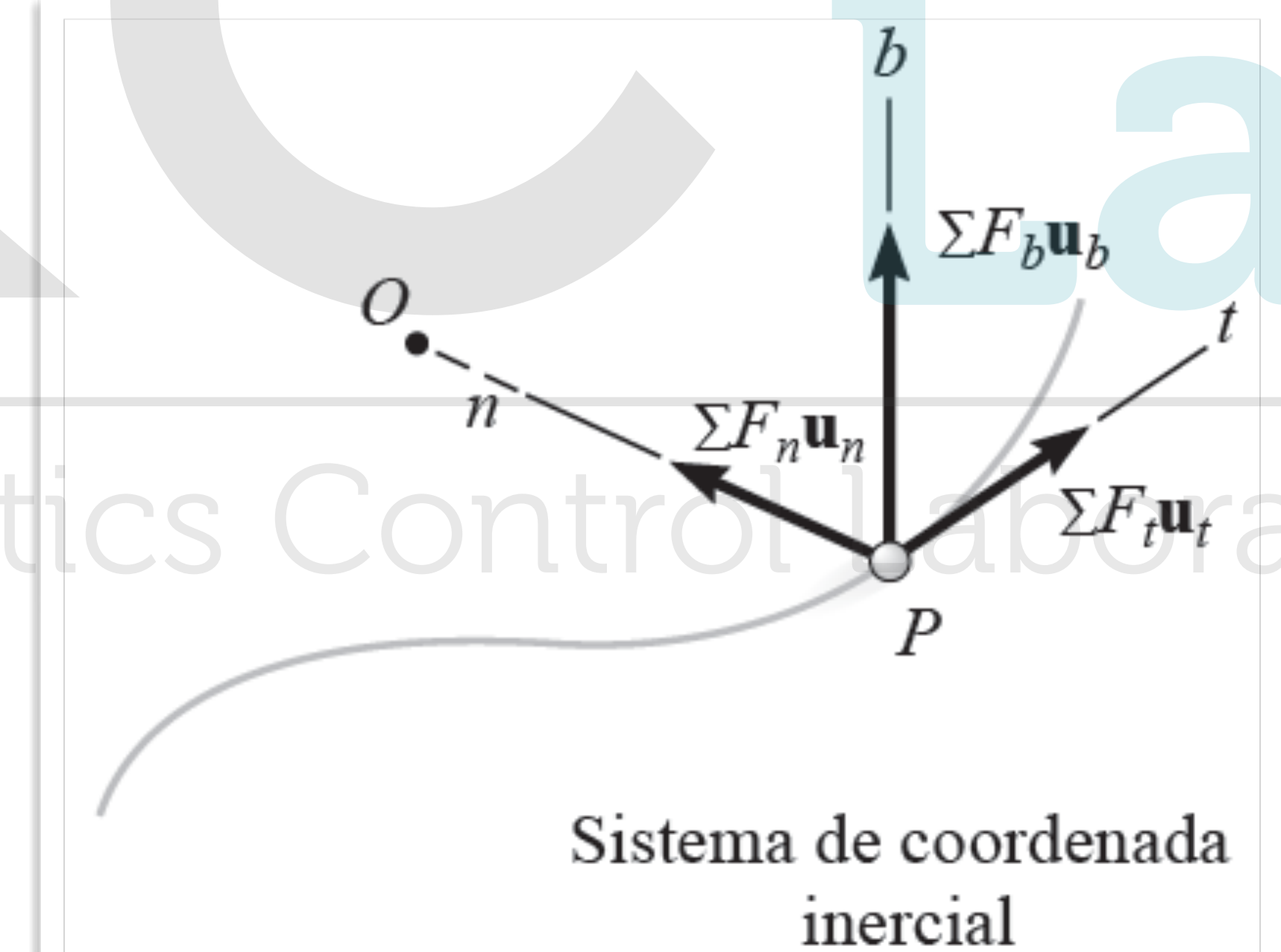
Coordenadas retangulares

movimento retilíneo



Coordenadas normais e tangenciais

movimento curvilíneo

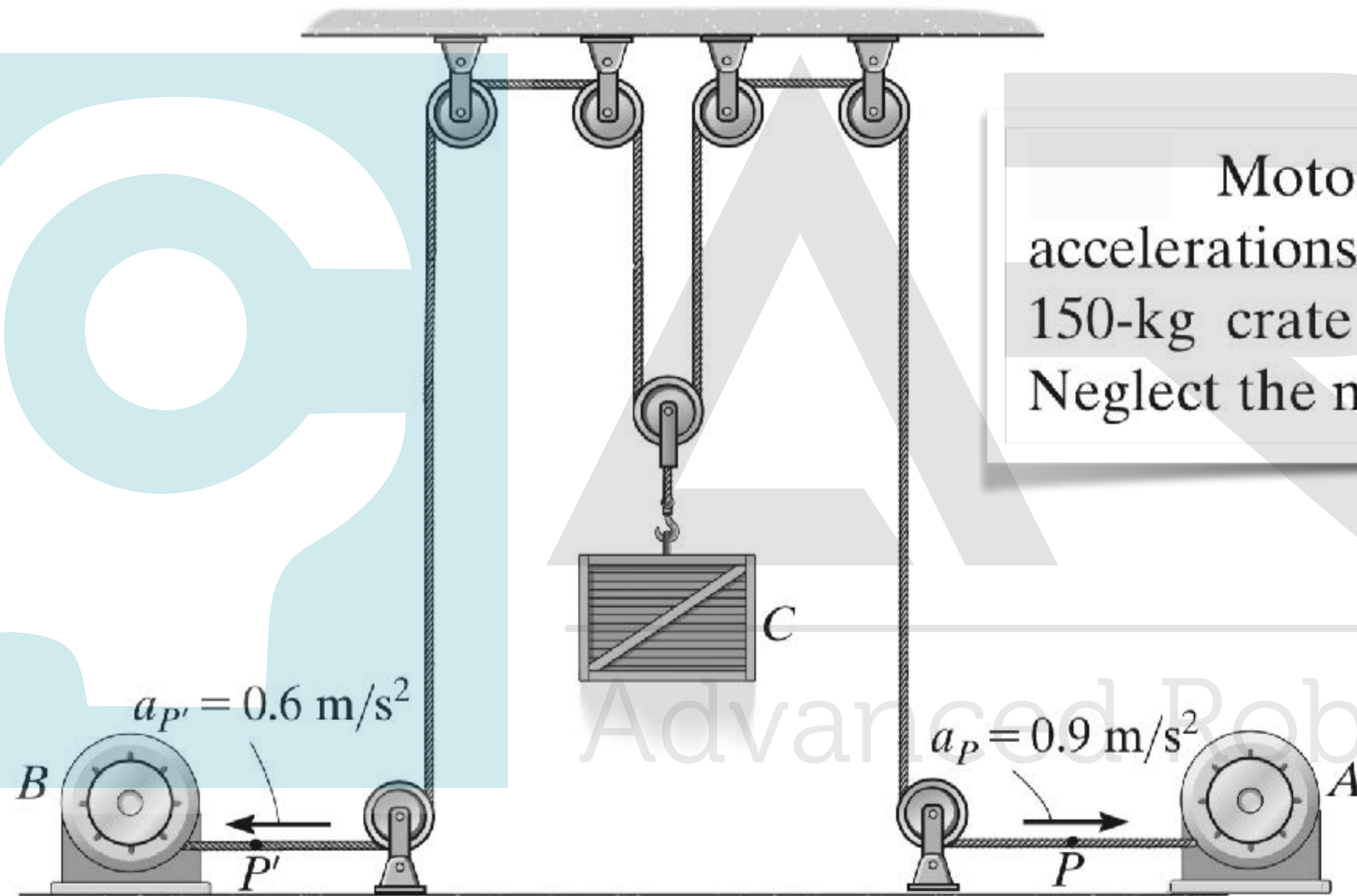


Exercício valendo nota



lab

Advanced Robotics Control Laboratory

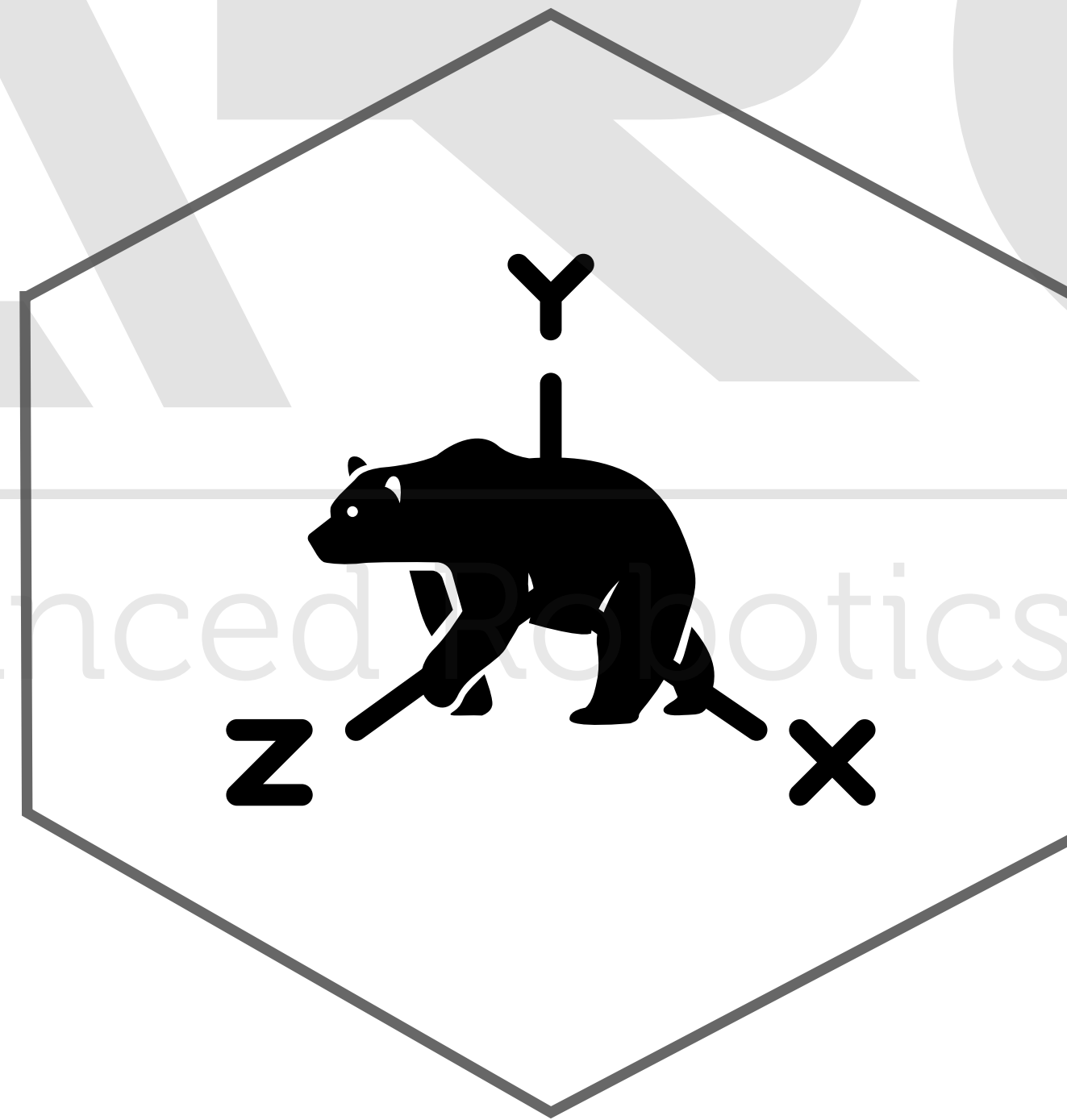


Motors A and B draw in the cable with the accelerations shown. Determine the acceleration of the 150-kg crate C and the tension developed in the cable. Neglect the mass of all the pulleys.

Hoje!

Coordenadas polares/cilíndricas (Cap. 13.6)

movimento angular e radial



Hoje!



Definir **momento**
de inércia

(Cap. 17.1)

Conteúdo



- Equações de movimento
- Exemplo

Coordenadas
cilíndricas



- Definição e exemplos
- Propriedades

Momento
de Inércia



- “Take-home messages”
- Próxima aula

Conclusão

Lab

Advanced Robotics Control Laboratory

Conteúdo



- Equações de movimento
- Exemplo

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

ARC Lab

Advanced Robotics Control Laboratory

Equações de movimento em coordenadas cilíndricas

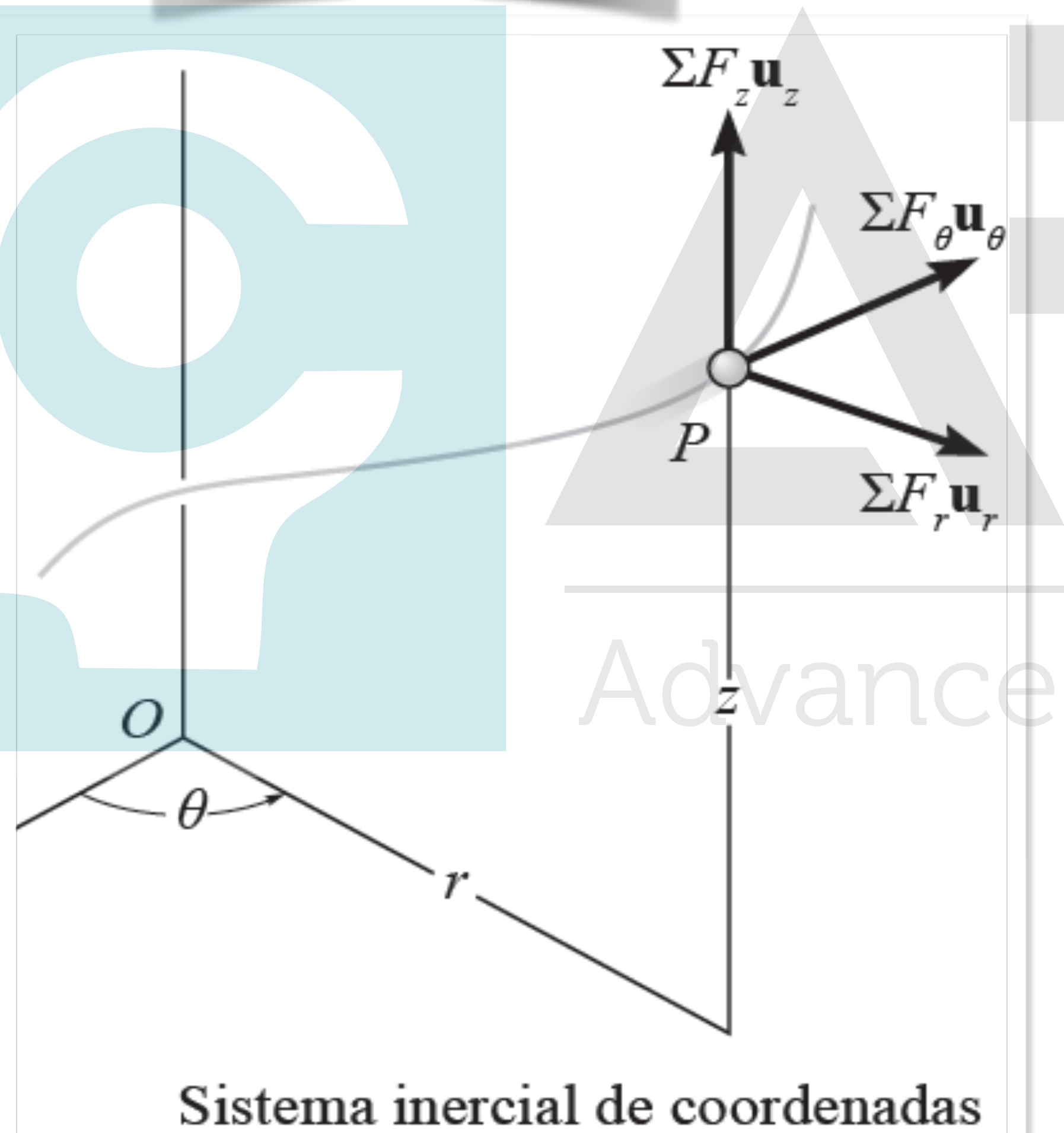
Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\sum F_r \mathbf{u}_r + \sum F_\theta \mathbf{u}_\theta + \sum F_z \mathbf{u}_z = m a_r \mathbf{u}_r + m a_\theta \mathbf{u}_\theta + m a_z \mathbf{u}_z$$



$$\sum F_r = m a_r$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta$$

$$\sum F_z = m a_z$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

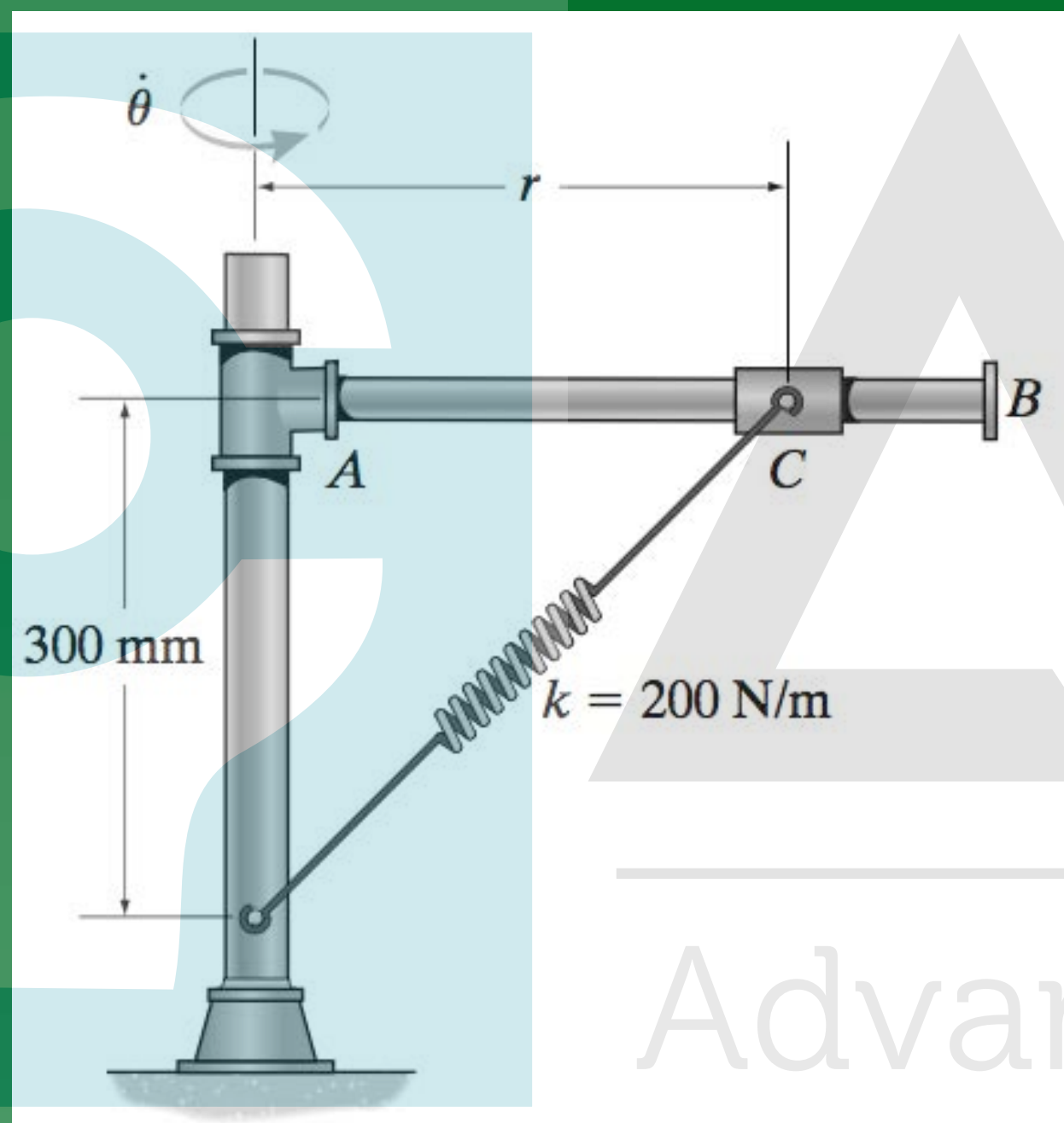
$$a_z = \ddot{z}$$

Problema 13.95

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

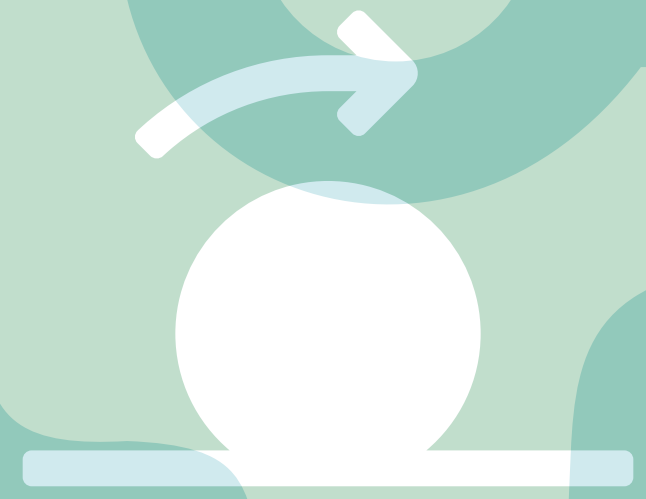


13.95. Um mecanismo está girando em torno do eixo vertical com velocidade angular constante de $\dot{\theta} = 6 \text{ rad/s}$. Se a barra AB é lisa, determine a posição constante r do anel C de 3 kg. A mola tem um comprimento não deformado de 400 mm. Despreze a massa da barra e a dimensão do anel.

Advanced Robotics Control Laboratory

Conteúdo

Coordenadas
cilíndricas



- Definição e exemplos
- Propriedades

Momento
de Inércia

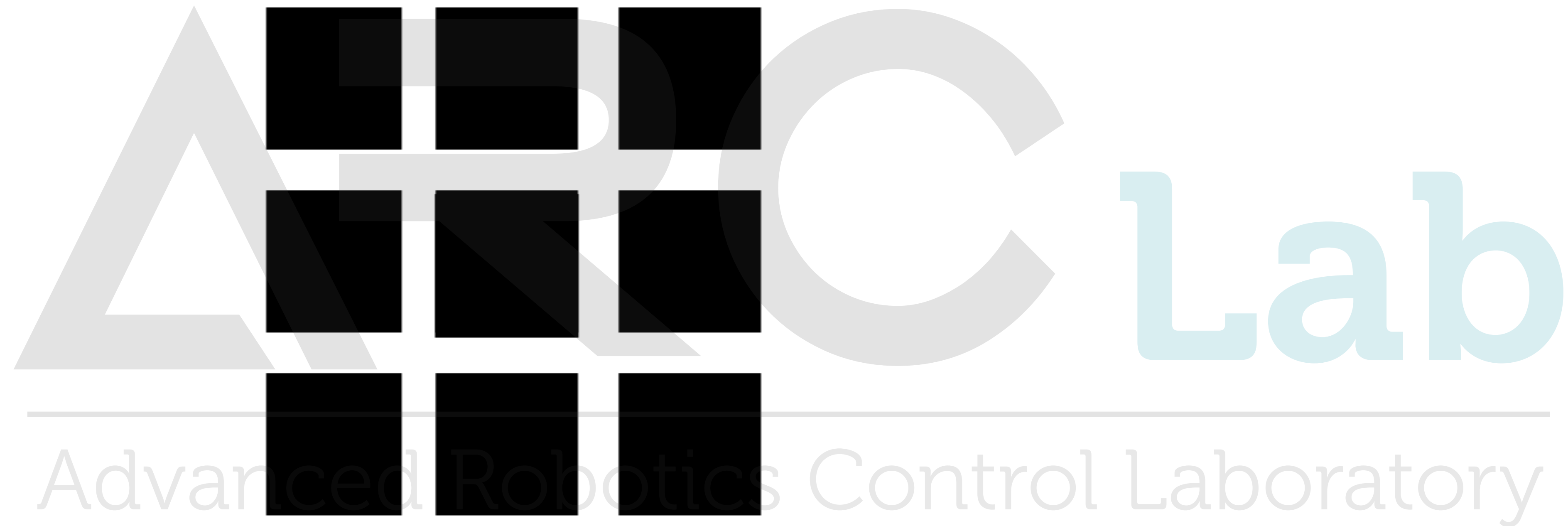
Conclusão

Momento de inércia

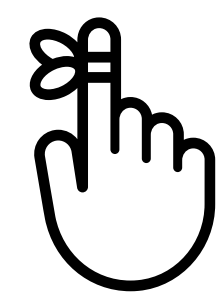
Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



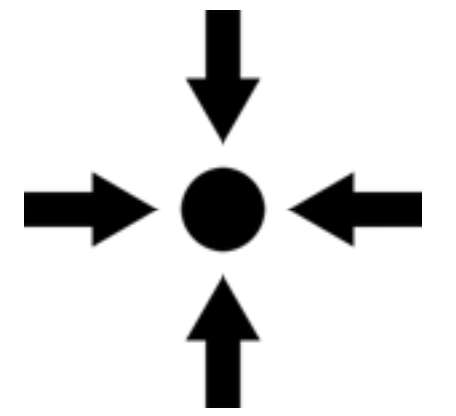
corpo rígido



Momento linear

Também chamado de
Quantidade de
movimento
“Inércia”

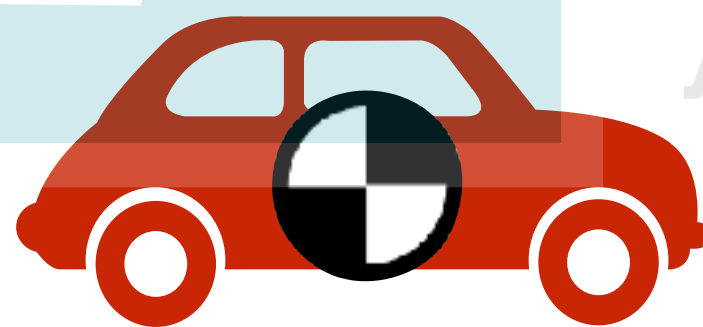
$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$



$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}G$$

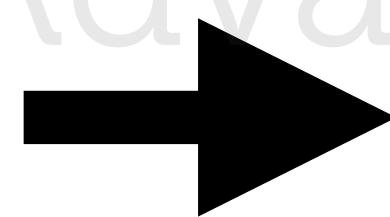


$\mathbf{v}$

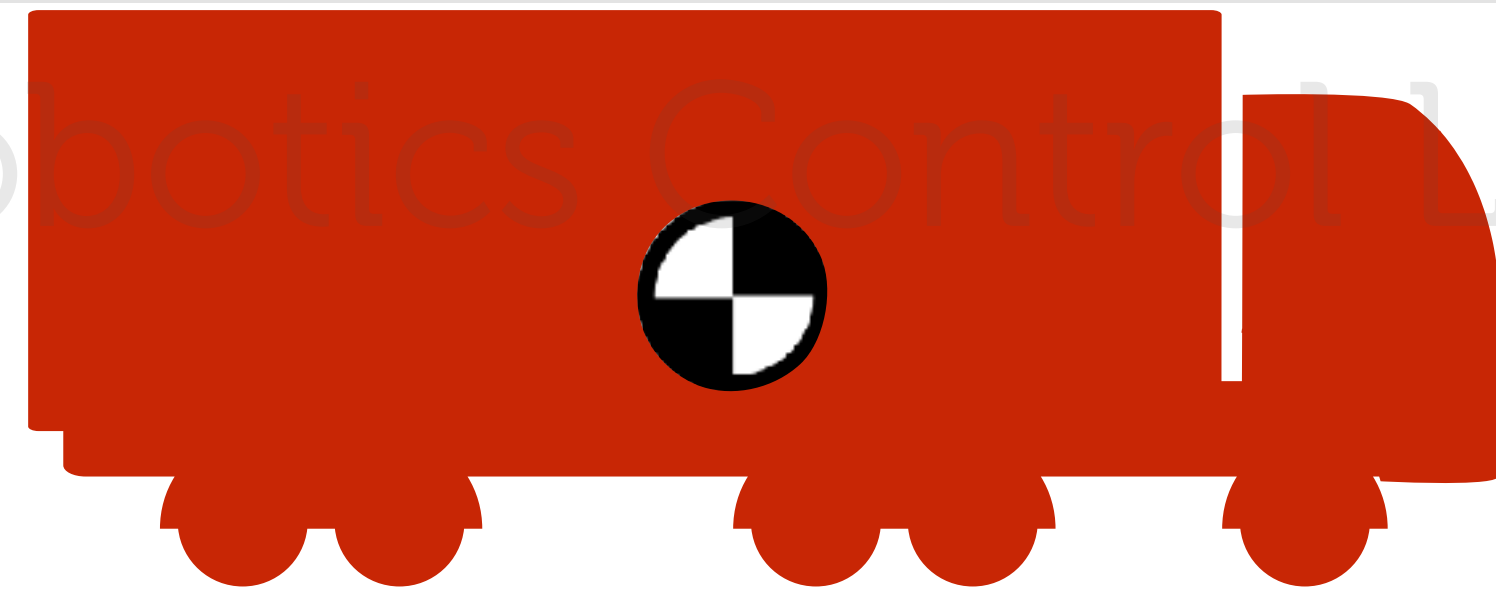


m

$\mathbf{L}$



$\mathbf{v}$



M

$\mathbf{L}$



Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Momento angular

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{v}$$

Momento angular:

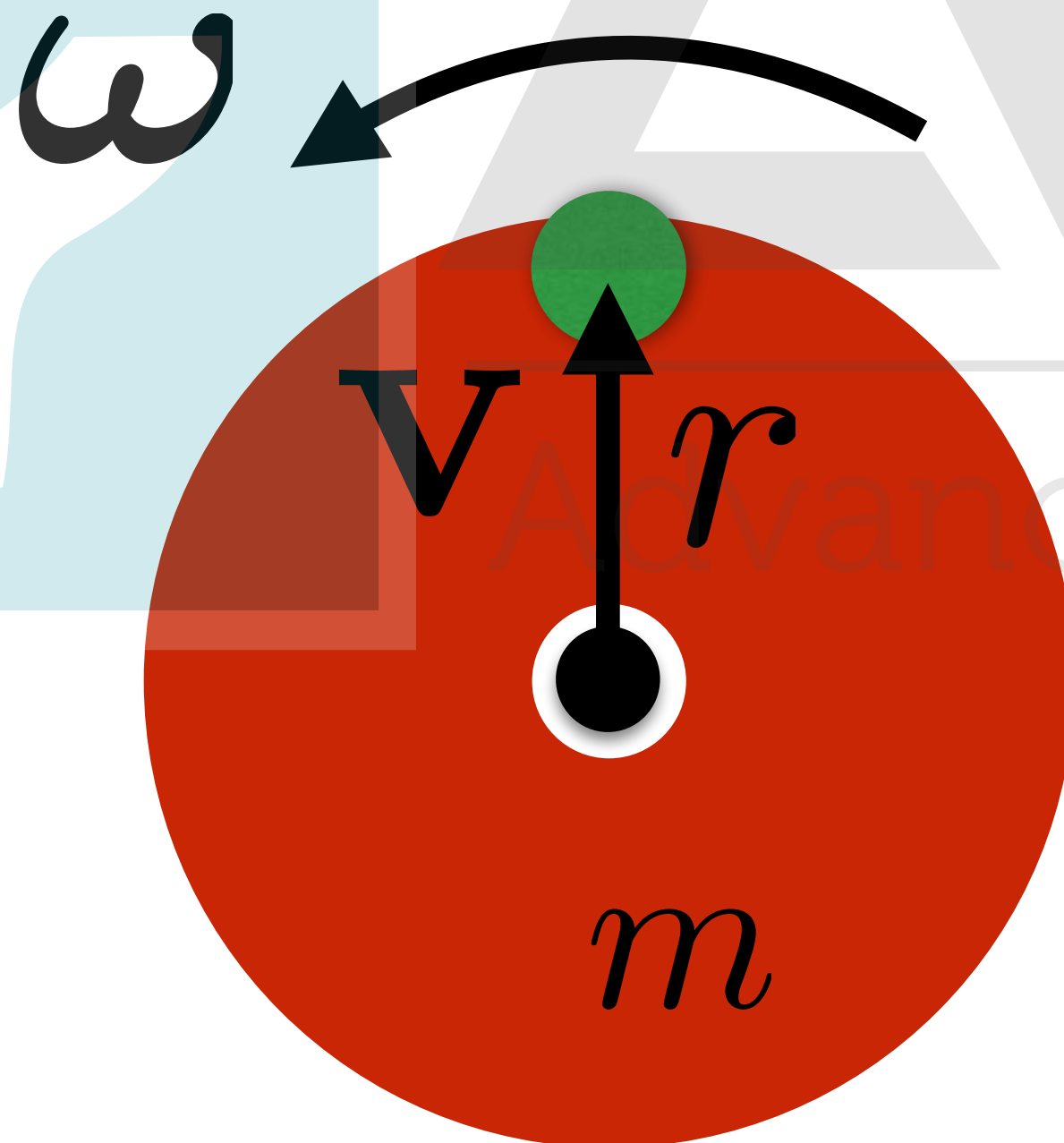
$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) m_i$$

$$H_i = \omega r_i^2 m_i$$



Momento angular

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{v}$$

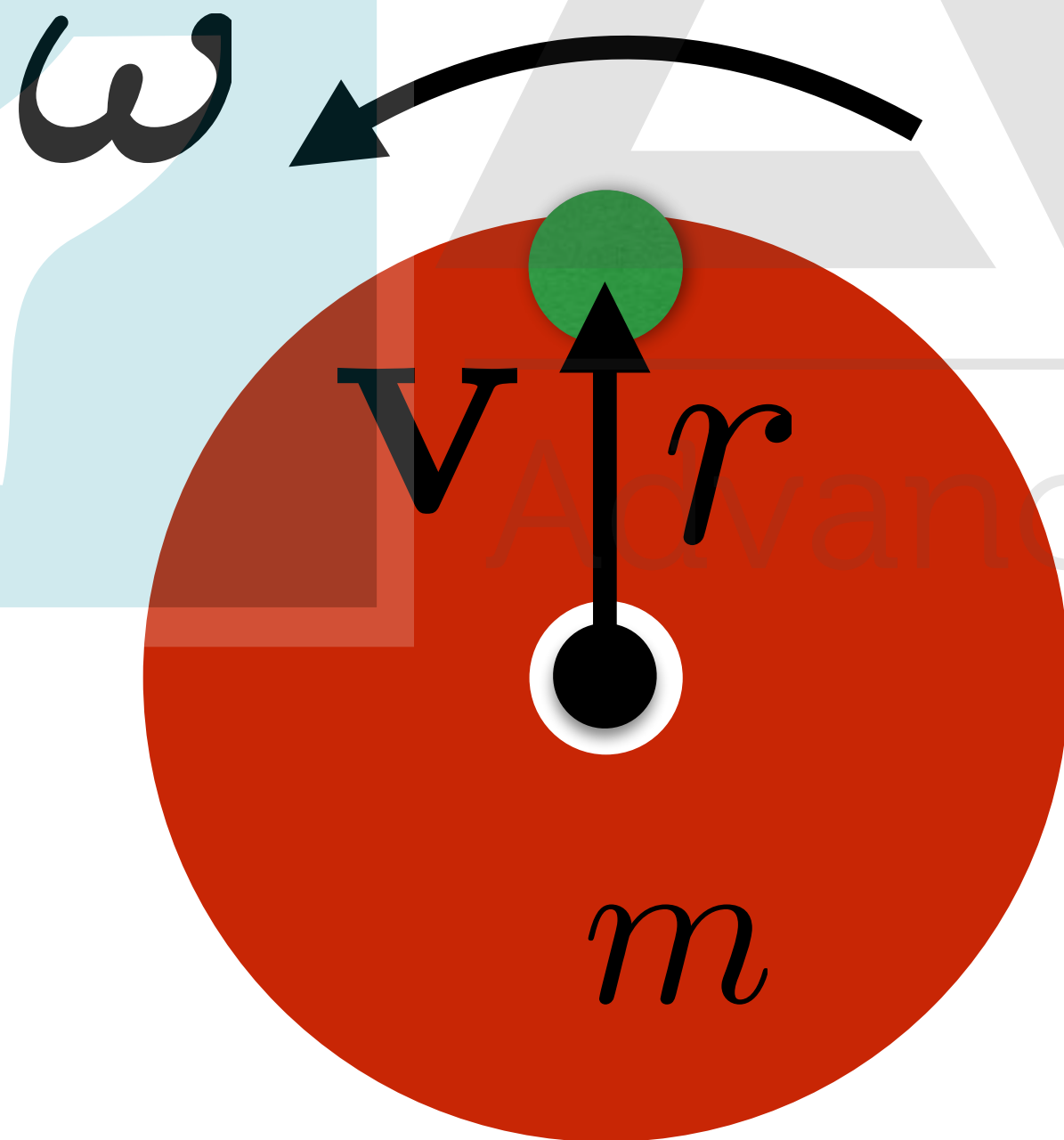
Momento angular:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$H_i = \omega r_i^2 m_i$$

$$H = \omega \underbrace{\sum_{i=1}^N r_i^2 m_i}_{\text{momento de inércia}}$$

momento de inércia ***I***



Momento de inércia

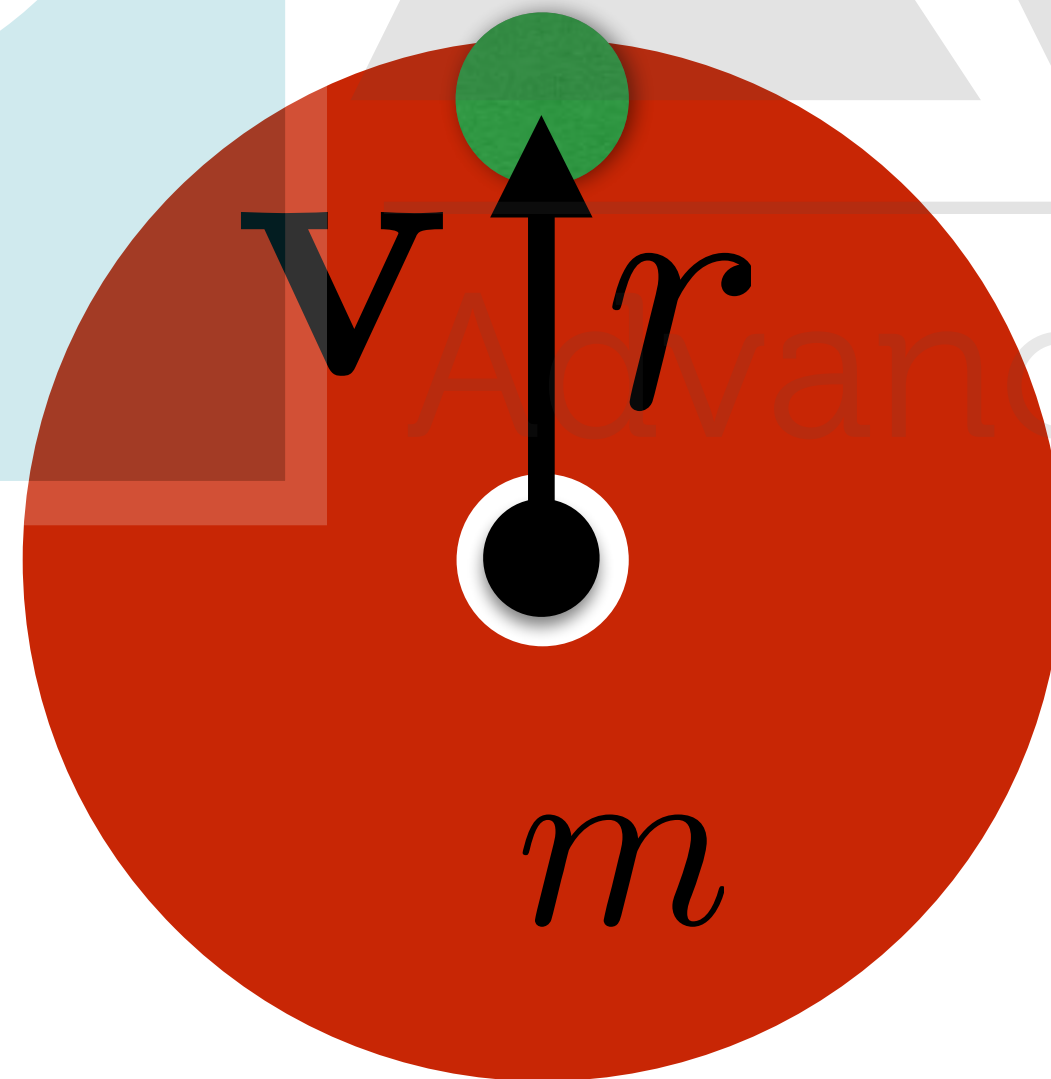
Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$

Momento angular:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

ω



$$\mathbf{H} = I\omega$$

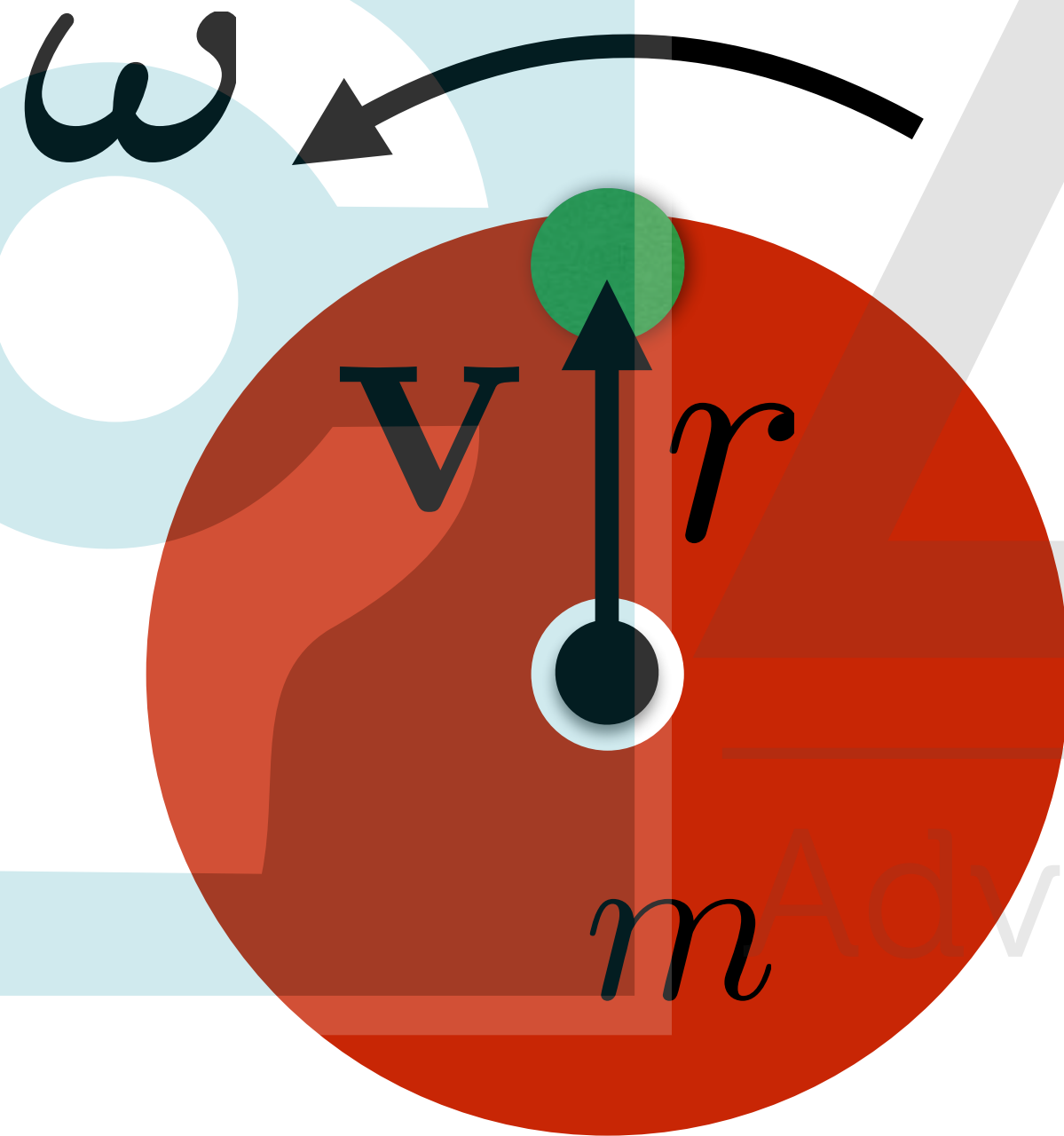
medida da resistência
de um corpo a uma
aceleração angular

Momento de inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



$$\mathbf{H} = I\omega$$

$$I = \sum_{i=1}^N r_i^2 m_i$$

$$I = \int_m r^2 dm$$



Momento de inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

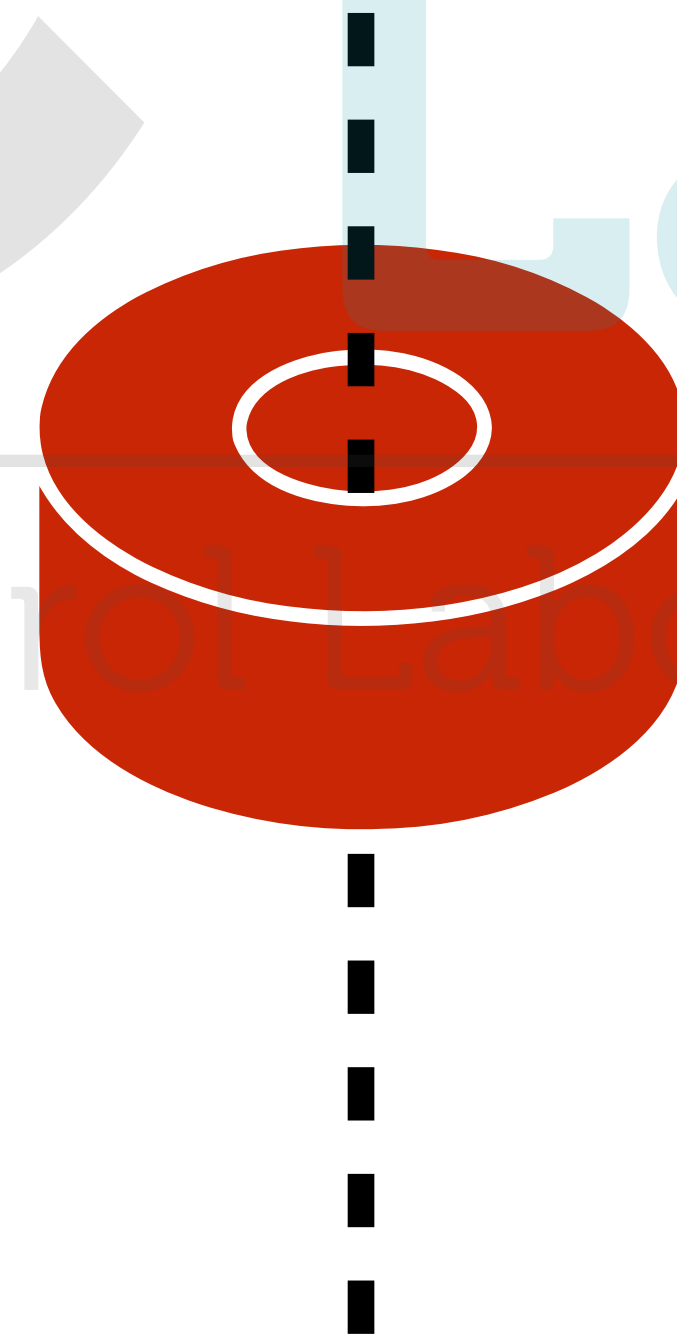
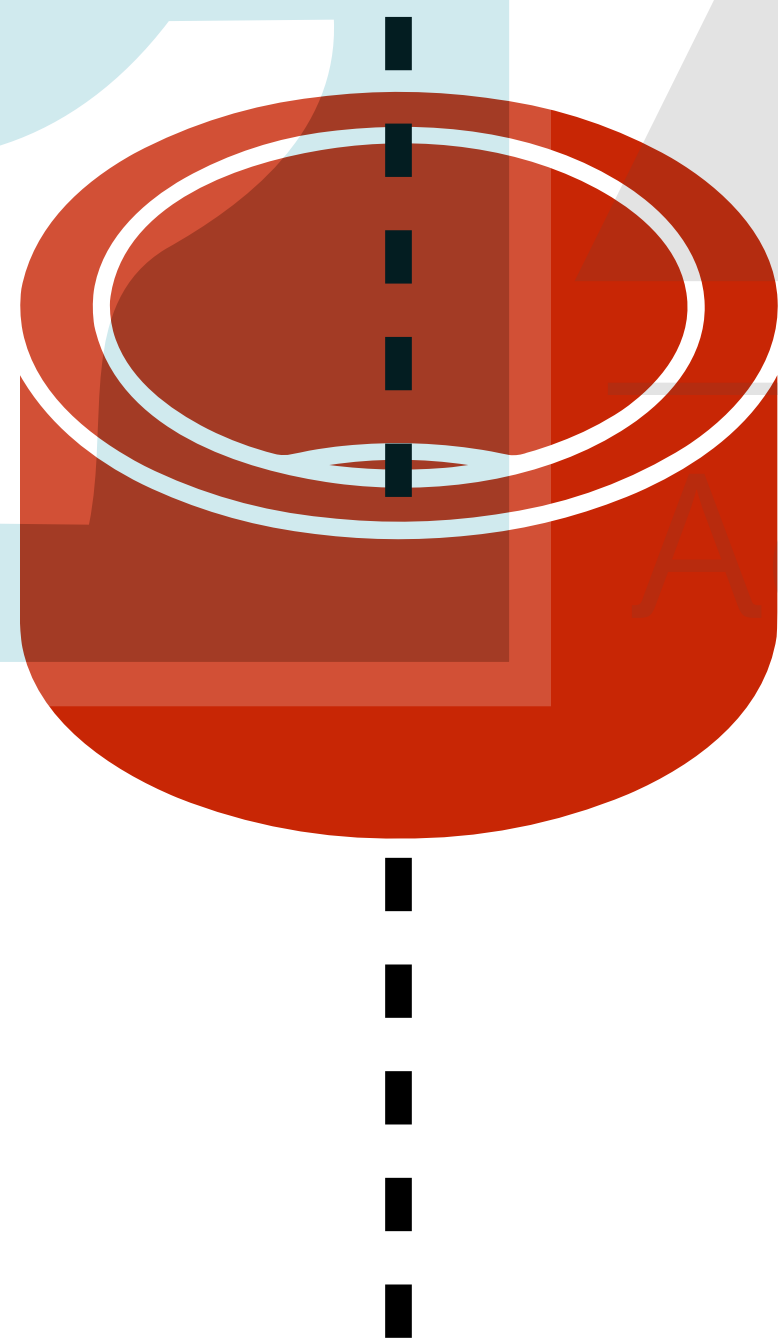
depende da:

distância do eixo de rotação

$$I = \int_m r^2 dm$$

$$m_1 = m_2$$

$$I_1 > I_2$$



Momento de inércia

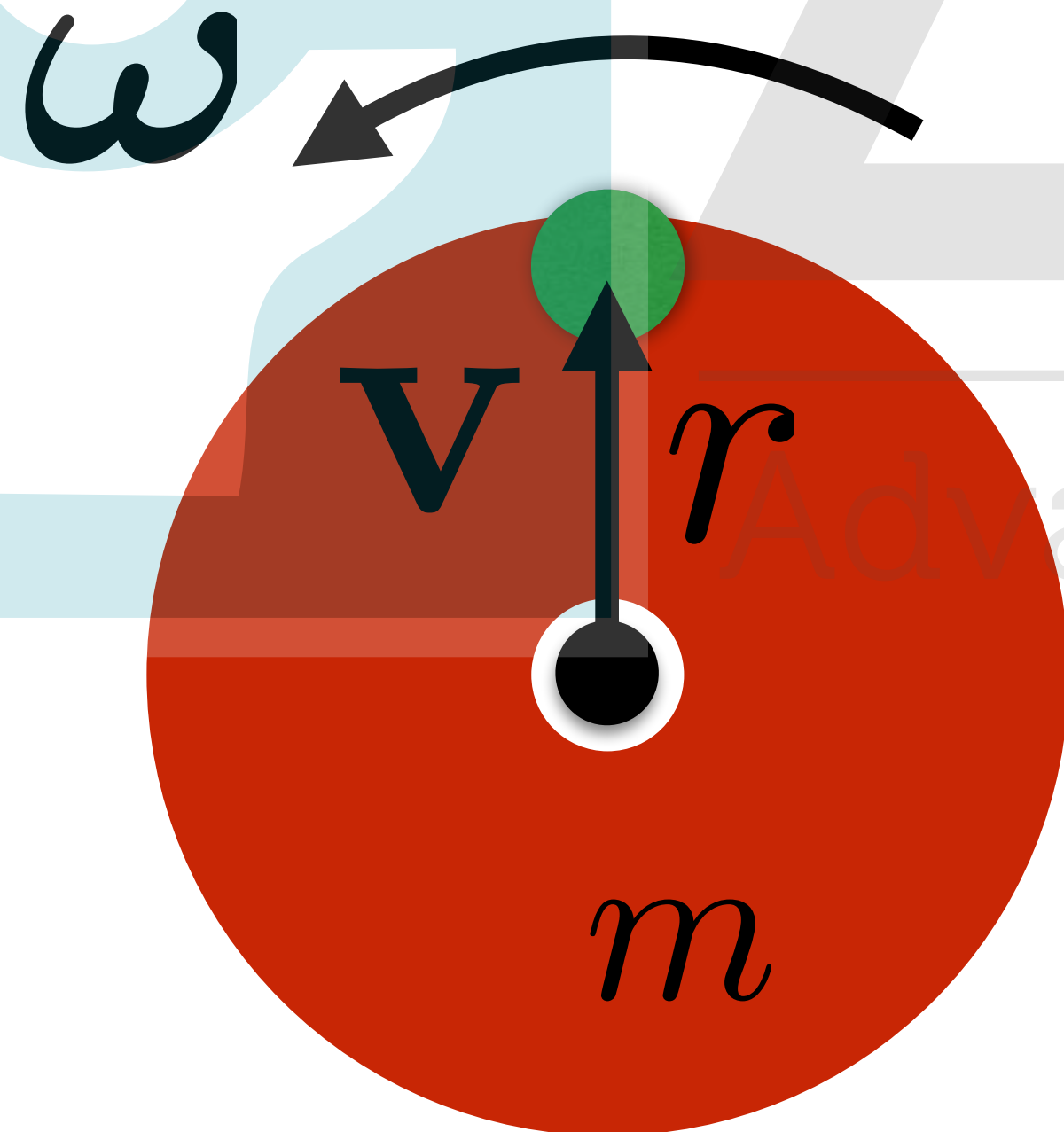
Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

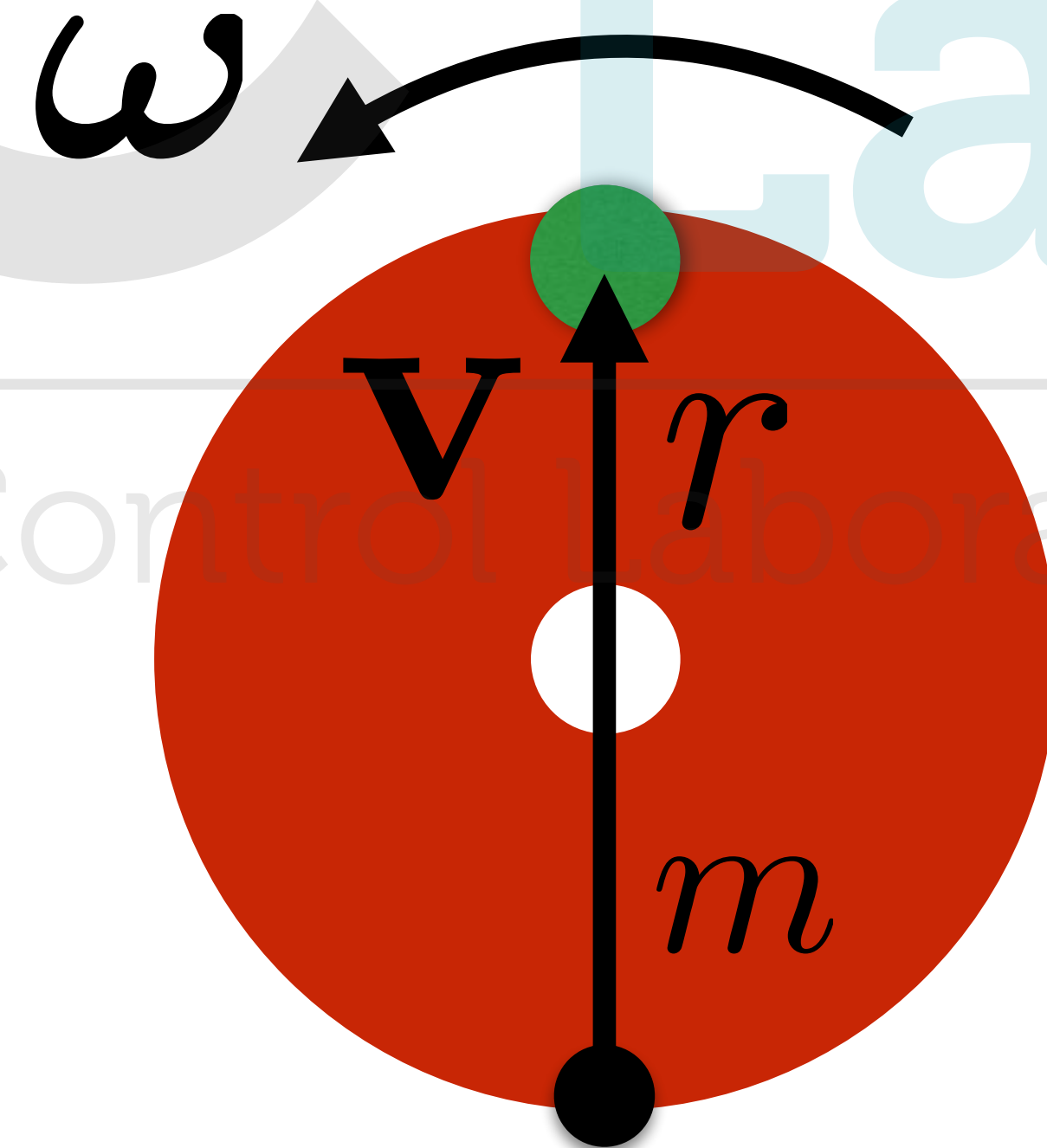
Conclusão

depende do:
eixo de rotação

$$I = \int_m r^2 dm$$



$$I_1 < I_2$$



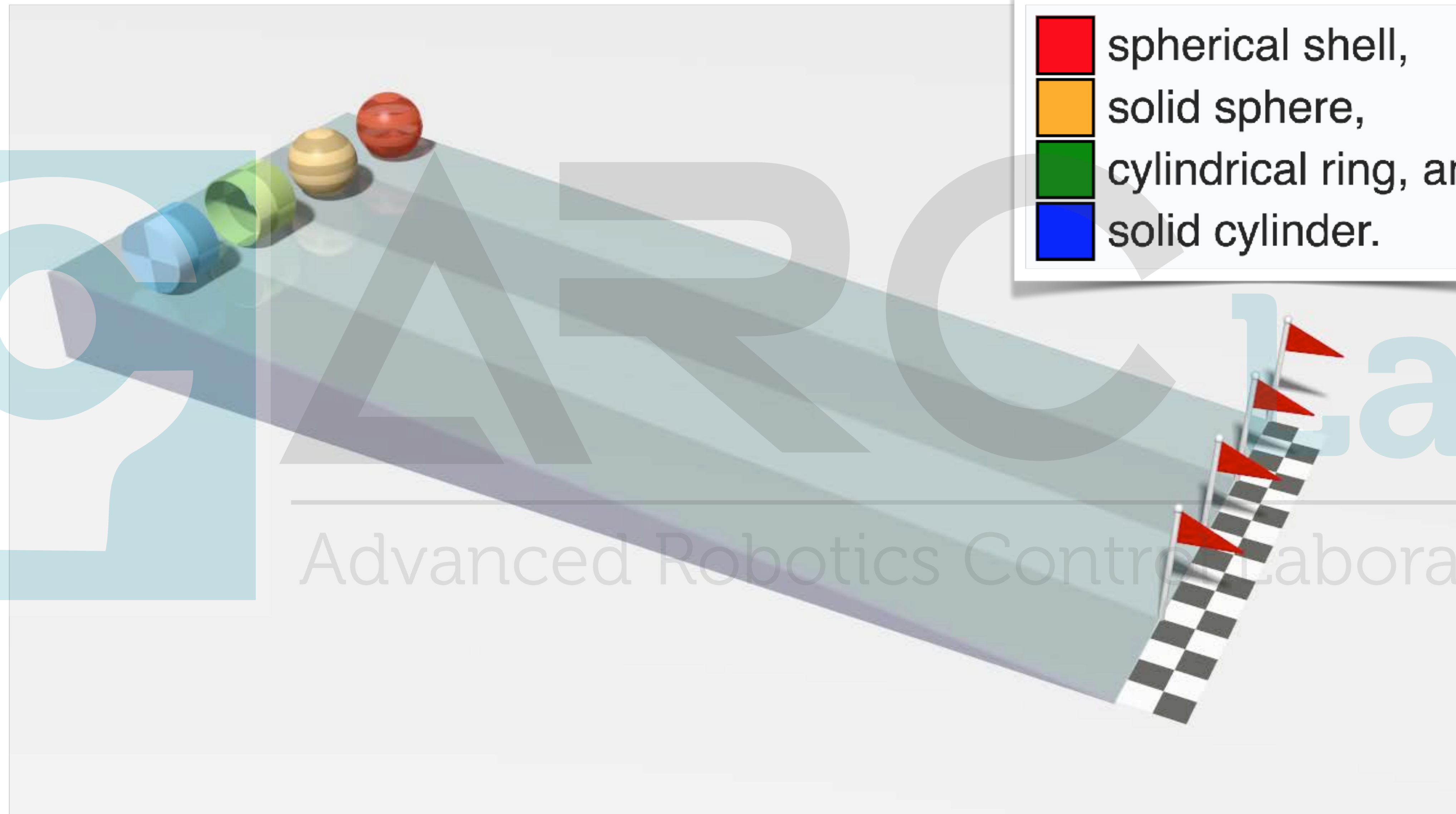
Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

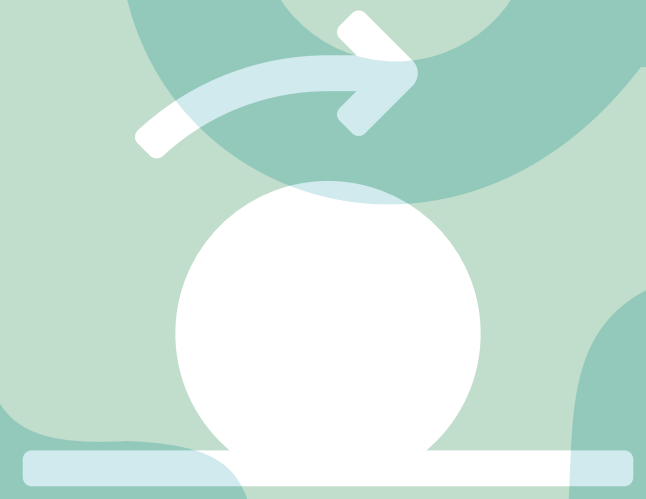
Conclusão

-  spherical shell,
-  solid sphere,
-  cylindrical ring, and
-  solid cylinder.



Conteúdo

Coordenadas
cilíndricas



- Definição e exemplos
- **Propriedades**

Momento
de Inércia

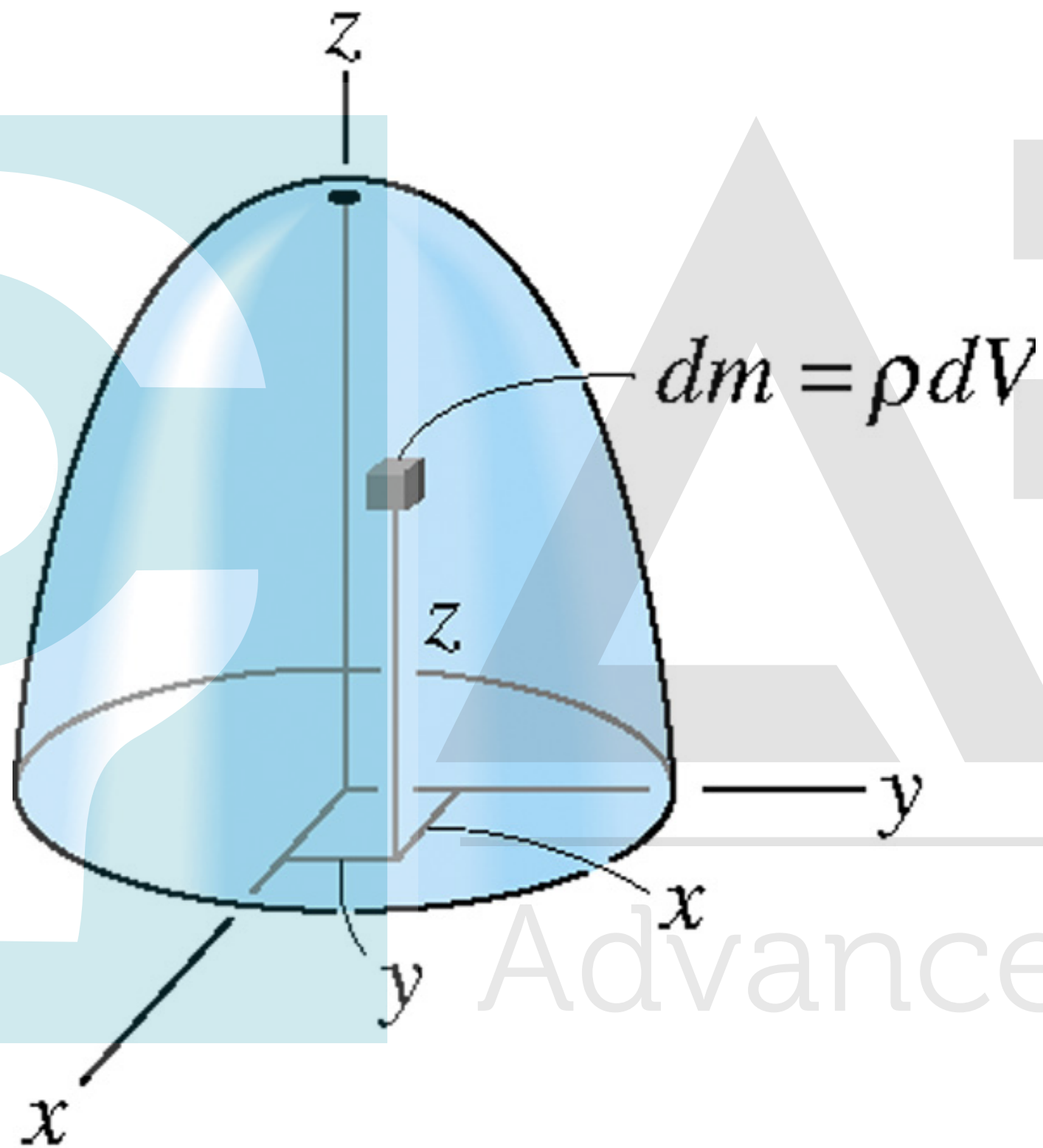
Conclusão

Momento de inércia em função da densidade

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



$$I = \int_m r^2 dm$$

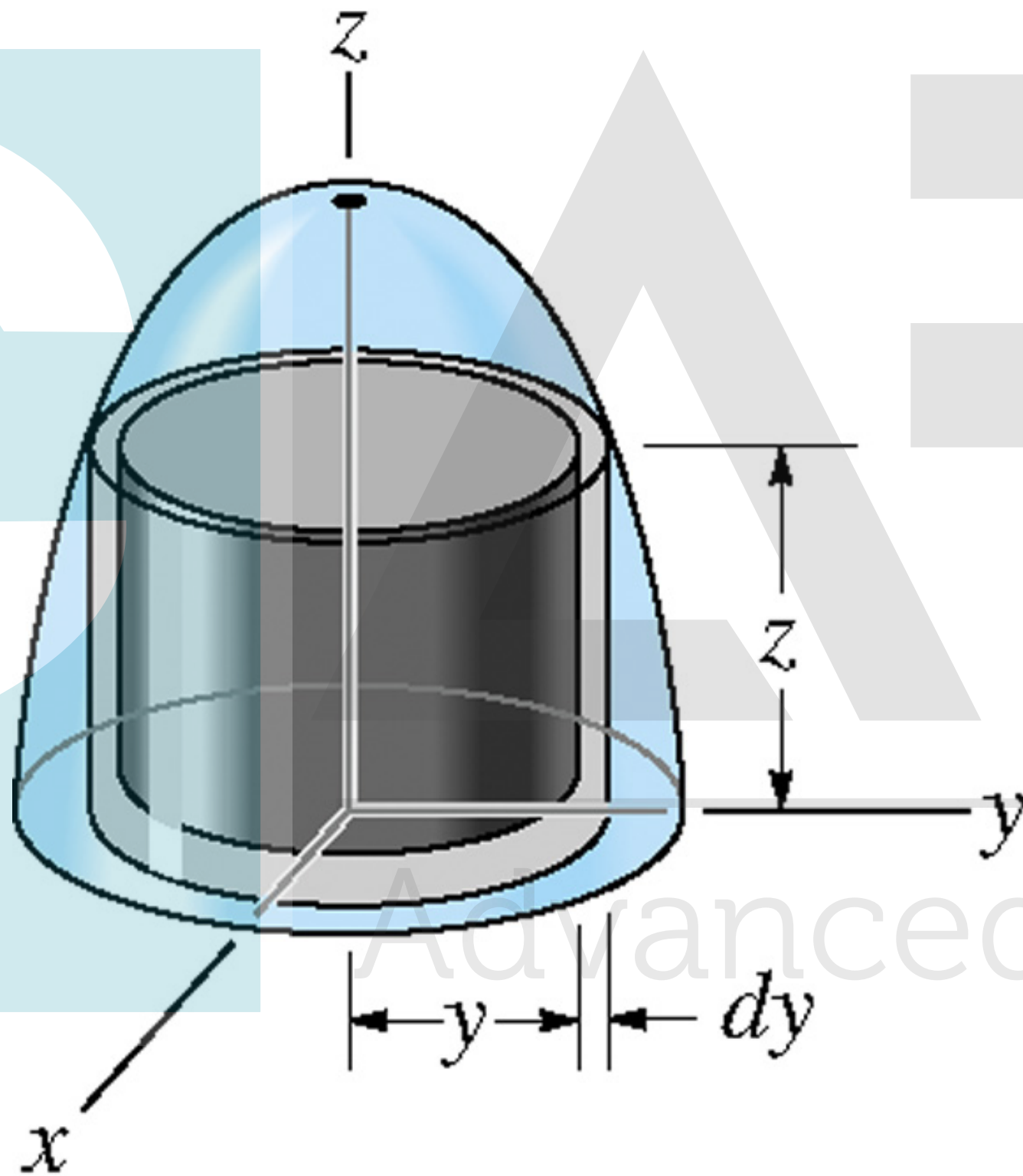
$$I = \int_v r^2 \rho dv$$

$$I = \rho_c \int_v r^2 dv$$

Elemento de casca

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia



$$dV = (2\pi y)(z)dy$$

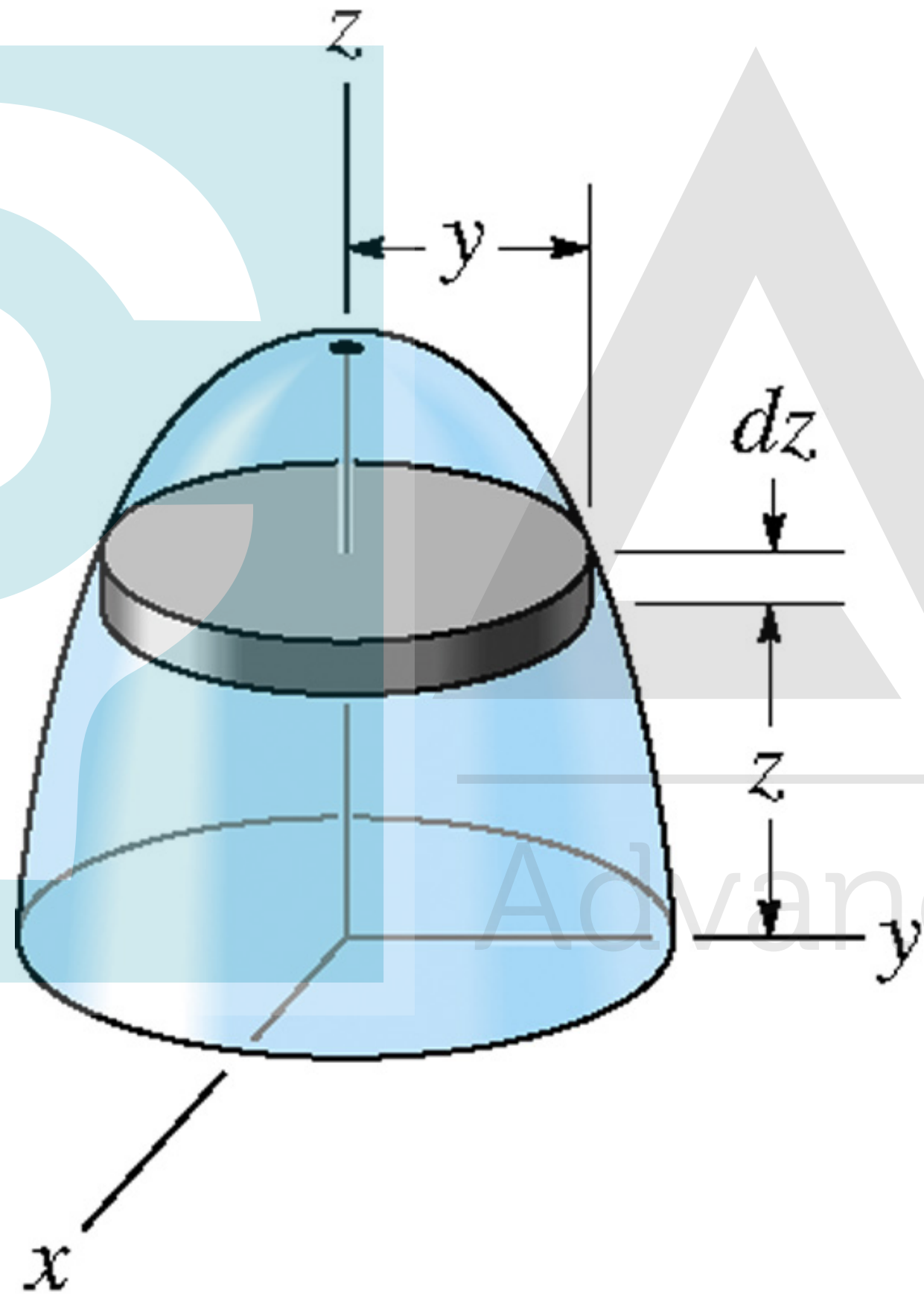
Conclusão

Elemento de disco

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

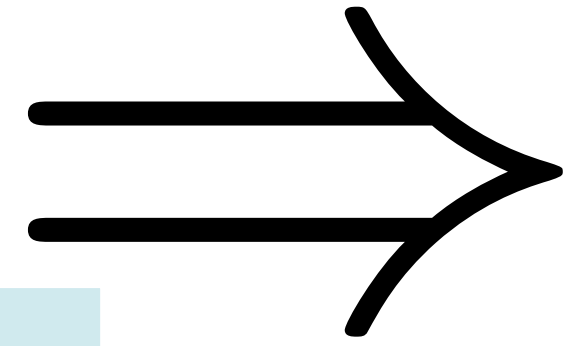
Conclusão



$$dV = (\pi y^2) dz$$

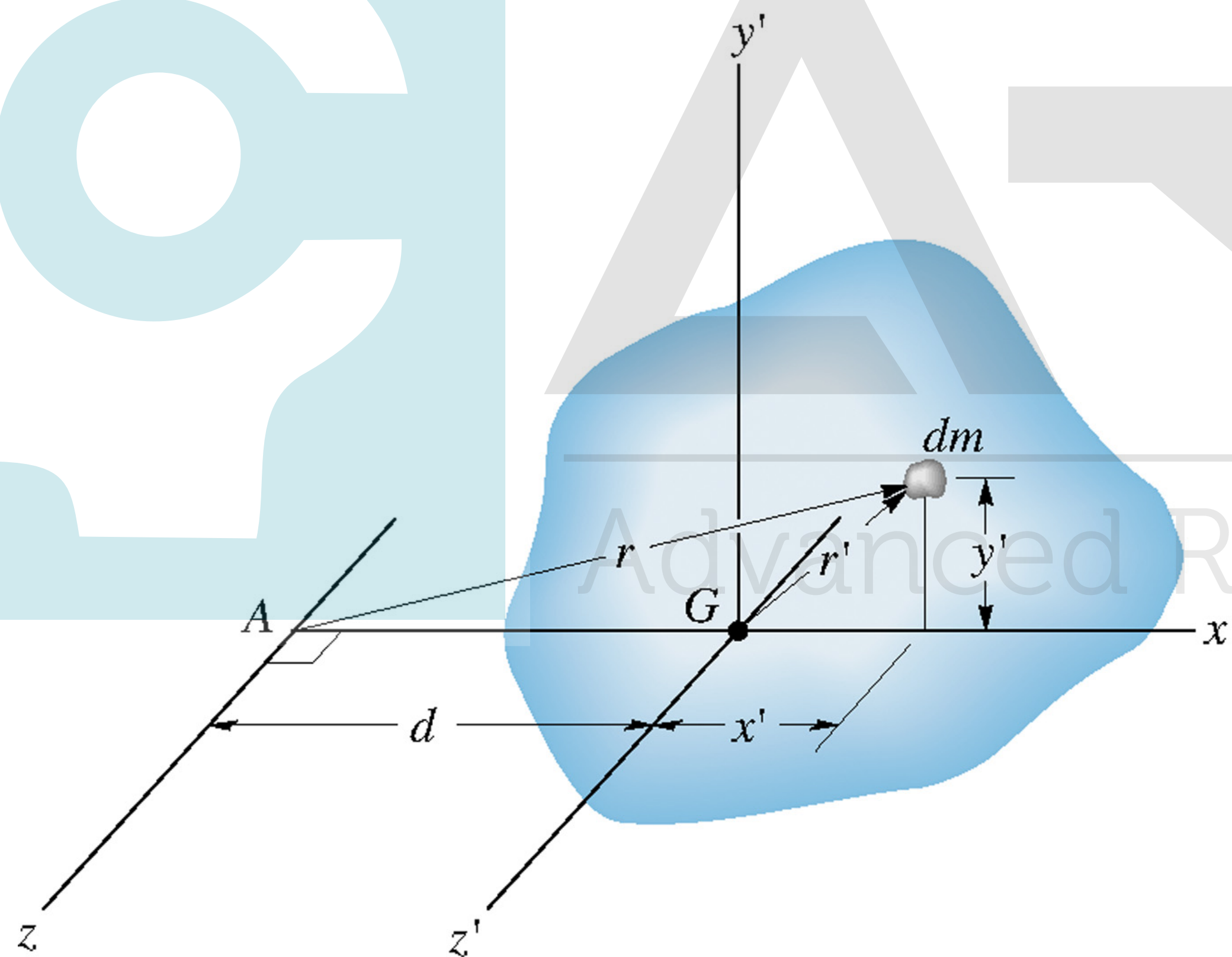
Teorema dos eixos paralelos

I_G



pode-se determinar o momento de inércia em relação a um eixo paralelo

$$I = I_G + md^2$$



Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

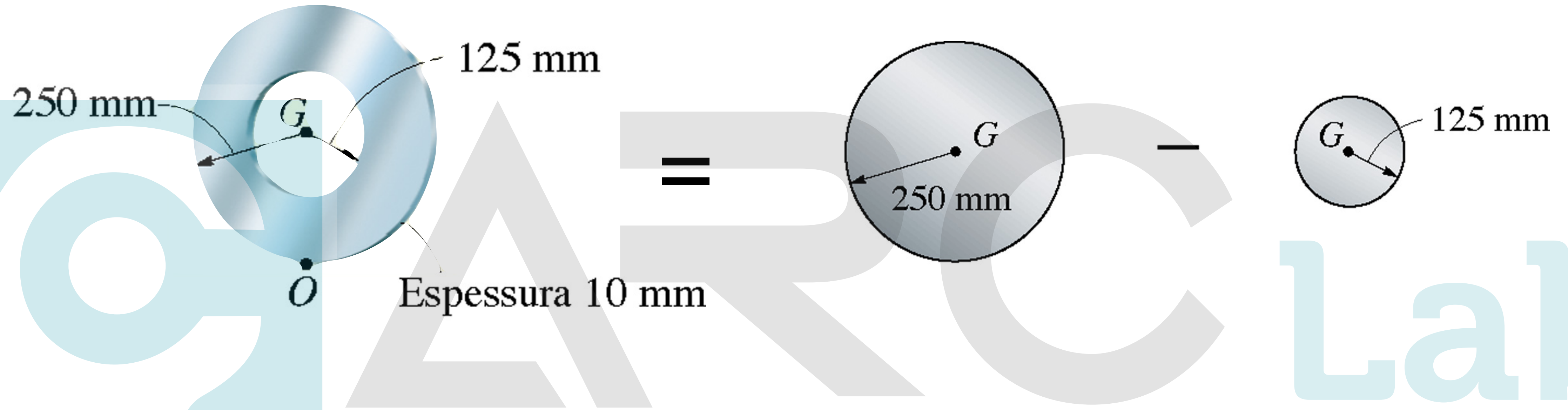
Conclusão

Corpos compostos

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

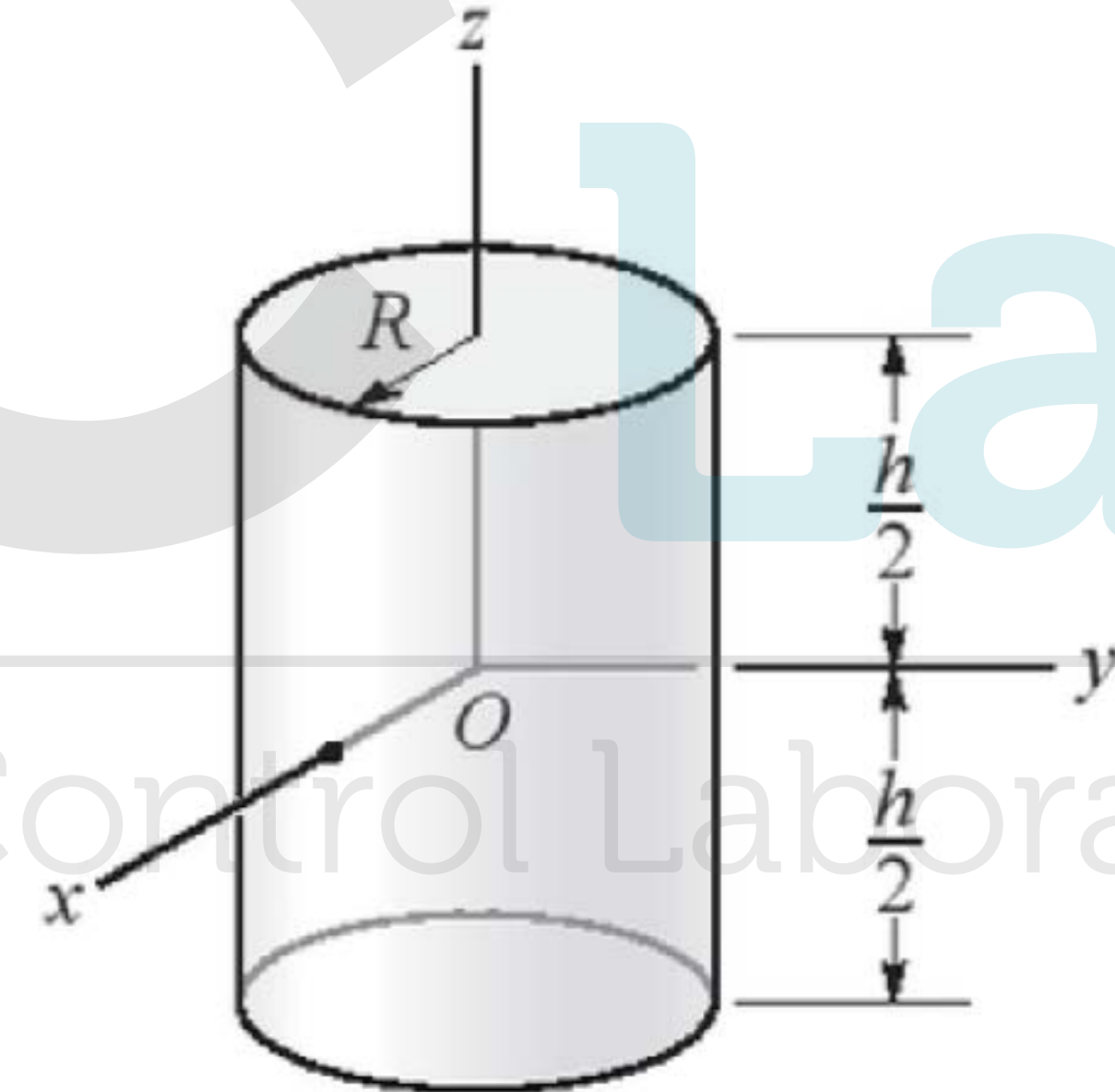
Conclusão



$$I = \sum (I_G + md^2)$$

Exemplo 17.1

Determine o momento de inércia do cilindro mostrado na Figura 17.3a em relação ao eixo z . A densidade do material, ρ , é constante.



Problema 17.1

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

- 17.1.** Determine o momento de inércia I_y para a barra fina. A densidade da barra ρ e a área de seção transversal A são constantes. Expresse o resultado em termos da massa total m da barra.

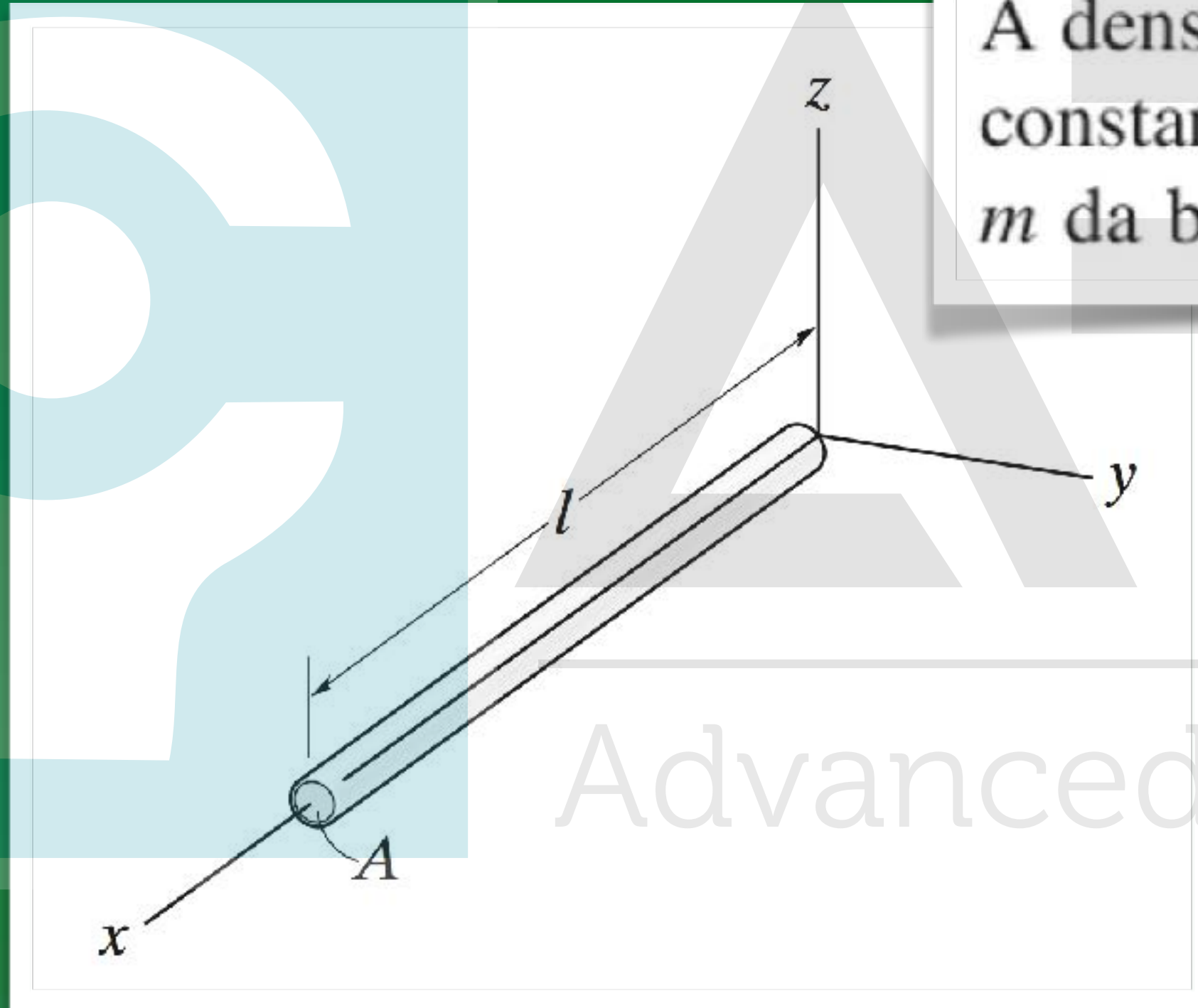


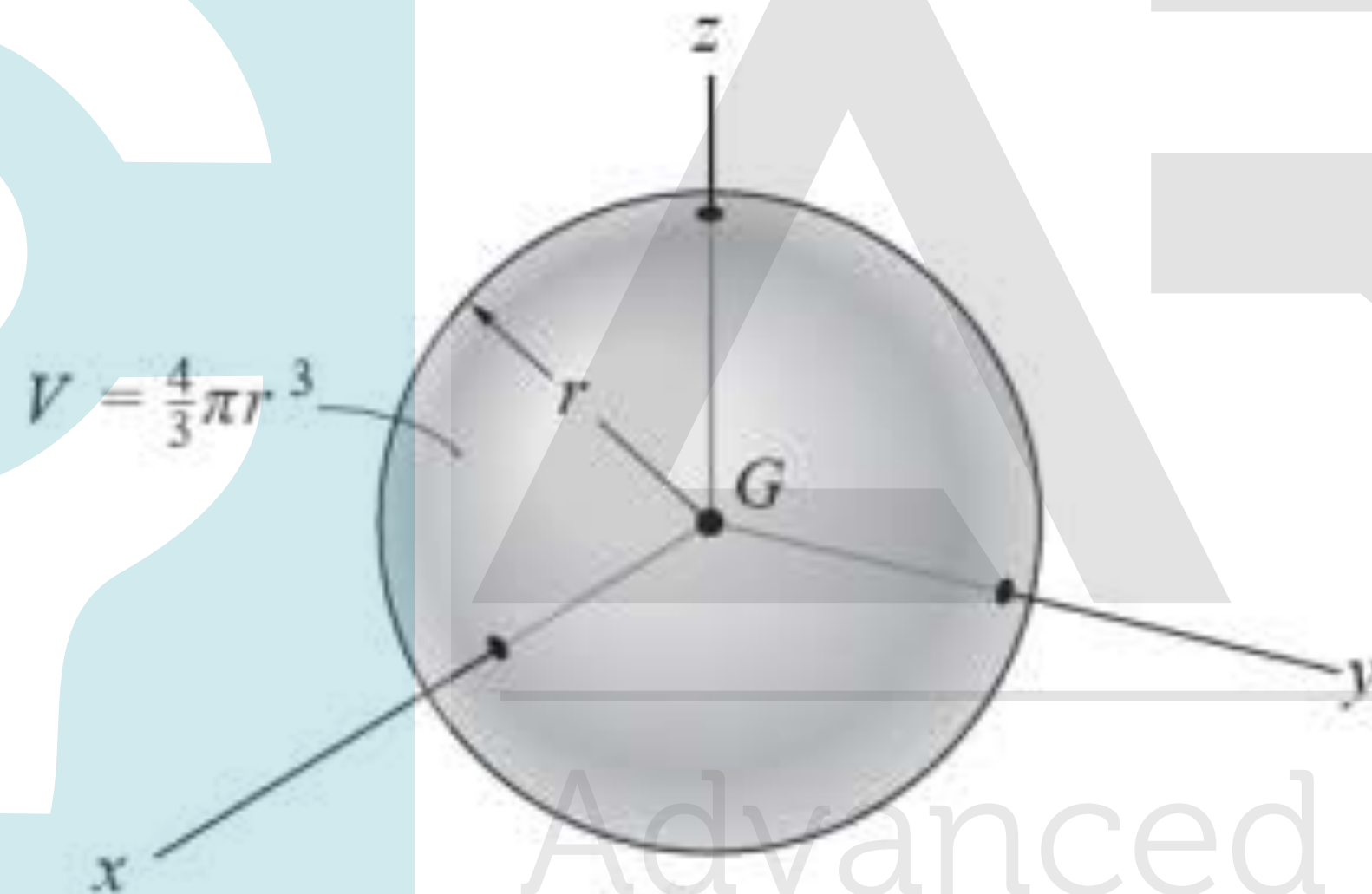
Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

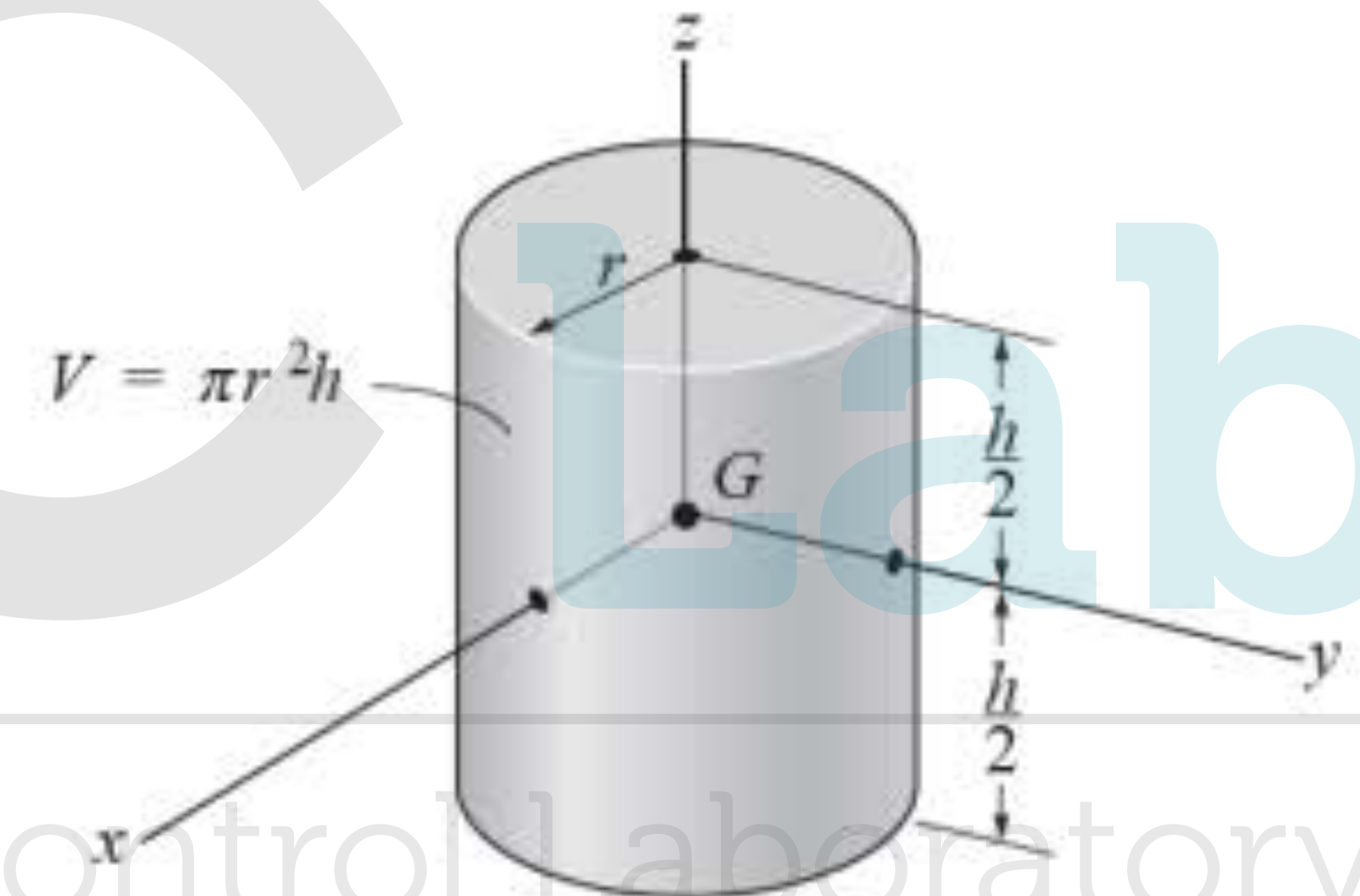
Conclusão

E.5 Centro de Gravidade e Momento de Inércia da Massa de Sólidos Homogêneos



Esfera

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$$



Cilindro

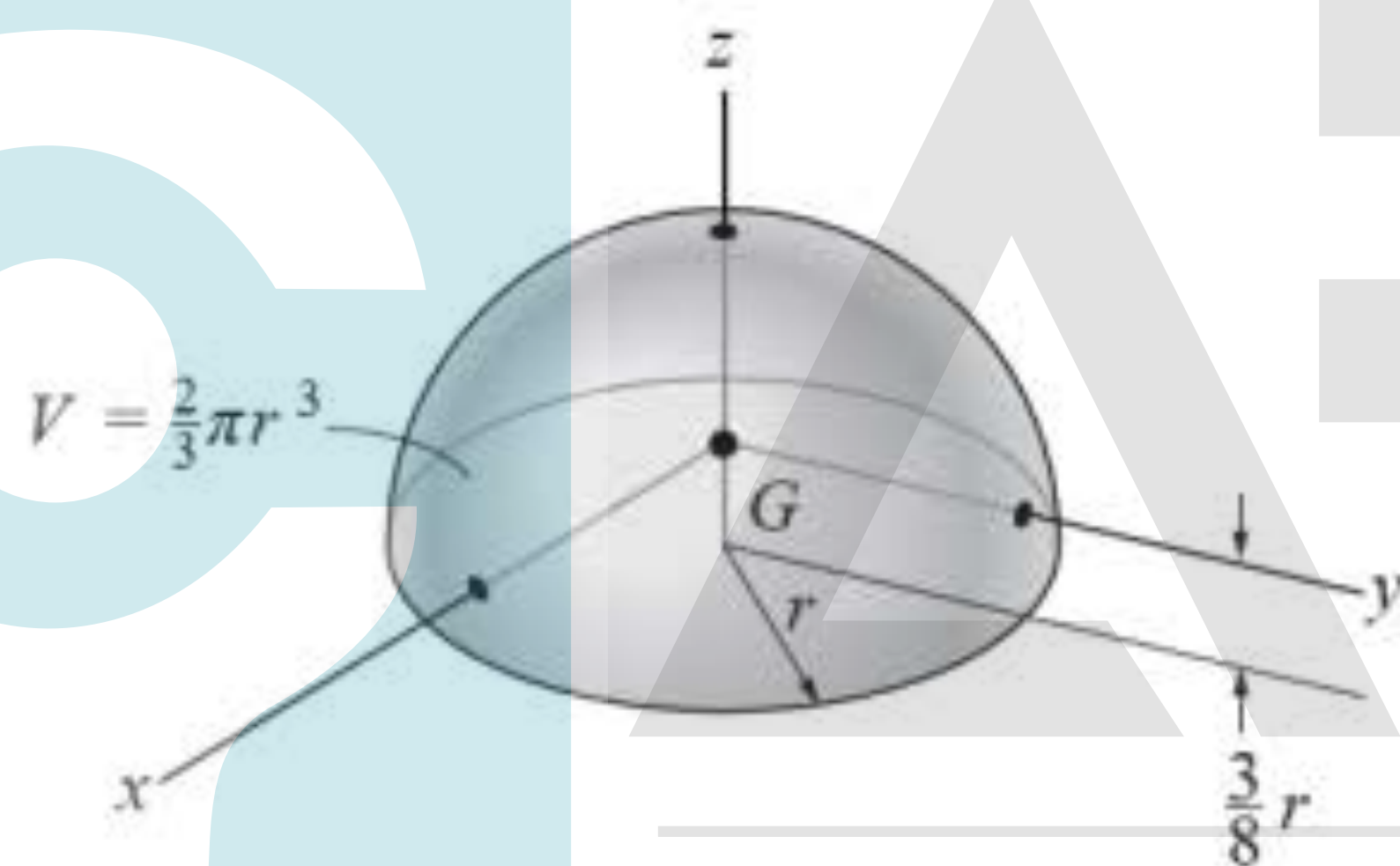
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m(3r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2} mr^2$$

Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

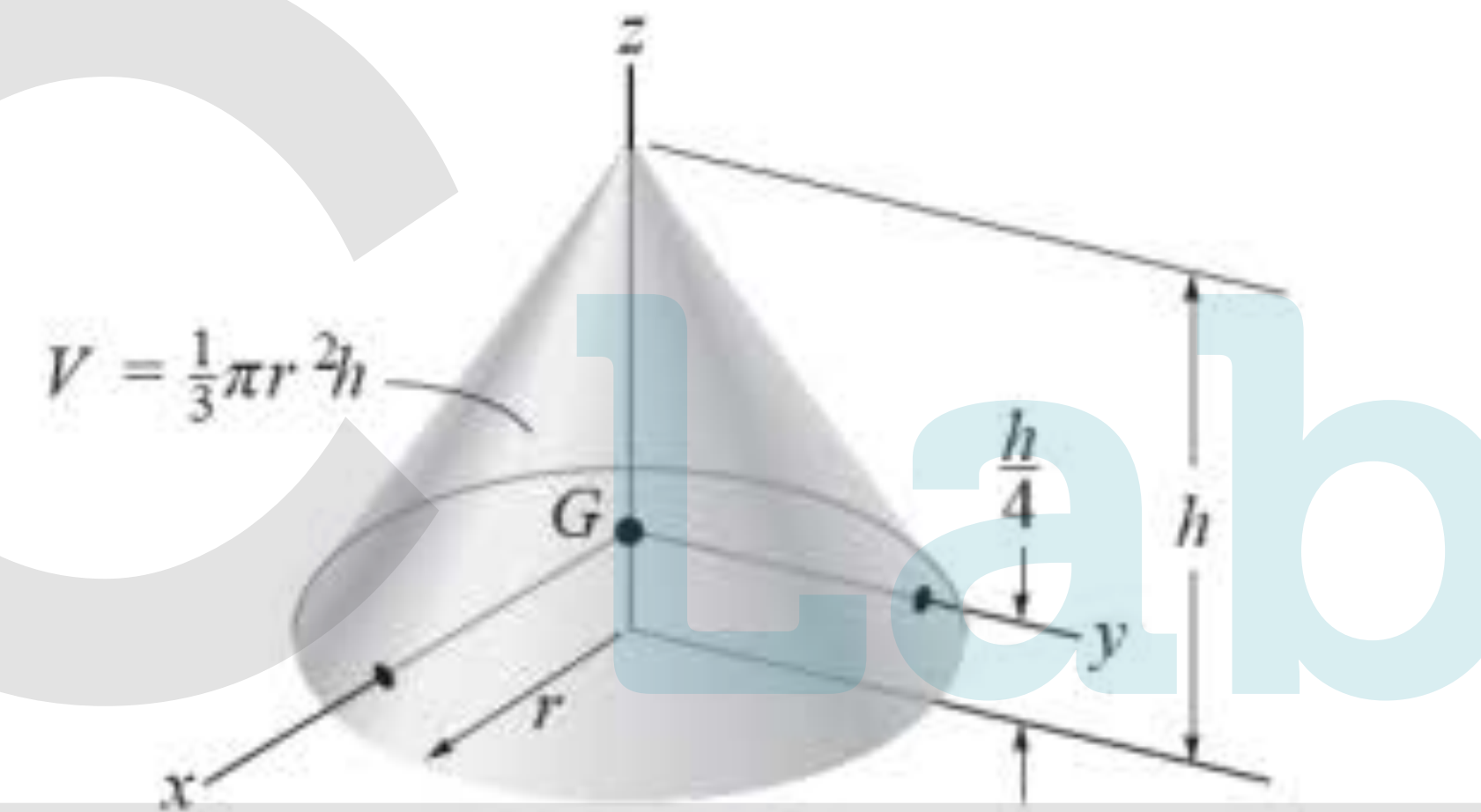
Momento
de Inércia

Conclusão



Hemisfério

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.259mr^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$$



Cone

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$$

Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

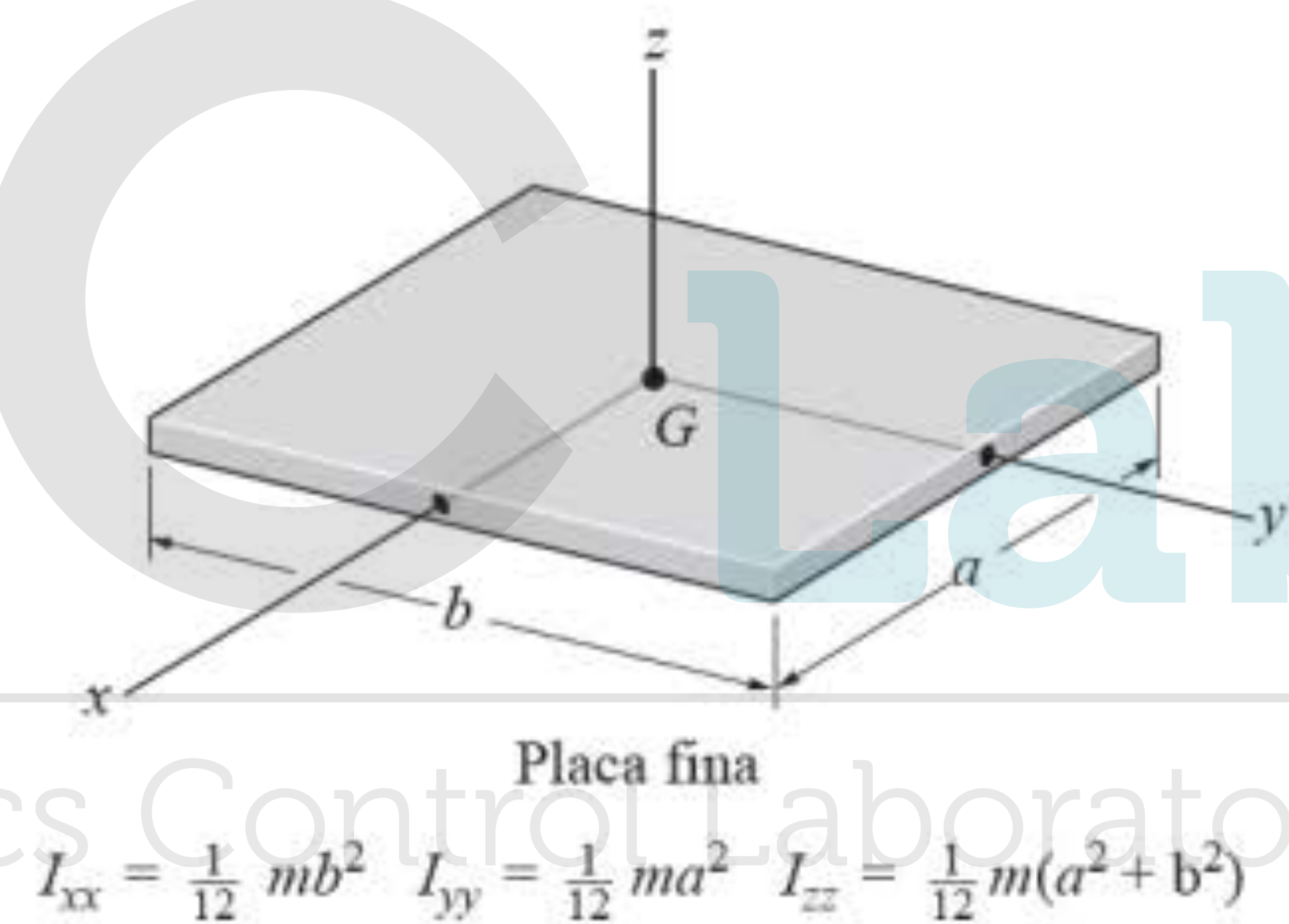
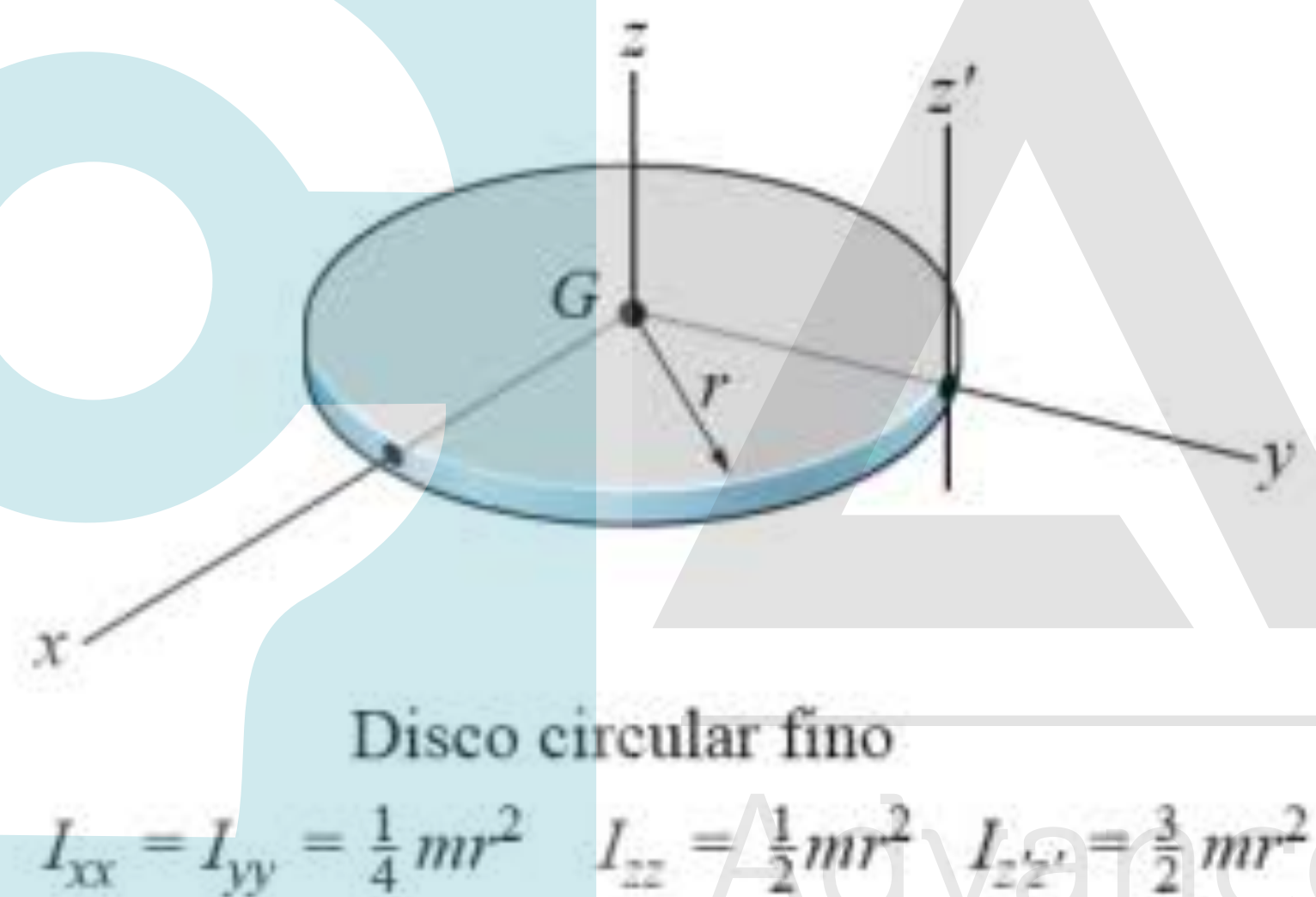
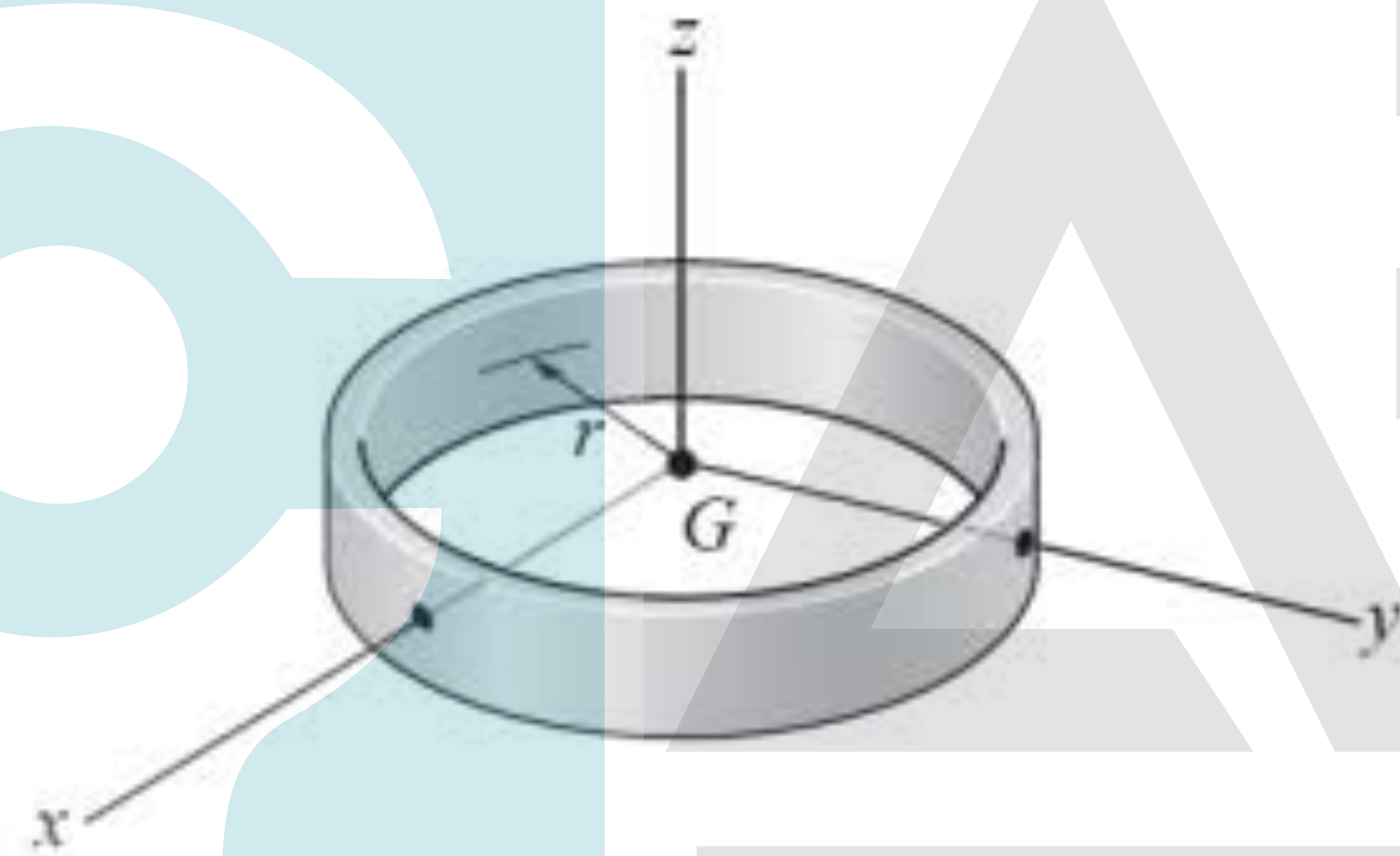


Tabela - Momento de Inércia

Coordenadas
cilíndricas

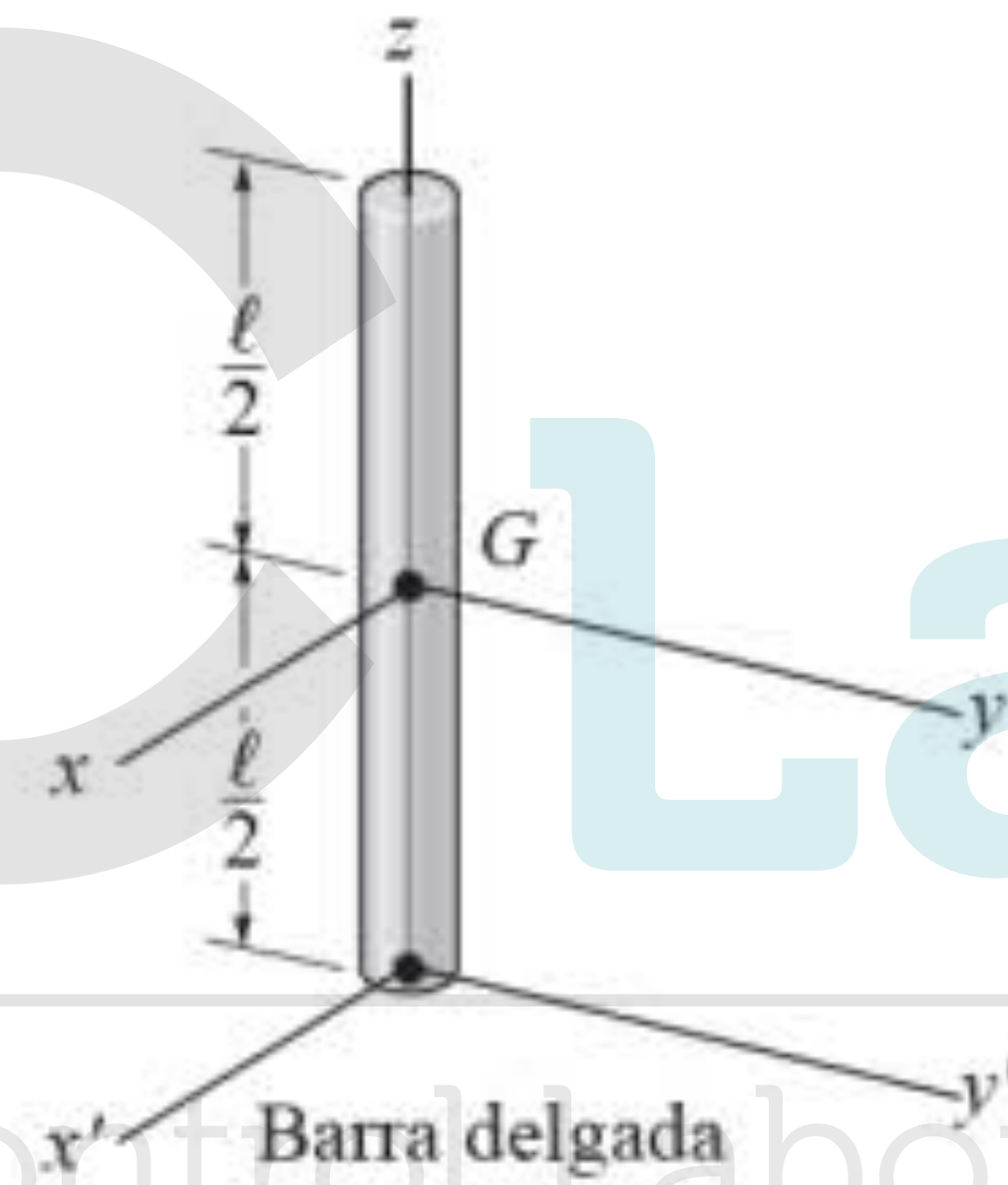
Momento
de Inércia



Anel fino

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$$

Conclusão



Barra delgada

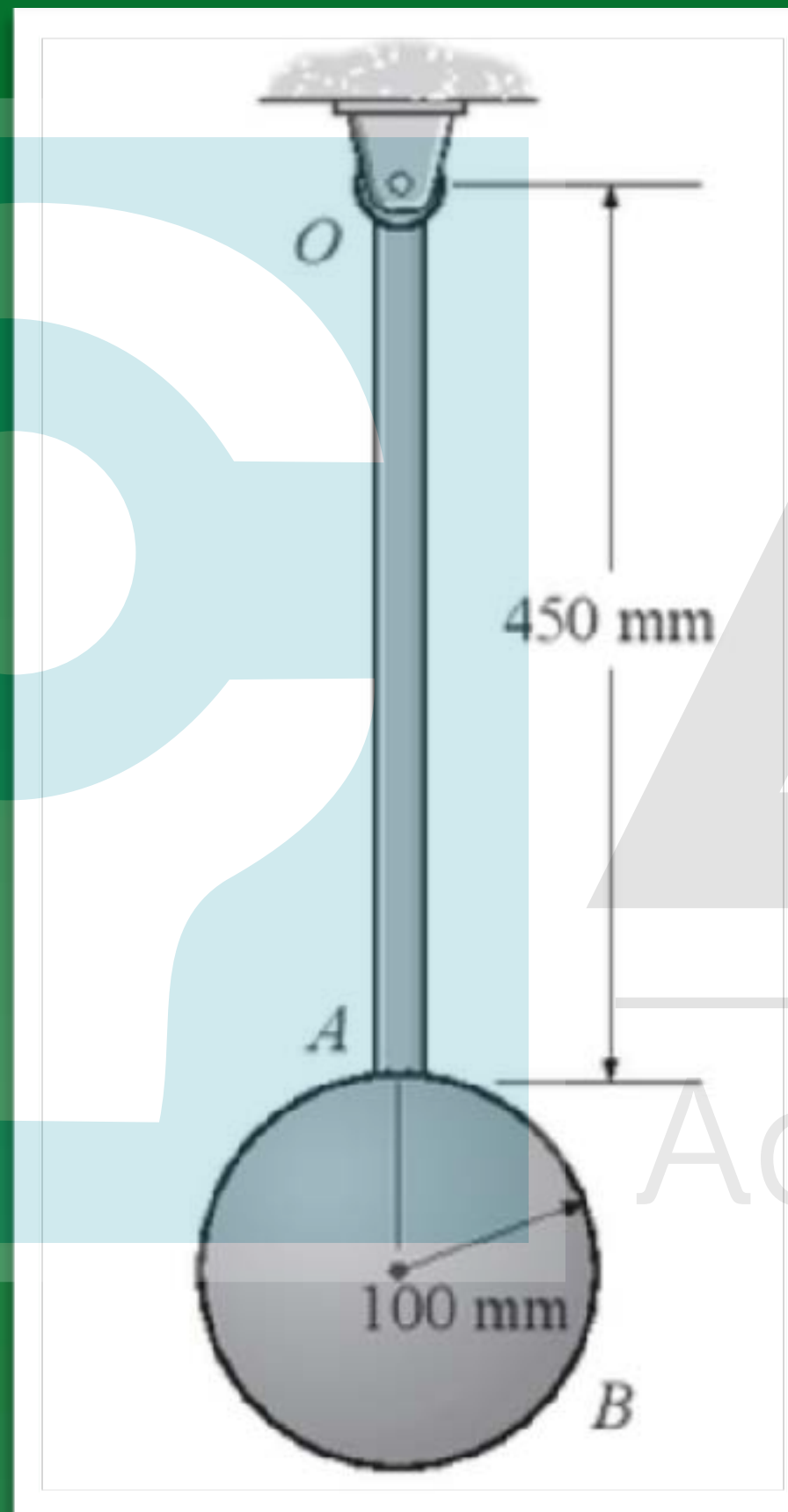
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m \ell^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3} m \ell^2 \quad I_{z'z'} = 0$$

Problema 17.21

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



•17.21. Determine o momento de inércia de massa do pêndulo em relação a um eixo perpendicular à página e passando pelo ponto O . A barra fina tem uma massa de 10 kg e a esfera tem uma massa de 15 kg.

Conteúdo

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

ARC Lab

Advanced Robotics Control Laboratory



- “Take-home messages”
- Próxima aula

Conclusão

“Take-home messages”

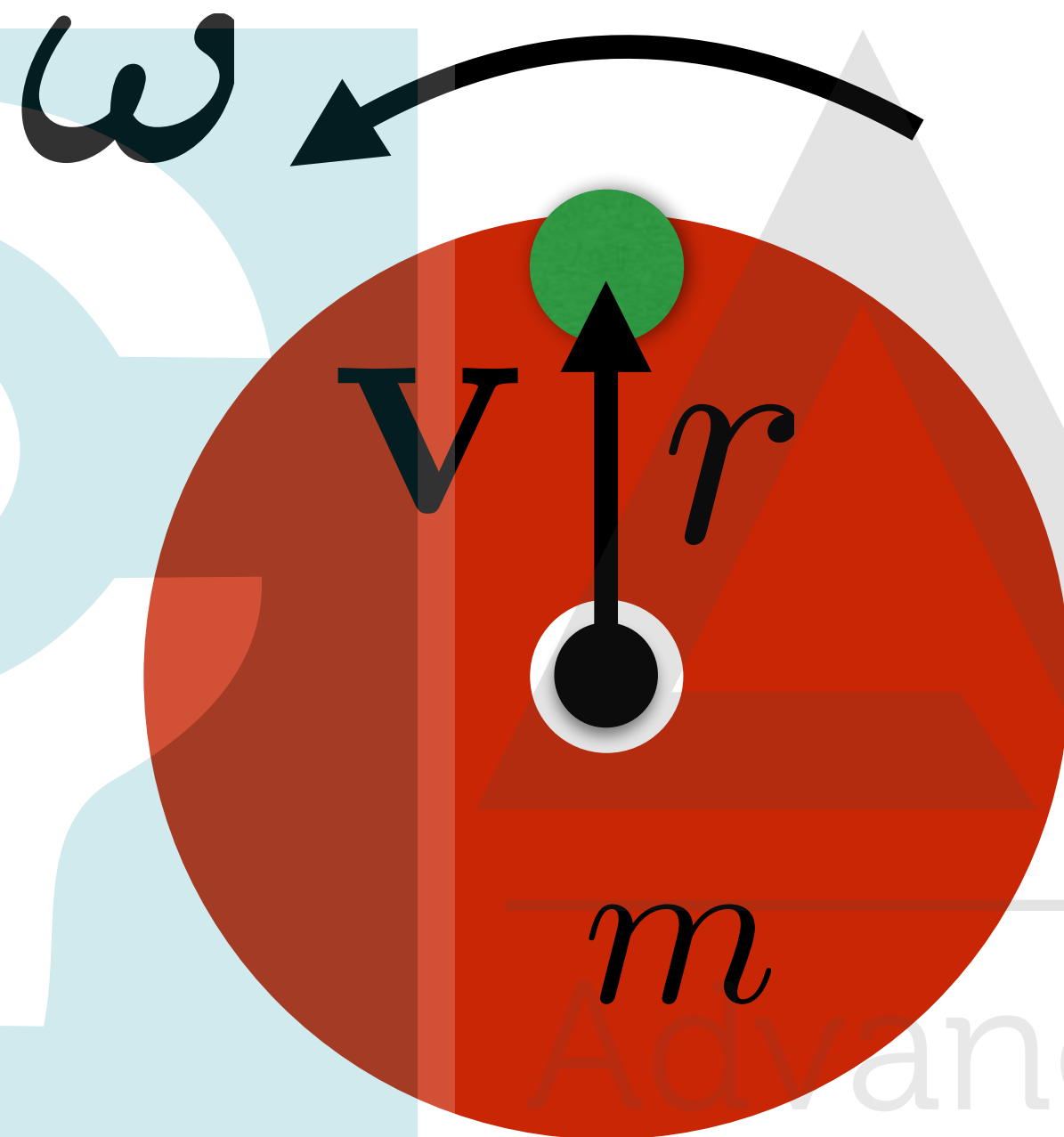
Momento angular:

$$H = I\omega$$

medida da resistência

de um corpo a uma

aceleração angular



Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

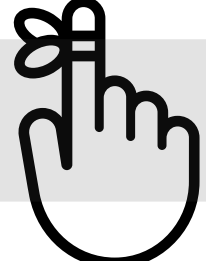
Próxima aula

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão

Equação de movimento

translacional 

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_R = \frac{d(\mathbf{L})}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Equação de movimento

rotacional

(Cap. 17.2 e 17.3)

$$\sum \mathbf{M} = \frac{d(\mathbf{H})}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt}$$

$$\sum \mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$$

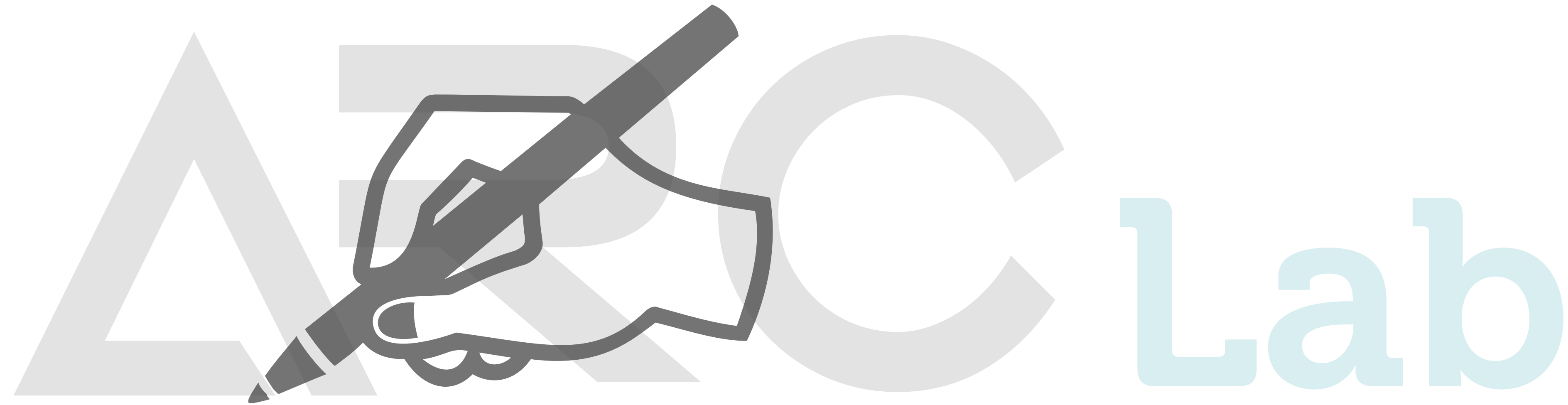
Advanced Robotics Control Laboratory

Lista de exercícios para próxima aula...

Coordenadas
cilíndricas

Momento
de Inércia

Conclusão



Advanced Robotics Control Laboratory

17.2, 17.4, 17.12, 17.19, 17.23



That's all Folks!

Advanced Robotics Control Laboratory