Medida e Forma em Geometria

Comprimento, Área, Volume e Semelhança

Elon Lages Lima

Diagramação e composição:
GRAFTEX Comunicação Visual
Rio de Janeiro

Conteúdo

Prefácio

"A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar."
George Polya

Este livrinho é uma re-edição, modificada e bastante ampliada, de outro que escrevi há 20 anos e que foi publicado, em sucessivas impressões, pela SBM.

A reformulação consiste no acréscimo de um novo capítulo, várias notas históricas, novos exercícios e uma revisão geral do texto. Ela foi feita com vistas ao curso de treinamento para professores do segundo grau, cuja primeira fase ocorreu em janeiro de 1991, sob o patrocínio de VITAE.

Agradeço à paciente e perspicaz colaboração de Carlos Isnard, Alciléa Augusto e Eduardo Wagner, vigilantes defensores da clareza e da correção. A eles se deve uma considerável melhora na qualidade da apresentação.

Elon Lages Lima

Introdução

Etimologicamente, *geometria* quer dizer medida da terra. Esta denominação grega é justificada pelo historiador Heródoto (século quinto A.C.), que atribui aos egípcios a origem dessa ciência. Segundo ele, o imposto que pagavam os proprietários de terra no Egito era diretamente proporcional à área de cada lote. As cheias do rio Nilo muitas vezes faziam desaparecer parte das terras dos agricultores. Então os cobradores de imposto do faraó tinham que recalcular cada área a fim de que a cobrança fosse ajustada. Também era preciso, para efeitos de comércio, que se soubesse calcular o volume de cada depósito de grão.

Assim, o cálculo de áreas e volumes é um assunto milenar, cuja importância se revelou muito cedo, mesmo em civilizações organizadas de modo simples em relação aos padrões atuais.

Descobertas históricas recentes revelaram que os conhecimentos matemáticos dos babilônios (denominação genérica para os diversos povos que, durante 3000 anos, ocuparam sucessivamente a Mesopotâmia, região aproximadamente correspondente ao Iraque de hoje) eram mais extensos e avançados que o dos egípcios. Isto é particularmente verdadeiro em Álgebra e nos cálculos numéricos, mas também ocorre em Geometria, onde além de conhecerem as áreas e volumes de figuras geométricas simples, os babilônios sabiam resolver problemas envolvendo a relação de Pitágoras, que lhes era familiar mil anos antes dos pitagóricos.

Portanto, quer no Egito quer na Babilonia, áreas e volumes são as primeiras noções geométricas a despertarem o interesse do homem.

Deve-se entretanto ressaltar enfaticamente que, para esses povos precursores da Geometria, esta não era organizada nos moldes e padrões lógicos modernos. A idéia de que as afirmações precisam ser demonstradas ainda não havia ocorrido. Nos mais antigos documentos babilônicos e egípcios (que datam de aproximadamente 1700 A.C.) há apenas enunciados de problemas, e regras apresentadas sob forma de receitas para resolver esses problemas.

Segundo se acredita, a partir de referências feitas por historiadores da época, as primeiras demonstrações matemáticas devem-se a Tales, que viveu no sexto século A.C. A partir daí, durante 800 anos os gregos cultivaram e aperfeiçoaram, com brilho invulgar, a Geometria organizada dedutivamente, com axiomas, definições, teoremas, corolários etc. Esse modelo foi adotado pelas gerações subseqüentes e é assim que até hoje a Matemática é estruturada.

Um compêndio sistemático de Geometria deve portanto começar com uma lista de conceitos primitivos, não definidos (ligados a noções geométricas, que têm a ver com espaço e forma) e outra lista de proposições primitivas, ou axiomas, onde são enunciados, sem demonstração, fatos relativos a esses conceitos. Em seguida são introduzidas as definições e são demonstrados teoremas, os quais fazem afirmações referentes aos objetos geométricos, quer primitivos quer definidos.

Este livro, entretanto, não é feito assim. Ele não tem início no começo (por uma questão de princípio...). Nosso objetivo é estudar a noção de *medida* em Geometria sob seus aspectos uni, bi e tridimensional, isto é, medida de segmentos de reta (comprimento), de figuras planas (área) e de figuras sólidas (volume). Veremos como a medida dos objetos geométricos está fortemente relacionada com a idéia de número real e como, na realidade, a descoberta dos números irracionais se deu na Geometria e não na Aritmética ou na Álgebra. Mostraremos como os teoremas e os conceitos básicos da Geometria são necessários para o estudo das áreas e dos volumes. Acompanharemos a evolução e revelaremos as origens das idéias fundamentais da Geometria. Faremos uma revisão da noção de semelhança desde o princípio e a aplicaremos repetidamente no estudo das áreas e dos volumes. E concluiremos com uma apresentação, na linguagem e no estilo do século vinte, de resultados obtidos por Arquimedes no segundo século A.C. e demonstrados por meio de métodos descobertos por Cavalieri no século dezessete.

Mais explicitamente, o livro consta de quatro capítulos, cujo conteúdos passamos a descrever sucintamente.

O Capítulo 1 trata da medida de um segmento de reta. Nele se mostra que o processo de comparar um segmento arbitrário com outro fixado como unidade conduz aos diversos tipos de números reais positivos: inteiros, racionais e irracionais. A noção de segmentos incomensuráveis é explicada e, no final, uma breve nota histórica descreve como os matemáticos gregos enfrentaram a questão da incomensurabilidade.

O Capítulo 2 aborda a noção de área de uma figura plana. São deduzidas as fórmulas usuais para as áreas dos polígonos mais simples e é apresentada a definição geral de área de uma figura plana. Na dedução das fórmulas para as áreas do quadrado e do retângulo é feita uma distinção cuidadosa entre os casos em que os lados são comensuráveis ou incomensuráveis com a unidade de comprimento adotada. O capítulo termina com uma nota histórica, na qual se conta como as áreas são estudadas nos Elementos de Euclides. Como subproduto desse relato, é apresentada a demonstração dada por Euclides para o Teorema de Pitágoras e é esclarecida a razão da sua escolha do argumento, à luz da discussão feita no Capítulo 1.

O Capítulo 3 contém uma exposição da teoria da semelhança, que ocupa um lugar central na Geometria Euclidiana. A definição de semelhança é dada "comme il faut", é desenvolvida de modo a conter a abordagem tradicional e é aplicada para dar uma dedução simples e conceitual da fórmula para a área do círculo. Mostra-se que o número π, definido como a área de um círculo de raio 1, é também a razão entre os comprimentos da circunferência e do seu diâmetro. No final do capítulo é feita uma crônica resumida sobre o número π.

O livro termina, no Capítulo 4, com o estudo dos volumes dos sólidos geométricos. É dada a definição geral de volume e são deduzidas as fórmulas para os volumes dos sólidos mais conhecidos. O principal instrumento de trabalho utilizado é o Princípio de Cavalieri, com o qual se obtêm, de modo simples e elegante, os volumes dos sólidos que têm faces inclinadas, como prismas e pirâmides, ou sólidos "redondos", como cilindros, cones e esferas. O uso sistemático do Princípio de Cavalieri evita os argumentos tradicionais, que requerem explícitas passagens ao limite, mesmo para sólidos retilíneos, como pirâmides de bases poligonais. As áreas das superfícies do cilindro, do cone e da esfera são estudadas da forma clássica. Como de praxe, o capítulo termina com um esboço histórico da evolução das idéias nele apresentadas, com destaque para as contribuições de Arquimedes e Cavalieri.

Os conhecimentos que admitimos do leitor são, em verdade, bem modestos. Supomos essencialmente que ele conheça os 3 casos clássicos de igualdade (melhor dizendo "congruência") de triângulos, algo sobre retas paralelas, como por exemplo a igualdade de ângulos com lados paralelos ou perpendiculares, o postulado de Euclides, segundo o qual por um ponto dado fora de uma reta passa uma única paralela a essa reta e o teorema de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 2 retos. Todas essas coisas são bem difundidas. Em todo caso, se o leitor precisar refrescar sua memória, minha recomendação é rever esses assuntos no livro de João Lucas Barbosa, citado na lista de referências, ao fim deste volume.

Depois de cada capítulo deste livro, há uma lista de exercícios propostos. Apenas dois ou três deles trazem ilustrações. Os desenhos das figuras geométricas são parte importantíssima para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Por isso considero fundamental que o leitor, por si só, desenhe a figura a partir do enunciado do problema. Essa tarefa é parte do exercício. Mesmo que não consiga resolvê-lo de todo, o desenho já é um resultado positivo.

Em alguns exercícios, há apenas um enunciado, sem nenhum pedido explícito, como "prove", "mostre" etc. Acrescente esse pedido mentalmente.

Não é demais repetir que uma atitude passiva na aprendizagem leva a um conhecimento incompleto, inseguro e efêmero. Para entender as diversas facetas do assunto, ganhar confiança e gravar de modo permanente aquilo que se aprendeu é necessária a experiência, repetida várias vezes, de transformar interrogações em afirmações (até mesmo - se possível - exclamações!). É preciso duvidar, questionar, indagar, conjeturar. Procurar caminhos, imaginar construções, pesquisar interconexões, forçar o raciocínio, exercitar a mente. Esse processo é muito parecido com aquele que se usa para desenvolver a musculatura, em casa, na praia ou nas academias de ginástica. O princípio é o mesmo. E a conclusão é igual: fazer exercícios. Temos pois que repetir aquilo que todo autor de texto matemático diz na sua introdução: os exercícios fazem parte integrante do livro.

O lado histórico das coisas aqui tratadas é um dos seus aspectos mais relevantes, não apenas porque ilustra e ameniza a aprendizagem, como também porque ajuda a entender a evolução das idéias e o seu significado atual. As notas históricas que apresentamos são inevitavelmente breves. Esperamos que elas despertem o interesse e agucem a curiosidade do leitor para leituras mais substanciais. Os livros de Aaboe, Boyer e Struik, citados na lista de referências bibliográficas, são o que há de melhor em língua portuguesa sobre o assunto.

1. Comprimento

1. Medida de um segmento

Indicaremos com o símbolo $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta AB. A medida, ou comprimento, $\overline{AB}$ é um número que deve exprimir *quantas vezes* o segmento AB contém um segmento u, fixado previamente, que se convencionou tomar como unidade de comprimento, ou como segmento unitário.

A explicação que demos acima é bastante ilustrativa para servir de sugestão, mas não serve como uma verdadeira definição matemática porque é demasiadamente vaga. Não está claro o significado da expressão "o número de vezes que o segmento AB contém o segmento u". Usando essa idéia vaga como guia, vamos ver como se pode chegar a uma definição precisa do comprimento de AB.

Começamos fixando um segmento de reta u, que chamaremos de *segmento unitário*. (Ou unidade de comprimento.) Por definição, o comprimento de u será igual a 1.

Todos os segmentos de reta congruentes a u terão (ainda por definição) o comprimento 1.

Dado um segmento de reta AB, se existir um ponto intermediário C (situado em AB) tal que os segmentos AC e CB sejam congruentes a u, então o comprimento de AB será 2. Escreveremos então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2$.

Mais geralmente, dado um número inteiro positivo n, se for possível obter $n-1$ pontos intermediários $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ no segmento AB, de tal modo que os n segmentos $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u, então o comprimento de AB será n. Escreveremos neste caso:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}B} = n.$$

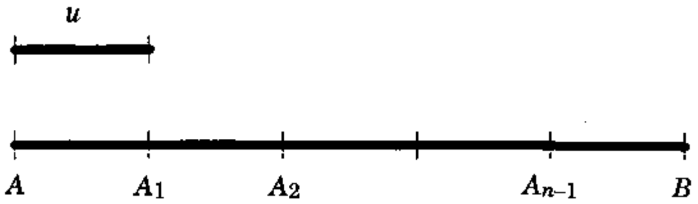


Fig. 1

Para descrever esta situação, diremos que $\overline{AB} = n$ porque AB se decompõe em n segmentos de reta justapostos, todos de comprimento 1.

Estes são os segmentos de reta cujos comprimentos são números inteiros. Quando $\overline{AB} = n$ (n inteiro), é natural dizer que AB contém n vezes o segmento unitário u.

É fácil conseguir um segmento AB que não contém o segmento unitário u um número inteiro de vezes. Por exemplo, o segmento AB pode ser menor do que o segmento unitário u. Neste caso, a medida $\overline{AB}$ não pode ser um número inteiro. Como definir então o comprimento de AB?

Façamos inicialmente uma hipótese. Suponhamos que, embora AB não contenha u um número inteiro de vezes, exista entretanto um segmento menor, w, tal que w esteja n vezes contido em u e m vezes contido em AB, sendo m e n números inteiros.

O segmento w é o que se chama um *submúltiplo comum* de AB e u. Neste caso, dizemos que os segmentos AB e u são *comensuráveis*. Como w está n vezes contido em u, é natural dizer que a medida de w é $1/n$ e, portanto, que o comprimento de AB é m vezes $1/n$, ou seja, $\overline{AB} = m/n$.

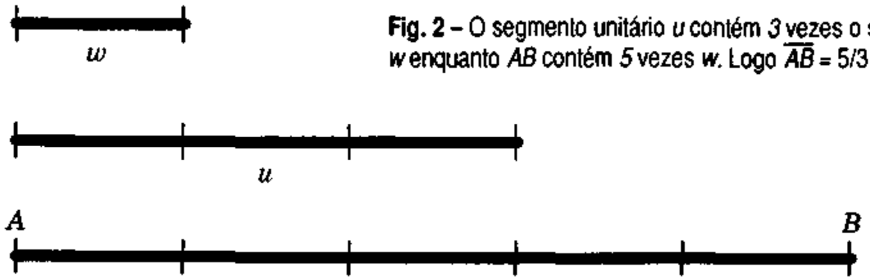


Fig. 2 – O segmento unitário *u* contém *3* vezes o segmento *w* enquanto *AB* contém *5* vezes *w*. Logo $\overline{AB} = 5/3$.

Em resumo: fixado o segmento unitário u, o comprimento de um segmento AB é um número racional m/n quando existe um segmento w que esteja contido n vezes em u e m vezes em AB. Neste caso, w chama-se um *submúltiplo comum* de AB e u, e estes dois segmentos se dizem *comensuráveis*.

Na prática, como nossos olhos (ou mesmo os instrumentos mais delicados de aferição) têm um limite de percepção (ou precisão), sendo incapazes de distinguir dois pontos que, embora distintos, achem-se situados a uma distância inferior a esse limite, tudo se passa como se dois segmentos quaisquer fossem sempre comensuráveis. Durante algum tempo se acreditava que, de fato, não existissem segmentos incomensuráveis.

Inicialmente, Pitágoras e seus discípulos pensavam assim. Eles mesmos, porém, descobriram o primeiro exemplo de um par de segmentos incomensuráveis, isto é, segmentos que não possuem um submúltiplo comum. Esta descoberta causou enorme impacto no desenvolvimento da Matemática grega.

O exemplo de Pitágoras é bastante simples: se tomarmos o lado de um quadrado como segmento unitário, a diagonal desse quadrado não pode ter comprimento racional.

Noutras palavras, o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis.

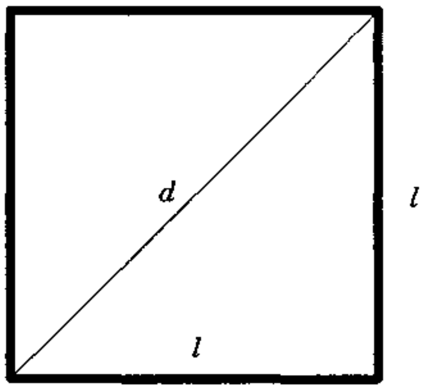


Fig. 3 – Pitágoras e seus discípulos descobriram que nenhum segmento de reta que esteja contido um número inteiro de vezes no lado de um quadrado pode estar também contido um número inteiro de vezes na diagonal desse quadrado.

A demonstração tradicional desse fato é a seguinte: se o lado e a diagonal fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para comprimento da diagonal um número racional p/q.

Em virtude do Teorema de Pitágoras (aplicado a um dos triângulos retângulos da figura) temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2,$$

ou seja

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{com } p \text{ e } q \text{ inteiros.}$$

Daí resulta $p^2 = 2q^2$.

Ora, a última igualdade acima é um absurdo. Com efeito, os inteiros p^2 e q^2 contêm cada um dos seus fatores primos um número par de vezes, pois estão elevados ao quadrado. Por conseguinte, $2q^2$ contém um número ímpar de fatores iguais a 2 e assim não pode ser igual a p^2.

Como definir então o comprimento de um segmento AB que é incomensurável com o segmento unitário u?

A medida de AB será, neste caso, um *número irracional*.

E o que é um número irracional? A resposta não é muito simples. Enquanto um número racional tem uma expressão "exata" como quociente p/q de dois números inteiros, um número irracional fica determinado quando se conhecem seus valores aproximados (os quais são números racionais).

O matemático grego Eudóxio, o primeiro a lidar de modo preciso com grandezas incomensuráveis, já havia desenvolvido, há mais de 25 séculos, uma teoria que, em linguagem moderna, se resume assim: para conhecer um número irracional x basta conhecer os números racionais menores do que x (suas aproximações por falta) e os números racionais maiores do que x (suas aproximações por excesso).

Por exemplo, $\sqrt{2}$ (por definição: número positivo cujo quadrado é 2) é um número irracional, como vimos acima. Os vários processos de cálculo da raiz quadrada nos permitem obter valores racionais aproximados de $\sqrt{2}$ com erro tão pequeno quanto se queira. Assim, podemos escrever $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$. Isto significa que $(1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2$, o que é correto, como qualquer pessoa pode verificar.

As desigualdades $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ significam que 1,414 é um valor aproximado por falta e 1,415 é um valor aproximado por excesso para o número irracional $\sqrt{2}$. Como $1{,}415 - 1{,}414 = 0{,}001$ vemos que, ao substituirmos $\sqrt{2}$ por qualquer um desses valores aproximados, cometemos um erro inferior a 1 milésimo. Assim, 1,414 é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ com 3 algarismos decimais exatos. (Em outras palavras, se escrevermos uma aproximação por falta de $\sqrt{2}$ com erro inferior a 0,001 os três primeiros algarismos decimais devem ser 414.)

Se desenvolvermos um número racional p/q em fração decimal, dois casos podem ocorrer: ou obtemos uma fração decimal exata (finita), como $3/8 = 0{,}375$ ou então uma fração decimal periódica (infinita) como $4/11 = 0{,}363636\ldots$.

E reciprocamente, dada qualquer fração decimal periódica, existe sempre um número racional (sua "geratriz"), do qual a decimal dada é o desenvolvimento. (Ver, a respeito, "Meu Professor de Matemática" pags 196, 242 e 262.) Podemos então caracterizar os números irracionais como aqueles que, escritos como frações decimais, possuem expressões que nem são finitas nem periódicas.

Dada esta explicação sobre números irracionais, voltemos à medida dos segmentos.

Temos um segmento AB. Sabemos que ele não é comensurável com a unidade de comprimento u. Sua medida $\overline{AB}$ é, portanto, um número irracional. Quais são os valores aproximados (por falta e por excesso) desse número irracional $\overline{AB}$?

Seja dado um número inteiro positivo n. (Por exemplo, n = 1.000 ou n = um milhão.) Dividimos o segmento unitário u em n partes iguais. Cada uma dessas partes é um segmento de comprimento $1/n$. Seja w uma dessas partes. Existe um inteiro positivo m tal que AB contém m segmentos congruentes a w e ainda sobra alguma coisa, mas $m + 1$ segmentos congruentes a w, justapostos, formam um segmento maior do que AB. Quando isto ocorrer, tem-se

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n}.$$

Ou seja, o número racional m/n é uma aproximação por falta para o comprimento de AB, com erro inferior a $1/n$. Da mesma forma, $(m+1)/n$ é uma aproximação por excesso do número irracional AB, com erro inferior a $1/n$.

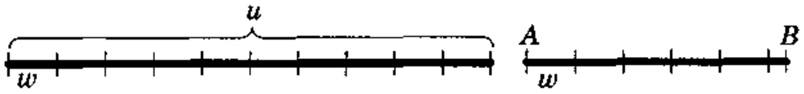


Fig. 4 – O segmento w é um décimo da unidade u. O segmento AB contém um pouco mais do que 5 segmentos congruentes a w, porém não chega a conter 6. Logo o comprimento de AB satisfaz $0{,}5 < \overline{AB} < 0{,}6$. Isto é, 0,5 e 0,6 são valores aproximados de $\overline{AB}$, por falta e por excesso, ambos com erro inferior a 0,1.

Concluímos assim nossa discussão sobre a medida $\overline{AB}$ (ou comprimento) de um segmento de reta AB. Essa medida pode ser inteira, fracionária ou irracional. Os primeiros casos ocorrem quando AB é comensurável com a unidade de comprimento escolhida. O último caso se dá quando AB e o segmento unitário são incomensuráveis, isto é, não possuem um submúltiplo comum. Neste caso, dado qualquer inteiro n, podemos obter aproximações racionais m/n e $(m+1)/n$, por falta e por excesso, para o comprimento $\overline{AB}$. O erro cometido é, portanto, inferior a $1/n$. Como $1/n$ pode se tornar um valor tão pequeno quanto o desejemos, (bastando para isso tomar n grande) vemos que é possível obter valores aproximados para $\overline{AB}$ com erro tão insignificante quanto se queira.

2. Nota histórica.

Na concepção atual, um número (real) é o resultado da comparação de uma grandeza com a unidade, que é uma grandeza da mesma espécie, fixada como padrão. Há basicamente dois tipos de grandeza: as *discretas* (como um rebanho) e as *contínuas* (como o tempo, o peso e a distância). Comparar uma grandeza discreta com a unidade significa efetuar uma *contagem*; o resultado é sempre um número inteiro. Se, entretanto, a grandeza é contínua, compará-la com a unidade é *medi-la*; o resultado da comparação (medida) é um número real. Se a grandeza (contínua) que se quer medir é comensurável com a unidade escolhida, a medida é um número racional; se é incomensurável, sua medida é um número irracional.

Mas nem sempre as coisas foram assim.

A Matemática grega, primeiro modelo da Matemática como ciência dedutiva, sintetizada magistralmente nos "Elementos" de Euclides (terceiro século A.C.), não conhecia números irracionais. "Número" significava número natural e mesmo uma fração p/q era uma razão entre dois números naturais. No Livro VII dos Elementos, Euclides define: "unidade é aquilo pelo qual cada objeto é um" e "número é uma multitude de unidades".

Evidentemente, desde Pitágoras (quinto século A.C.) os gregos tinham consciência de que existiam grandezas incomensuráveis, isto é, de que inteiros e razões entre inteiros não bastavam para medir todas as grandezas; nem sequer para medir segmentos de reta. Aristóteles (quarto século A.C.), que não era matemático, conta que os pitágoricos constataram que "se a diagonal de um quadrado fosse comensurável com o lado, o mesmo número poderia ser simultaneamente par e ímpar". [Na demonstração dada acima (seção 1), o número a que se refere Aristóteles é o número de vezes em que o fator 2 aparece na decomposição de p^2 em fatores primos.] Algumas edições antigas dos Elementos continham a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ com esse argumento resumido por Aristóteles mas sabe-se que se tratava de uma interpolação. Euclides não precisava provar isto pois a Proposição 9 do Livro X dos Elementos estabelece que se um número (inteiro) não é quadrado de outro inteiro também não é quadrado de uma fração. Este fato permite concluir imediatamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc. são números irracionais.

A descoberta de grandezas incomensuráveis foi um severo golpe para os pitagóricos, que adotavam o lema: "Os números (inteiros) governam o universo". Eles não conseguiram resolver o impasse, uma saída para o qual foi fornecida um século depois por Eudóxio. Em vez de solucionar o problema estendendo o conceito de número, criando os números reais, como se tem hoje, ele encontrou uma solução diferente, seguida pelos matemáticos gregos posteriores. Eudóxio manteve o princípio de que a palavra "número" significa número natural mas teve de desistir de medir as grandezas, isto é, de exprimir *por meio de um número* o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade adotada.

Para comparar duas grandezas da mesma espécie (dois comprimentos, dois ângulos, duas áreas ou dois volumes), em vez de número, Eudóxio adotou o conceito de "razão entre duas grandezas". Claro, hoje em dia a razão entre duas grandezas é simplesmente a medida de uma delas quando se toma a outra como unidade, ou seja, é um número real. Mas não era assim naquela época.

Eudóxio desenvolveu a teoria das razões entre grandezas de forma logicamente impecável e Euclides a apresentou no Livro V dos Elementos. As definições básicas são as de igualdade e desigualdade entre duas razões.

Se A e B são grandezas da mesma espécie, a notação $A:B$ significa a razão entre A e B. Sejam X e Y também grandezas da mesma espécie (mas não necessariamente da mesma espécie que A e B).

Diz-se que $A:B = X:Y$ (e lê-se "A está para B assim como X está para Y") quando, dados números naturais arbitrários m, n, tem-se $n.A < m.B$ se, e somente se, $n.X < m.Y$.

Esta era a definição de Eudóxio. Em linguagem de hoje, como $n.A < m.B$ significa

$$\frac{A}{B} < \frac{m}{n},$$

ela equivale a dizer que os números reais $A:B$ e $X:Y$ são iguais se, e somente se, todo número racional maior do que $A:B$ é também maior do que $X:Y$ e todo número racional maior do que $X:Y$ é maior do que $A:B$.

Na linguagem de Euclides, a definição era formulada assim: "$A:B$ e $X:Y$ são iguais quando um equimúltiplo qualquer de A e X é ao mesmo tempo, e respectivamente, superior, igual ou inferior a um equimúltiplo de B e Y".

Voltando a Eudóxio, ele dizia (por definição) que $A:B < X:Y$ quando existem números naturais m, n tais que $n.A < m.B$ e $m.X < n.Y$. Novamente, em termos de números reais isto significa que o número real $A:B$ é menor do que o número real $X:Y$ quando existe um número racional m/n tal que

$$A:B < \frac{m}{n} < X:Y.$$

Uma grave deficiência no formalismo criado por Eudóxio e apresentado nos Elementos de Euclides era que não se efetuavam operações aritméticas com razões.

O problema de estabelecer uma teoria rigorosa para a medida das grandezas só veio a ser resolvido definitivamente com a formulação correta do conceito de número real, com Dedekind, Cantor e Weierstrass, no século 19. Curiosamente, a solução encontrada está muito próxima das idéias de Eudóxio.

3. Exercícios

1. A raiz quadrada de um número natural é um outro número natural ou então é um número irracional.

2. Prove que a soma e o produto de um número racional não nulo por um irracional são irracionais. Dê exemplo de dois números irracionais positivos cuja soma e cujo produto são números naturais.

3. Se x, y, u e v são números racionais, prove que $x + y\sqrt{2} = u + v\sqrt{2}$ se, e somente se, $x = u$ e $y = v$.

4. Prove que a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b racionais, ainda é um número desta forma.

5. Sejam dados dois segmentos de reta desiguais. Se, subtraindo sucessivamente o menor do maior, o resto de cada subtração nunca é um submúltiplo do resto anterior (isto é, o processo nunca termina), então os segmentos são incomensuráveis.

6. Diz-se que o ponto C, sobre o segmento AB, divide AB em *média e extrema razão* quando $\overline{AB} / \overline{AC} = \overline{AC} / \overline{CB}$. Prove que a divisão em média e extrema razão é hereditária, no seguinte sentido: se o ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão então, tomando D tal the $\overline{AD} = \overline{CB}$, o ponto D divide o segmento AC em média e estrema razão.

7. Aplicando o exercício anterior, mostre que se C divide AB em média e extrema razão então AC e AB são incomensuráveis.

8. Calcule explicitamente o comprimento de um segmento que divide o segmento unitário em média e extrema razão.

9. Use o exercício 5 para provar que o lado e a diagonal do quadrado são grandezas incomensuráveis.

2. Área

Trataremos agora de medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para isso, compararemos F com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área. Daremos aqui um significado preciso a esta idéia e estabeleceremos as fórmulas para as áreas das figuras geométricas mais conhecidas.

1. Área do quadrado e do retângulo.

O *quadrado* é o quadrilátero que tem os 4 lados iguais e os 4 ângulos retos. Convencionaremos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado o *quadrado unitário*.

Qualquer quadrado cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

Um quadrado Q cujo lado tem para medida o número inteiro n pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e portanto com área 1. Segue-se que o quadrado Q deve ter área n^2.

De modo análogo, se o lado de um quadrado Q tem por medida $1/n$, onde n é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe, mediante paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Estes n^2 quadrados congruentes a Q compondo um quadrado de área 1, segue-se que a área de Q deve satisfazer à condição $n^2 \times$(área de Q) = 1 e, portanto, área de $Q = 1/n^2$

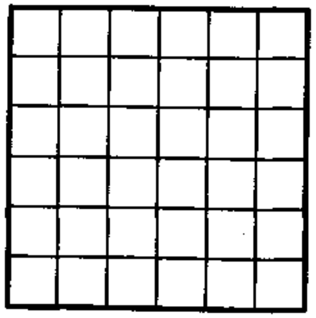


Fig. 1. Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$ quadrados unitários.

Mais geralmente, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional m/n, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $1/n$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um dos quais tem lado $1/n$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $1/n^2$. Segue-se que a área de Q deve ser

$$m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

ou seja,

$$\text{área de } Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Podemos então concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem para medida um número racional $a = m/n$ é dada pela expressão:

$$\text{área de } Q = a^2.$$

Mas existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Seja Q um desses: o lado de Q tem para medida o *número irracional* a. Mostraremos agora que, ainda neste caso, deve-se ter área de $Q = a^2$.

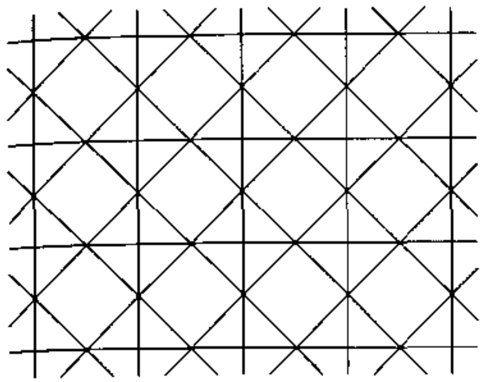


Fig. 2. Nesta figura há dois tipos de quadrados: uns com lados inclinados, outros com lados horizontais e verticais. Seja qual for a unidade de comprimento escolhida, pelo menos os quadrados de um tipo têm lado irracional.

Raciocinaremos de modo indireto. Dado qualquer número $b < a^2$, mostraremos que deve ser $b <$ área de Q. Em seguida, provaremos que $a^2 < c$ implica área de $Q < c$. Isto mostrará que a área de Q não pode ser um número b menor nem um número c maior do que a^2. Portanto, concluiremos que a área de $Q = a^2$. Demonstraremos somente a primeira parte deste argumento. A segunda é inteiramente análoga e por isso é deixada a cargo do leitor.

Seja, pois, b um número tal que $b < a^2$. Tomamos um número racional r, inferior a a, porém, tão próximo de a que se tenha

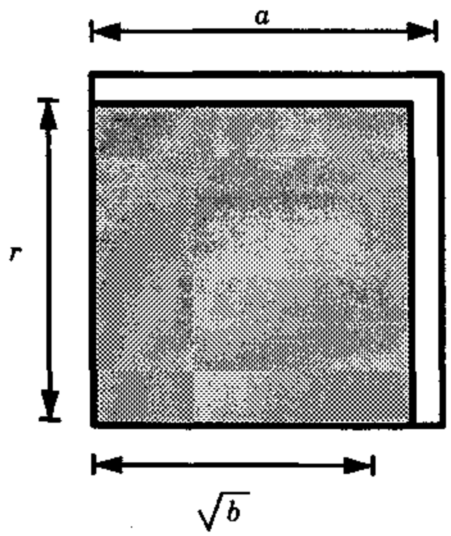


Fig. 3. O quadrado de lado r está contido no quadrado Q, de lado a. Logo $r^2 <$ área de Q. Como $\sqrt{b} < r$, temos $b < r^2 <$ área de Q.

$b < r^2 < a^2$. (Basta tomar r, uma aproximação por falta de a, com erro inferior a $a - \sqrt{b}$. Então $\sqrt{b} < r < a$ e portanto $b < r^2 < a^2$.)

No interior de Q, tomamos um quadrado Q' de lado r. Como r é racional, a área deste quadrado é r^2. Como Q' está contido no interior de Q, devemos ter área de Q' < área de Q, ou seja r^2 < área de Q. Mas sabemos que $b < r^2$. Conclusão: $b <$ área de Q. Assim, todo número real b, inferior a a^2, é também menor do que a área de Q. Da mesma maneira se prova que todo número real c, maior do que a^2, é maior do que a área de Q. Logo, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2. Por exclusão, deve-se então ter área de $Q = a^2$.

Concluímos, desta maneira, que a área de um quadrado Q, cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula

$$\text{área de } Q = a^2.$$

Na fórmula acima, a é um número real qualquer: inteiro fracionário ou irracional.

Observação: Este modo de provar uma fórmula mostrando que a desigualdade é impossível é devido a Eudóxio e é conhecido como o *método da exaustão*.

Consideremos agora a área do retângulo. O *retângulo* é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

Se os lados de um retângulo R têm para medidas os números inteiros m e n, então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que se deve ter área de $R = m.n$.

Mais geralmente, se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b, podemos escrever estes números como duas frações $a = p/q$ e $b = r/q$, com o mesmo denominador q. Dividimos cada lado de R em segmentos de com-

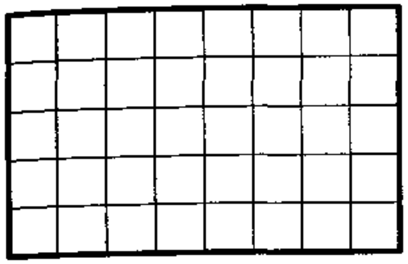


Fig. 4. Retângulo R, cujos lados medem 5 e 8, subdividido em $5 \times 8 = 40$ quadrados unitários. Tem-se área de $R = 8 \times 5 = 40$.

primento $1/q$. O lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $1/q$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $1/q$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em pr quadrados, cada um deles de lado $1/q$. A área de cada um desses quadradinhos é $(1/q)^2 = 1/q^2$. Logo a área de R deverá ser igual a

$$(p \cdot r) \times \frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q},$$

ou seja, área de $R = a \cdot b$.

Vemos assim que, *quando os lados de um retângulo R têm para medidas os números racionais a e b*, a área de R é expressa pela fórmula:

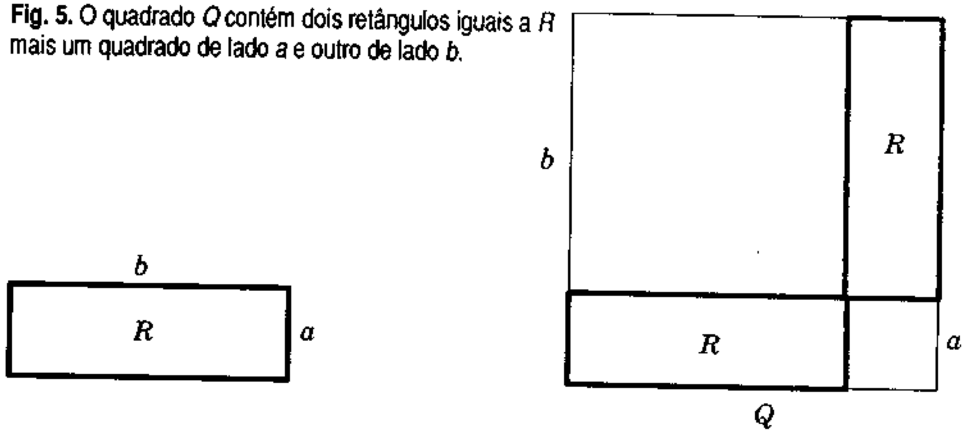
$$\text{área de } R = a \cdot b.$$

Diz-se, então, que a área do retângulo é o produto da base pela altura.

Isto foi mostrado acima apenas quando a e b são números racionais, mas é uma fórmula geral, válida mesmo que os números a e b sejam irracionais (ou um deles seja racional e o outro irracional).

Para tratar o caso em que a e b não são ambos racionais, poderíamos usar o método da exaustão, de forma análoga ao raciocínio empregado acima para deduzir a fórmula para a área do quadrado. Em vez disso, entretanto, podemos usar um artifício simples e elegante, fazendo recair a área do retângulo na área do quadrado. Procedendo assim, ficamos inclusive dispensados de considerar separadamente o caso em que a base e a altura do retângulo têm medidas racionais.

Fig. 5. O quadrado Q contém dois retângulos iguais a R mais um quadrado de lado a e outro de lado b.



Dado o retângulo R, de base b e altura a, construímos o quadrado Q, de lado $a + b$, o qual contém 2 cópias de R e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b. Como sabemos,

$$\text{área de } Q = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por outro lado, como os quadrados menores têm áreas iguais a a^2 e b^2 respectivamente, temos

$$\text{área de } Q = a^2 + b^2 + 2 \times (\text{área de } R).$$

Segue-se que área de $R = ab$.

Há ainda uma outra maneira de se chegar à fórmula da área do retângulo. Ela não requer que se calcule primeiro a área do quadrado e se baseia na teoria das proporções, mais precisamente no seguinte

Teorema. *As áreas de dois retângulos que têm alturas iguais estão entre si assim como suas bases.*

Indiquemos com $A(x, y)$ a área de um retângulo cuja base mede x e cuja altura mede y. O teorema acima afirma que

$$\frac{A(x', y)}{A(x, y)} = \frac{x'}{x}$$

ou seja, escrevendo $x' = c \cdot x$, vale:

$$A(c.x, y) = c.\,A(x, y).$$

Evidentemente, qualquer um dos lados do retângulo pode ser considerado como base. Logo tem-se também:

$$A(x, d.y) = d \cdot A(x, y).$$

Segue-se então que

$$A(x, y) = A(x \cdot 1, y) = x \cdot A(1, y) = x \cdot A(1, y \cdot 1) = xy \cdot A(1, 1).$$

Ora, $A(1,1)$ é a área do retângulo de base e altura iguais a 1, isto é, do quadrado unitário. Por definição, $A(1, 1) = 1$. Portanto, com base no teorema acima, concluímos que $A(x, y) = x.y$, isto é, a área do retângulo é o produto da base pela altura.

A demonstração do Teorema acima tem duas partes, uma geométrica e outra aritmética. A parte geométrica diz que, para todo número natural n, $A(n \,.\, x, y) = n \,.\, A(x, y)$, o que é óbvio pois o retângulo de base $n.x$ e altura y é a reunião de n retângulos justapostos, todos de base x e altura y. Diz também que se $x < x'$ então $A(x, y) < A(x', y)$, o que é evidente porque, quando $x < x'$, o retângulo de base x e altura y está contido no interior do retângulo de base x' e altura y.

A parte aritmética da demonstração é uma reformulação, em termos numéricos, do argumento que chamamos anteriormente de "método da exaustão". Trata-se do seguinte. Indiquemos com $\mathbf{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Seja $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ uma função crescente, tal que $f(n.x) = n.f(x)$ para todo número natural n e todo número real $x > 0$. Então vale também $f(c.x) = c.f(x)$ para quaisquer $c > 0$ e $x > 0$ reais. Para a demonstração desta afirmação, veja o livro "Meu Professor de Matemática", página 164.

2. Área do paralelogramo e do triângulo

Da área do retângulo, passa-se facilmente para a área do paralelogramo. Um *paralelogramo* é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Quando se toma um lado do paralelogramo como base, chama-se *altura* do paralelogramo a um segmento de perpendicular que liga a base ao lado oposto (ou ao seu prolongamento).

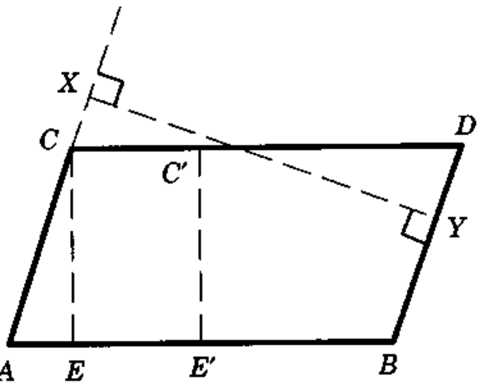
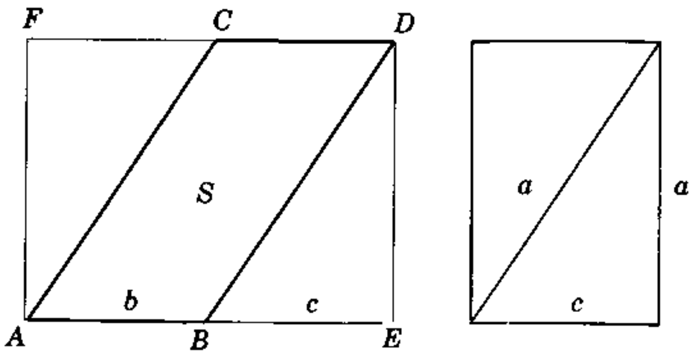


Fig. 6. No paralelogramo *ABDC*, baixamos uma perpendicular do ponto *C* à base *AB*. O segmento *CE* é uma altura do paralelogramo. Se tomássemos outra perpendicular *C′ E′*, ligando *CD* a *AB*, teríamos outra altura. Evidentemente, como *AB* e *CD* são paralelos, $\overline{CE} = \overline{C'E'}$, ou seja, todas as alturas relativas à base *AB* têm o mesmo comprimento. Poderíamos ter considerado o lado *BD* como base. Então *XY*, perpendicular a *AC* e *BD*, seria uma altura, relativa à base *BD*. É claro que $\overline{XY}$ não precisa ter o mesmo comprimento que as alturas relativas à base *AB*.

Seja *ABDC* um paralelogramo, cuja área S queremos calcular, sabendo que sua base AB tem comprimento b e sua altura DE tem comprimento a.

Fig. 7. O retângulo *AEDF*, cuja área vale $ba + ca$, é formado pelo paralelogramo, cuja área S se deseja calcular, mais dois triângulos que, colocados juntos à direita, formam um retângulo de base c e altura a.



O paralelogramo $ABDC$ está contido num retângulo de base $b+c$ e altura a. Como vimos, a área desse retângulo é $(b+c)a = ba + ca$. Por outro lado, o retângulo é formado pelo paralelogramo dado mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ca. Portanto $ba + ca = S + ca$, donde $S = ba$.

Assim, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Em particular, vemos que o produto do comprimento de qualquer base de um paralelogramo pelo comprimento da altura correspondente é constante (não depende da base escolhida).

Vemos também que, dadas as retas paralelas r, s e o segmento AB sobre r, todos os paralelogramos $ABDC$, com C e D sobre a reta s, têm a mesma área. (Faça uma figura ilustrando esse fato.)

Da área do paralelogramo, passa-se imediatamente para a área do triângulo, pois todo triângulo é a metade de um paralelogramo.

Mais precisamente, dado um triângulo ABC, cuja área desejamos calcular, traçamos, pelos vértices C e B, respectivamente, paralelas aos lados AB e AC. Estas retas se encontram no ponto D e fornecem um paralelogramo $ABDC$. Tomemos a altura CE deste paralelogramo. Se $\overline{AB} = b$ e $\overline{CE} = a$, sabemos que a área de $ABDC = ba$. Ora, os triângulos ABC e BCD são congruentes (têm um lado comum compreendido entre dois ângulos iguais), logo

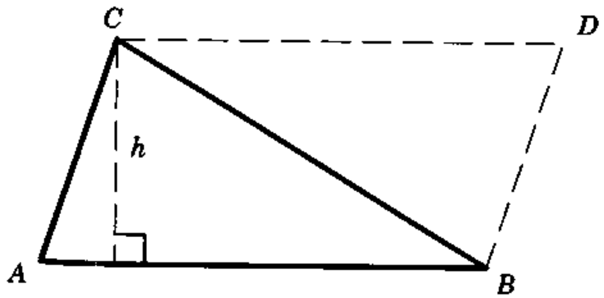


Fig. 8. Os triângulos *ABC* e *BCD* são congruentes (pois têm um lado comum, compreendido entre dois ângulos iguais), logo têm a mesma área.

têm a mesma área. Portanto, área de $ABDC = 2 \times$ (área de ABC) e por conseguinte:

$$\text{área de } ABC = \frac{1}{2}\, b{\cdot}a.$$

Isto se exprime dizendo que a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

Num triângulo, temos 3 escolhas para a base b e, portanto, 3 escolhas para a altura a. Seja qual for a escolha, o produto $b.a$ será o mesmo, pois, em cada caso ele fornece o dobro da área do triângulo.

Sejam r e s retas paralelas e b um número real positivo. Segue-se da fórmula acima que todos os triângulos ABC com vértice A sobre r, base BC sobre s e $\overline{BC} = b$, têm a mesma área. (Faça uma figura ilustrando esta afirmação.)

Para um polígono qualquer, o processo de calcular sua área consiste em subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular. A área do polígono procurada será a soma das áreas das figuras em que o decompusemos.

Por exemplo, seja $ABDC$ um *trapézio*. Isto significa que AB e CD são paralelos.

Escrevamos $\overline{AB} = b_1$, $\overline{CD} = b_2$ e chamemos de a a distância entre as paralelas AB e CD, isto é, o comprimento de qualquer perpendicular ligando um ponto da reta AB a um ponto da reta CD.

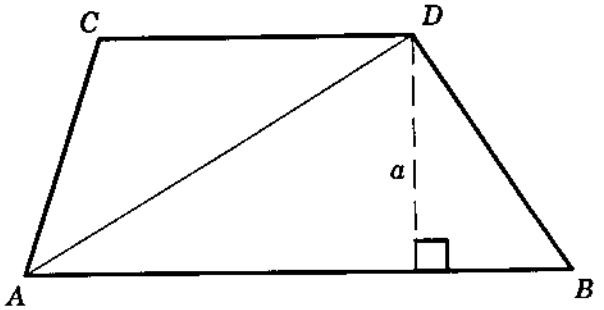


Fig. 9.

A diagonal AD decompõe o trapézio nos triângulos ABD e ACD, com bases b_1 e b_2 respectivamente, e mesma altura a. A área do trapézio $ABDC$ é a soma das áreas desses dois triângulos, logo

$$\text{área de } ABDC = \frac{ab_1}{2} + \frac{ab_2}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2} \times a.$$

Assim, a área do trapézio é igual à semi-soma das bases vezes a altura.

Observação. O método acima utilizado para calcular áreas de paralelogramos, triângulos e trapézios (cortar e deslocar) pode ser analisado de forma interessante e divertida. Veja "Polígonos equidecomponíveis", na Revista do Professor de Matemática, número 11 (1987), página 19.

3. Definição geral de área

Nos parágrafos anteriores, mostramos que se pode associar a cada polígono P um número real não-negativo, chamado a *área de P*, com as seguintes propriedades:

1) Polígonos congruentes têm áreas iguais.

2) Se P é um quadrado com lado unitário, então área de $P = 1$.

3) Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos $P_1, \ldots, P_n$ tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.

Segue-se de 3) que se o polígono P está contido no polígono Q então a área de P é menor do que a área de Q.

Se observarmos bem, notaremos que as fórmulas para as áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio, que obtivemos acima, foram todas deduzidas a partir destas 3 propriedades.

Entretanto, não demos ainda uma definição geral para a área de uma figura plana. Em particular, não sabemos como obter a área do círculo, da elipse, etc.

Vejamos agora como se define a área de uma figura plana F arbitrária.

A área da figura plana F deve ser um número real não-negativo, que indicaremos com $a(F)$. Ele ficará bem determinado se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso.

Os valores de $a(F)$ aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F. Os valores de $a(F)$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contêm F. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contido em F) e P' (contendo F), o número $a(F)$ satisfaz às desigualdades

$$a(P) \leq a(F) \leq a(P').$$

Por simplicidade, em vez de considerarmos polígonos quaisquer, limitaremos nossa atenção aos polígonos retangulares, para os quais é mais fácil calcular a área.

Um *polígono retangular* é a reunião de vários retângulos justapostos (isto é, dois desses retângulos têm em comum no máximo

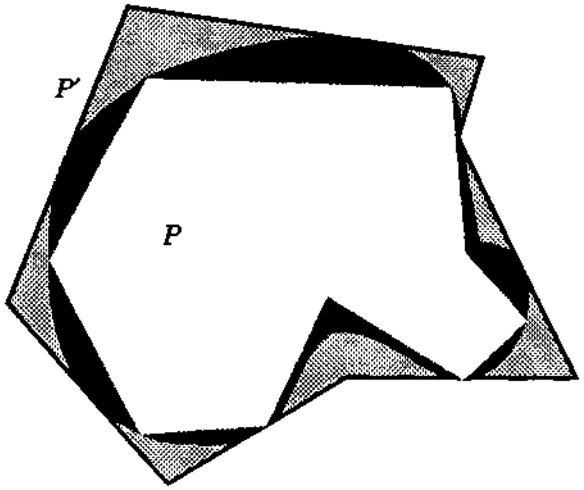


Fig. 10. Uma figura plana F *(negra)*, contida num polígono P' e contendo um polígono P. A área de P é uma aproximação por falta e a área de P' uma aproximação por excesso, para a área de F.

um lado). A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.

Ainda para maior simplicidade, limitaremos nossa atenção a polígonos retangulares *contidos* na figura F cuja área desejamos calcular. Em outras palavras, consideraremos apenas valores aproximados por falta para o número real $a(F)$.

Assim, definiremos a *área* da figura F como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F.

Isto significa que, para todo polígono retangular P, contido em F, tem-se

$$a(P) \leq a(F).$$

Além disso, dado qualquer número $b < a(F)$, existe um polígono retangular P, contido em F, tal que

$$b < a(P) \leq a(F).$$

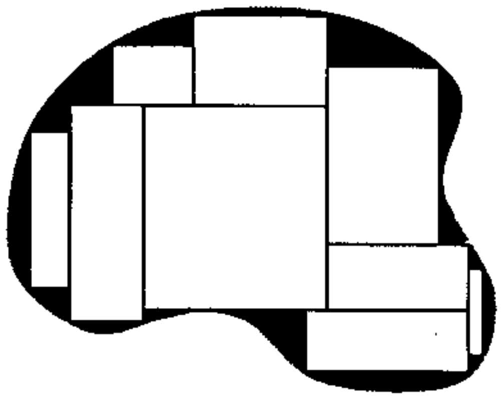


Fig. 11. Polígono retangular P contido numa figura plana F. A área de P é um valor aproximado por falta da área de F.

Poderíamos, também, ter definido a área de F como o número real cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos retangulares que contêm F.

Mas adotaremos neste texto a definição anterior, com aproximação por falta.

4. Nota histórica

Como vimos no Capítulo 1, não se medem segmentos de reta nos Elementos de Euclides, pois há segmentos incomensuráveis com qualquer unidade que se adote mas não havia então números irracionais para representar seus comprimentos. A comparação entre dois segmentos se fazia mediante o conceito de razão entre eles, mas razões entre grandezas não eram consideradas como números. Analogamente, não havia medida de áreas na Matemática grega organizada como ciência dedutiva.

Na realidade, Euclides nem sequer se deu ao trabalho de definir área.

Nos Elementos, duas figuras são chamadas "iguais" quando têm a mesma magnitude, isto é, o mesmo comprimento se são segmentos, a mesma área se são figuras planas, o mesmo volume se são sólidos, ou a mesma abertura se são ângulos.

A noção de figuras congruentes (aquelas que coincidem por superposição) só veio a ter interesse independente em Geometria muito depois.

Para Euclides, a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. (Com efeito, o Axioma 4 dos Elementos diz:"Duas figuras que coincidem por superposição são iguais".) Assim, era importante para ele dispor de critérios que assegurassem a superponibilidade, por exemplo, de dois triângulos. (Os 3 casos familiares de "igualdade de triângulos".) Cumpridas essas condições, o Axioma 4 garantiria a mesma área para os triângulos dados.

Evidentemente, para segmentos de reta, serem congruentes é o mesmo que terem a mesma medida. Mas dois triângulos ou dois paralelogramos podem ter bases e alturas iguais sem serem congruentes.

Portanto, quando Euclides enuncia que triângulos ou paralelogramos com bases iguais e situados entre as mesmas paralelas são iguais, o significado desta última palavra "iguais" é

de que as figuras em questão têm a mesma área. E a demonstração se faz por meio de decomposição em figuras congruentes, como fizemos na seção 2 acima.

Este fato é suficiente para permitir a Euclides demonstrar o Teorema de Pitágoras ainda no primeiro dos treze livros dos Elementos, sem fazer apelo a razões e proporções, das quais só vem a tratar no Livro V.

Como se sabe, o Teorema de Pitágoras afirma que em todo triângulo retângulo, a área do quadrado que tem como lado a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados os catetos.

É a seguinte a demonstração de Euclides:

No triângulo retângulo ABC, para provar que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa BC é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos AB e AC, Euclides traça AF perpendicular a BC e a prolonga até G. Traça também AE e CD.

Os triângulos ABE e CBD têm a mesma área porque são congruentes (um ângulo igual entre dois lados iguais). Os triângulos

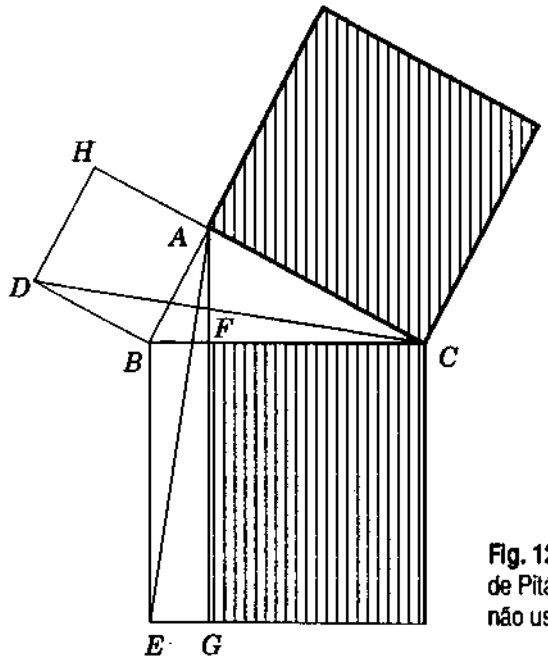


Fig. 12. Euclides preferiu demonstrar o Teorema de Pitágoras com base nesta figura porque assim não usaria a teoria das proporções.

ABE e *FEB* têm áreas iguais pois têm a mesma base e alturas iguais. Assim, a área de *ABE* é a metade da área do retângulo *BEGF*.

Analogamente, *CDB* tem área igual à de *ADB*, que é a metade do quadrado *ABDH*. Segue-se que a área deste quadrado é igual à área do retângulo *BEGF*.

Do mesmo modo se mostra que a área do quadrado e do retângulo hachurados verticalmente na figura são iguais. Daí resulta o Teorema de Pitágoras.

Depois disso, Euclides volta a falar de áreas no Livro VI, para provar que (as áreas de) triângulos ou paralelogramos com alturas iguais estão entre si assim como suas bases, que (as áreas de) dois polígonos semelhantes estão entre si assim como os quadrados de dois lados homólogos e, quase no fim dos Elementos, (Livro XII) para demonstrar que (as áreas de) dois círculos estão entre si assim como os quadrados dos seus diâmetros.

5. Um comentário de Proclus

Proclus (410-485 D.C.) foi autor de um livro de comentários sobre o Livro I dos Elementos de Euclides, onde explica, comenta e analisa as proposições do Livro I. A respeito da demonstração acima, Proclus escreveu o seguinte:

"Se dermos ouvidos aos que relatam História Antiga, acharemos alguns que atribuem este teorema a Pitágoras e dizem que ele sacrificou um boi pela descoberta. De minha parte, embora admire aqueles que primeiro tomaram conhecimento da verdade deste teorema, me maravilho mais com o autor dos Elementos, não somente porque ele o estabeleceu mediante a demonstração mais lúcida, mas porque ele insistiu no teorema mais geral, pelos irrefutáveis argumentos científicos do Livro VI".

O "teorema mais geral" a que se refere Proclus é a proposição 31 do Livro VI, cujo enunciado é: "Em todo triângulo retângulo, a figura construída sobre a hipotenusa é igual às figuras semelhantes e semelhantemente dispostas sobre os catetos". (Aqui, "igual às" significa "tem área igual à soma das áreas das".) Vide Exercício 13 do Capítulo 3.

Os "irrefutáveis argumentos científicos do Livro VI" constituem a teoria da semelhança.

6. Exercícios

1. Um *losango* é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. Prove que todo losango é um paralelogramo e que um quadrilátero é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares e se cortam mutuamente ao meio.

2. Mostre que a área de um losango é igual à metade do produto das diagonais.

3. Prolongando os lados não paralelos, considere o trapézio de bases b, b' e altura a como diferença entre um triângulo de base b e altura $a + a'$ e um triângulo de base b' e altura a'. Obtenha assim uma outra fórmula para a área do trapézio. Compare-a com a que foi provada no texto.

4. Sejam E e F os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio $ABDC$. Prove que

$$\text{área}(ABF) + \text{área}(CDF) = \text{área}(AEF) + \text{área}(CEF).$$

5. Chama-se *base média* de um trapézio ao segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos. Prove que a área do trapézio é igual ao produto da base média pela altura.

6. Por um ponto arbitrário da diagonal de um paralelogramo, trace duas paralelas aos lados, decompondo-o assim em 4 paralelogramos menores (desenhe a figura). Dois deles têm áreas iguais. Identifique-os e prove a afirmação.

7. Sejam dados os números reais positivos a, b e c. Caminhando sempre para a direita e para baixo, trace uma poligonal cujos 4 lados, alternadamente horizontais e verticais, medem a, b, c e x, onde x é tomado de forma que o primeiro, terceiro e o quinto (último) vértice da poligonal estejam em linha reta. Complete a figura de modo a obter um retângulo de base $a+c$ e altura $b+x$. Use o exercício anterior para concluir que $a/b=c/x$. (Método geométrico para achar a quarta proporcional entre 3 números dados.)

8. No triângulo ABC, se o ângulo $\angle A$ é obtuso (respect. agudo) então a área do quadrado construido sobre o lado BC é maior (respect. menor) do que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados AB e AC. Conclua daí a recíproca do Teorema de Pitágoras.

9. No plano Π considere o sistema de coordenadas cartesianas, definido por dois eixos ortogonais OX e OY. Dados os números reais positivos a e b, defina a função $f: \Pi \to \Pi$ requerendo que $f(P)=P'$, onde $P=(x,y)$ e $P'=(ax,by)$. Prove que uma figura F qualquer do plano Π é transformada por f numa figura F' cuja área é igual a ab vezes a área de F.

10. Como no exercício anterior, considere um sistema de eixos ortogonai no plano Π. Prove:

a) Que o ponto $P=(x,y)$ pertence ao círculo C de centro O e raio 1 se, e somente se, $x^2+y^2 \leq 1$.

b) Que a função do exercício anterior transforma o círculo C na figura E formada pelos pontos $P=(x,y)$ tais que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

11. A figura E do exercício 10 chama-se uma *elipse* cujos eixos medem $2a$ e $2b$. Suponha $a \geq b$. Os pontos $A=(-c,0)$ e $A'=(c,0)$, com $c=\sqrt{a^2-b^2}$, chamam-se *focos* da elipse. Prove que o ponto $P=(x,y)$ pertence à elipse se, e somente se, $\overline{PA}+\overline{PA'} \leq 2a$.

Conclua que a área da elipse de eixos $2a$ e $2b$ é igual a ab vezes a área do círculo de raio 1.

12. A área do quadrado inscrito num círculo é igual à metade da área do quadrado circunscrito no mesmo círculo.

13. Prove que as três medianas de um triângulo o decompõem em seis triângulos menores com áreas iguais.

14. Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são os vértices de um paralelogramo cuja área é a metade da área do quadrilátero dado.

15. Sejam W, X, Y e Z pontos situados sobre cada um dos quatro lados de um retângulo. Suponha que o segmento WX seja paralelo às bases desse retângulo. Mostre que o quadrilátero que tem W, X, Y e Z como vértices tem área igual à metade da área do retângulo.

16. Sejam A, B, C e D vértices consecutivos de um polígono com n lados. Pelo ponto B, trace uma paralela à diagonal AC. Seja E a interseção dessa paralela com o prolongamento do lado DC. Substitua os lados AB, BC e CD por AE e ED. Mostre que assim se obtém um polígono com $n-1$ lados, de mesma área que o anterior. Prossiga, até concluir que se pode construir geometricamente um triângulo com mesma área que um polígono convexo dado.

17. Calcule a área do hexágono regular de lado l.

18. Num triângulo isósceles de base b e dois lados iguais a 1, seja a a altura baixada a partir de um dos vértices da base. Mostre que se tem

$$b^2=2-2\sqrt{1-a^2}.$$

Conclua daí que se l_n é o comprimento do lado de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio 1 então

$$l_{2n}^2=2-\sqrt{4-l_n^2}.$$

19. Um triângulo retângulo tem catetos de comprimentos 1 e L. A partir do vértice do ângulo reto, ao longo do cateto L, toma-se um segmento de comprimento x tal que a perpendicular baixada da extremidade desse segmento sobre a hipotenusa também tem comprimento x. Mostre que $x = (-1 + \sqrt{1 + L^2})/L$. Conclua daí que se L_n é o comprimento do lado do polígono regular de n lados circunscrito ao círculo de raio 1 então

$$L_{2n} = (-4 + 2\sqrt{4 + L_n^2})/L_n.$$

3. Semelhança e Áreas

1. Introdução

A noção de semelhança corresponde à idéia natural de "mudança de escala", isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções.

No estudo tradicional da Geometria, o conceito de semelhança, principalmente de triângulos, ocupa um lugar bem destacado. Os livros em geral definem triângulos semelhantes como aqueles que têm "ângulos iguais e lados homólogos proporcionais". Esta definição se estende literalmente para polígonos.

Entretanto, em muitas situações, gostaríamos de dizer que duas figuras são semelhantes embora elas não sejam polígonos. Por exemplo, a foto ampliada de uma pessoa é semelhante à figura que está no filme antes da reprodução; as imagens na tela de um cinema são semelhantes às da película que está sendo projetada e uma bola de gude é semelhante a uma bola de bilhar.

Nos exemplos acima, como em muitos outros, não podemos aplicar a definição de semelhança comumente encontrada nos livros porque não há ângulos nem lados para comparar.

Mesmo num curso de Geometria, a maneira mais natural de obter a fórmula da área de um círculo começa com a observação de que dois círculos quaisquer são figuras semelhantes. Mas tal observação só pode ser feita se contarmos com uma definição de semelhança que não se baseie em ângulos e lados pois estas coisas não existem num círculo.

A Geometria que se estuda hoje nas escolas provém de um livro extraordinário, intitulado "Elementos", escrito há cerca de 2.300 anos por um professor da Universidade de Alexandria chamado Euclides. Desde então, os Elementos de Euclides foram publicados em mais de um milhar de edições, nas mais diversas línguas, antigas e modernas. Até recentemente ainda eram usados nas escolas da Europa. Os textos atuais de Geometria que o substituem são todos modelados nessa obra imortal, onde pela primeira vez se organizou, de modo sistemático e com refinado bom gosto, o conhecimento matemático da época.

Muitas vezes, ao percebermos deficiências ou impropriedades no tratamento de certos tópicos em compêndios de hoje, recorremos às origens, consultando Euclides para ver como as idéias nasceram.

Que diz Euclides sobre semelhança?

Os Elementos são organizados em treze livros. O Livro VI é dedicado à noção de semelhança. Ele abre com a seguinte definição:

"Figuras retilíneas semelhantes são aquelas cujos ângulos são iguais e os lados que compreendem ângulos iguais são proporcionais".

No Livro XI, onde começa a ser estudada a Geometria no espaço, ocorre nova definição: " chamam-se figuras sólidas semelhantes as figuras limitadas por um número igual de figuras planas semelhantes".

Numa única outra ocasião Euclides fala em figuras semelhantes não limitadas inteiramente por lados retos ou faces planas. É no Livro III, dedicado ao estudo do círculo. Ali, dois segmentos de círculo são chamados semelhantes quando os ângulos centrais neles inscritos são iguais. Mas esta é uma definição isolada e específica. Serve apenas para provar que dois segmentos semelhantes que subtendem cordas iguais são congruentes. E o assunto morre aí.

Mas não é preciso recuar tanto assim. Há muito tempo que se conhece a definição correta e geral de semelhança. Ela é extremamente simples e permite que se desenvolva toda a teoria elementarmente. Nossos livros didáticos poderiam adotá-la com

vantagens. Assim fazendo, evitariam um tratamento incompleto, no qual se dá uma definição válida apenas para polígonos enquanto a maior parte dos exemplos com que nos deparamos não se enquadra nessa categoria.

Faremos a seguir, de forma resumida, uma apresentação do tópico "semelhança" sob o ponto de vista que julgamos mais adequado.

2. A definição de semelhança

Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo.

Diz-se que F e F' são *semelhantes*, com *razão de semelhança* r, quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma : F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade:

se X, Y *são pontos quaisquer de* F *e* $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ *são seus correspondentes em* F' *então* $\overline{X'Y'} = r.\overline{XY}$.

A correspondência biunívoca $\sigma : F \to F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se uma *semelhança de razão* r entre F e F'. Se $X' = \sigma(X)$, diz-se que os pontos X e X' são *homólogos*.

Evidentemente, toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $\sigma : F \to F'$ é uma semelhança de razão 1.

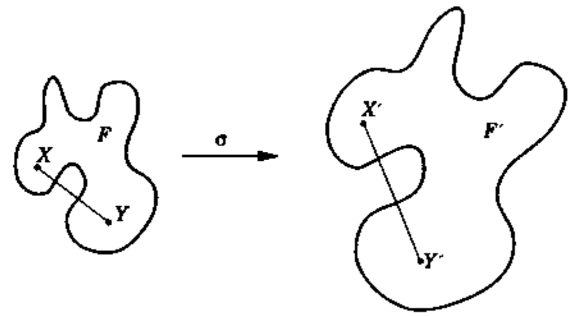


Fig. 1

Também, se F é semelhante a F' então F' é semelhante a F pois, dada uma semelhança $\sigma : F \to F'$ de razão r, a função inversa $\sigma^{-1} : F' \to F$ é uma semelhança de razão $1/r$.

Tem-se ainda transitividade: se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F'' então F é semelhante a F''. Com efeito, se $\sigma : F \to F'$ e $\sigma' : F' \to F''$ são semelhanças, de razões r e r' respectivamente, então a função composta $\sigma' \circ \sigma : F \to P''$ é uma semelhança de razão $r.r'$.

Uma semelhança de razão 1 chama-se uma *isometria*. Portanto, uma isometria $\sigma : F \to F'$ é uma correspondência biunívoca tal que, para quaisquer pontos X, Y em F, a distância de $X' = \sigma(X)$ a $Y' = \sigma(Y)$ é igual à distância de X a Y.

Quando existe uma isometria entre as figuras F e F', diz-se que estas são *congruentes*.

Um exemplo simples de figuras semelhantes é dado por dois segmentos de reta arbitrários AB e CD. Se $\overline{CD} = r.\,\overline{AB}$, podemos definir uma semelhança $\sigma : AB \to CD$, de razão r, fazendo corresponder a cada ponto X do segmento AB o ponto X' de CD tal que $\overline{CX'} = r.\,\overline{AX}$.

Para mostrar que σ é realmente uma semelhança, tomemos arbitrariamente os pontos X,Y em AB. Suponhamos a notação escolhida de modo que X esteja entre A e Y. Então, pela definição de σ, segue-se que X' está entre C e Y'. Logo

$$\overline{X'Y'} = \overline{CY'} - \overline{CX'} = r.\,\overline{AY} - r.\,\overline{AX} = r.\,(\overline{AY} - \overline{AX}) = r.\,\overline{XY}.$$

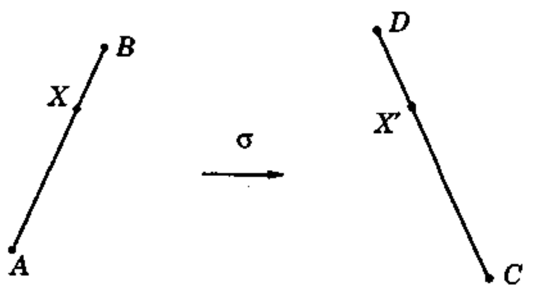


Fig. 2 Uma semelhança entre os segmentos AB e CD. Se o ponto X está duas vezes mais próximo de B do que de A, seu homólogo X' dista duas vezes mais de C do que de D.

Outro exemplo simples de semelhança pode ser dado mostrando-se que duas semi-retas quaisquer S e S' são figuras semelhantes. Com efeito, sejam O e O' as origens de S e S' respectivamente. Dado qualquer número positivo r, definiremos uma semelhança $\sigma : S \to S'$, de razão r, fazendo corresponder a cada ponto X em S o ponto $X' = \sigma(X)$ em S' tal que $\overline{O'X'} = r.\,\overline{OX}$. A verificação de que σ é uma semelhança se faz como acima. Analogamente, duas retas quaisquer são semelhantes.

Os exemplos acima são praticamente os únicos que podem ser dados antes de provarmos o Teorema Fundamental, na seção seguinte. Passaremos agora a examinar algumas propriedades das semelhanças.

Lema. *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração: Seja $\sigma : F \to F'$ uma semelhança de razão r. Dados três pontos A, B, C em F tais que C pertence ao segmento de reta AB, mostraremos que $C' = \sigma(C)$ pertence ao segmento $A'B'$, onde $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$. Com efeito, temos $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, logo

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = r.\,\overline{AC} + r.\,\overline{CB} = r.\,(\overline{AC} + \overline{CB}) = r.\,\overline{AB} = \overline{A'B'},$$

e daí concluímos que C' pertence a $A'B'$.

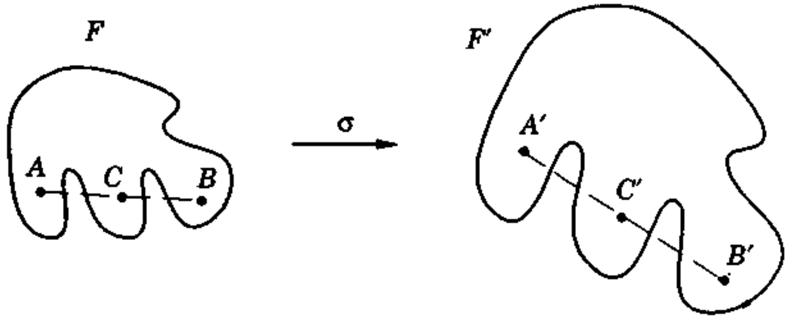


Fig. 3 Mesmo que o segmento de reta que contém os pontos A, B, C não esteja contido na figura F, seus homólogos A', B', C' são colineares.

Teorema 1. *Uma semelhança $\sigma : F \to F'$, de razão r, transforma:*

1) Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'.

2) Um círculo de raio a contido em F num círculo de raio r.a contido em F'.

3) Pontos interiores a F em pontos interiores a F'.

4) Pontos do contorno de F em pontos do contorno de F'.

5) Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).

Demonstração: 1) Dado o segmento de reta AB contido em F, sejam $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$. Para todo ponto C em AB, seu homólogo $C' = \sigma(C)$ pertence a $A'B'$ em virtude do Lema. Reciprocamente, dado qualquer ponto C' em $A'B'$, temos $C' = \sigma(C)$, onde $C = \sigma^{-1}(C')$. Como σ^{-1} é uma semelhança, segue-se do Lema que C pertence a AB. Assim a semelhança σ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos de reta AB e $A'B'$.

2) O círculo de centro O e raio a, suposto contido em F, é a reunião dos segmentos de reta OX tais que $\overline{OX} = a$. Sua imagem por σ é a reunião dos segmentos $O'X'$, com $O' = \sigma(O)$, tais que $\overline{O'X'} = r.a$, portanto é o círculo de centro O' e raio $r.a$.

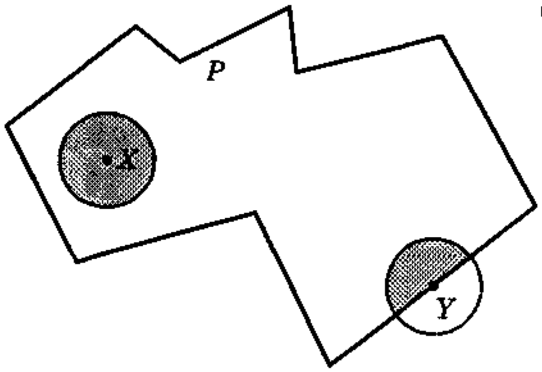


Fig. 4 O ponto X é interior ao polígono P e o ponto Y pertence ao seu contorno.

3) Um ponto X diz-se *interior* à figura F quando é centro de algum círculo inteiramente contido em F. Seu homólogo $X' = \sigma(X)$ é, pelo que vimos acima, o centro de um círculo de raio $r.a$, contido em F'. Portanto, X' é ponto interior a F'.

4) Diz-se que um ponto X pertence ao *contorno* da figura F quando X pertence a F mas não é interior a F, ou seja, nenhum círculo de centro X pode estar inteiramente contido em F. Neste caso, $X' = \sigma(X)$ deve pertencer ao contorno de F' pois se X' estivesse no interior de F' então, em virtude de 3), $X = \sigma^{-1}(X')$ também estaria no interior de F.

5) Suponhamos agora que F e F' sejam polígonos e que X seja um vértice de F. Em particular, X está no contorno de F logo, por 4), seu homólogo $X' = \sigma(X)$ está no contorno de F'. Se não fosse vértice, o ponto X' pertenceria ao lado $A'B'$ de F', sendo diferente de $A' = \sigma(A)$ e de $B' = \sigma(B)$. Então X pertenceria ao lado AB de F, com $X \neq A$ e $X \neq B$, logo X não seria vértice de F.

Se $\sigma : F \to F'$ é uma semelhança que transforma o segmento de reta AB, contido em F, no segmento $A'B'$, contido em F', estes segmentos se dizem *homólogos*.

3. O Teorema Fundamental

Sejam O um ponto do plano Π (ou do espaço E) e r um número real positivo. A *homotetia* de centro O e razão r é a função $\sigma : \Pi \to \Pi$ (ou $\sigma : E \to E$) definida do seguinte modo: $\sigma(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$, $\sigma(X) = X'$ é o ponto da semi-reta OX tal que $\overline{OX'} = r \cdot \overline{OX}$.

Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma.

Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão $1/r$.

Duas figuras F e F' chamam-se *homotéticas* quando existe uma homotetia σ tal que $\sigma(F) = F'$.

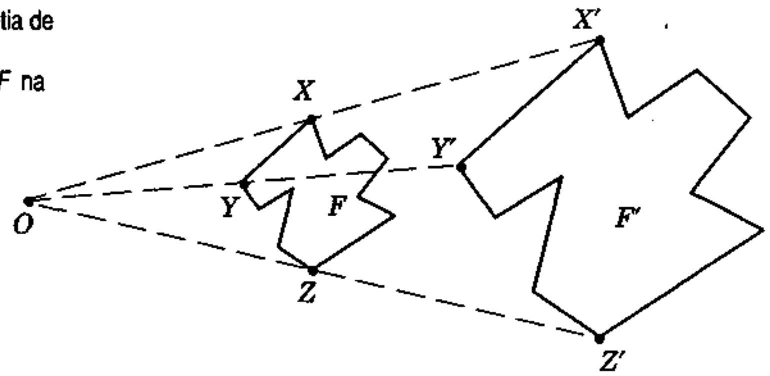


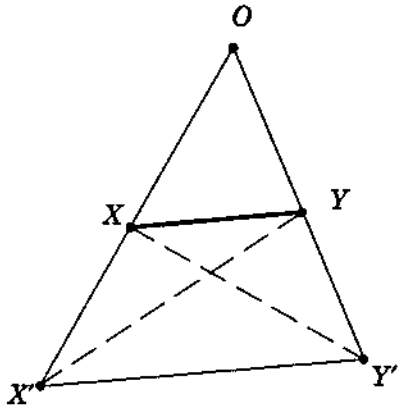
Fig. 5 Uma homotetia de centro O e razão 2 transforma a figura F na figura F'.

Um exemplo de homotetia (de razão $r > 1$) se obtém considerando o centro O como o foco de um projetor de slides; F' é a imagem ampliada do slide F, que se vê sobre a tela.

Numa homotetia, os pontos O, X e X' são sempre colineares, nesta ordem se $r > 1$ ou na ordem O, X', X se $0 < r < 1$. Já numa semelhança, as figuras F e F' podem ocupar posições quaisquer, como numa foto e sua ampliação, que podem ser colocadas em vários lugares mas continuam semelhantes.

Teorema 2. *Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.*

Fig. 6



Demonstração: Seja σ uma homotetia de centro O e razão r. O caso $r = 1$ é trivial, logo podemos supor $r \neq 1$. Mostremos que σ é

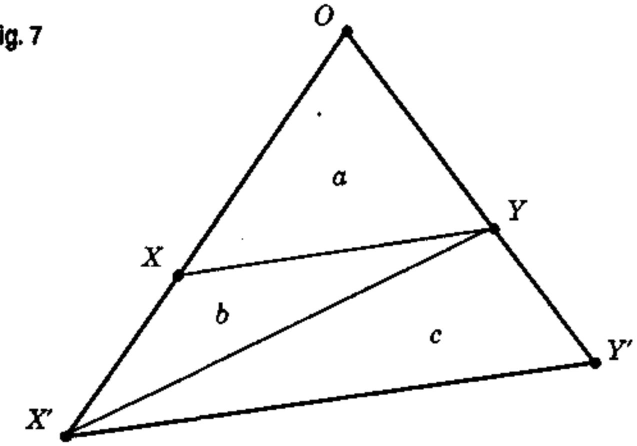
uma semelhança de razão r. Para isso, consideremos dois pontos quaisquer X, Y. Se X, Y e O estiverem sobre a mesma reta, é fácil ver que $\overline{X'Y'} = r.\ \overline{XY}$. Suporemos então que X, Y e O não são colineares. Indiquemos com $[MNP]$ a área de um triângulo qualquer MNP. Como as áreas de dois triângulos com alturas iguais são proporcionais às suas bases, de $\overline{OX'} = r.\ \overline{OX}$ e $\overline{OY'} = r.\ \overline{OY}$ concluímos que $[OXY'] = r.[OXY]$ e $[OYX'] = r.[OXY]$. Logo $[OXY'] = [OYX']$. Subtraindo de ambos os membros desta igualdade a área da parte comum OXY, resulta $[XYX'] = [XYY']$. Como estes dois triângulos têm a mesma base XY, da igualdade de suas áreas segue-se que suas alturas são iguais. Isto significa que XY é paralela a $X'Y'$.

Mostremos agora que $\overline{X'Y'}/\overline{XY} = r$. Na Figura 7, as letras a, b e c significam as áreas dos triângulos por elas indicados. Usando novamente o fato de que as áreas de triângulos com a mesma altura são proporcionais às suas bases, temos:

$$a + b = r.a, \quad \text{pois} \quad \overline{OX'} = r.\overline{OX} \quad \text{e}$$
$$a + b + c = r.(a + b), \quad \text{pois} \quad \overline{OY'} = r.\overline{OY}.$$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades à esquerda,

Fig. 7



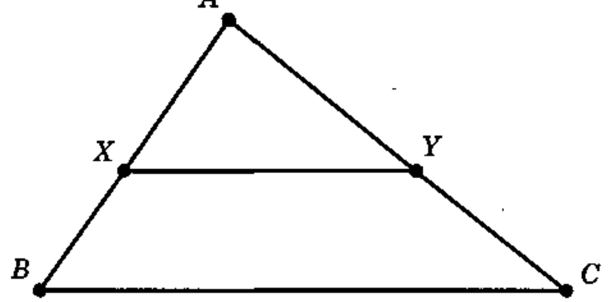
obtemos $c = r.b$. Como XY e $X'Y'$ são paralelos, os triângulos de áreas b e c têm a mesma altura. Assim, a razão $r = c/b$ entre as suas áreas é igual à razão entre suas bases, isto é, $\overline{X'Y'}/\overline{XY} = r$, como queríamos demonstrar.

Corolário. *Toda paralela a um lado de um triângulo determina um triângulo parcial semelhante ao triângulo total.*

Com efeito, no triângulo ABC, seja XY paralela a BC.

A homotetia σ de centro A e razão $r = \overline{AB}/\overline{AX}$ transforma X em

Fig. 8



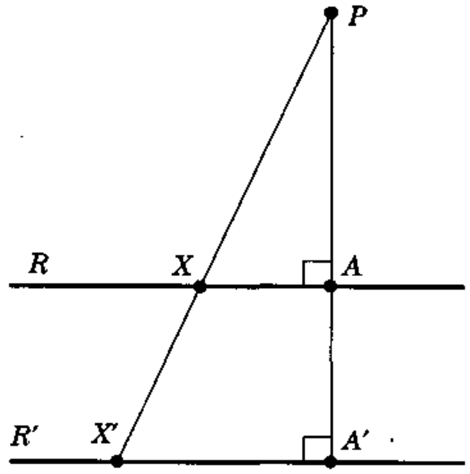
B e Y num ponto Y' situado na semi-reta AC. A imagem de XY por essa homotetia é o segmento BY', paralelo a XY e começando em B. Assim Y' pertence às retas BC e AC, isto é, $Y' = C$. Portanto $\sigma(A) = A$, $\sigma(X) = B$, $\sigma(Y) = C$, isto é, σ é uma semelhança entre os triângulos AXY e ABC.

Recíproca do corolário. *Dado o triângulo ABC, tomemos os pontos X no lado AB e Y no lado AC. Se $\overline{AB}/\overline{AX} = \overline{AC}/\overline{AY}$ então XY é paralelo a BC.*

Com efeito, considerando a homotetia σ de centro A e razão $r = \overline{AB}/\overline{AX} = \overline{AC}/\overline{AY}$, vemos que $B = \sigma(X)$ e $C = \sigma(Y)$. Resulta então do Teorema 2 que XY e BC são paralelos.

Sejam R e R' retas paralelas e P um ponto no plano de R e R', porém fora dessas retas. A *projeção central*, a partir de P, de R sobre R' é a função $\sigma: R \to R'$, que associa a cada ponto X da reta R o ponto $X' = \sigma(X)$, interseção da reta R' com a semi-reta PX.

Fig. 9

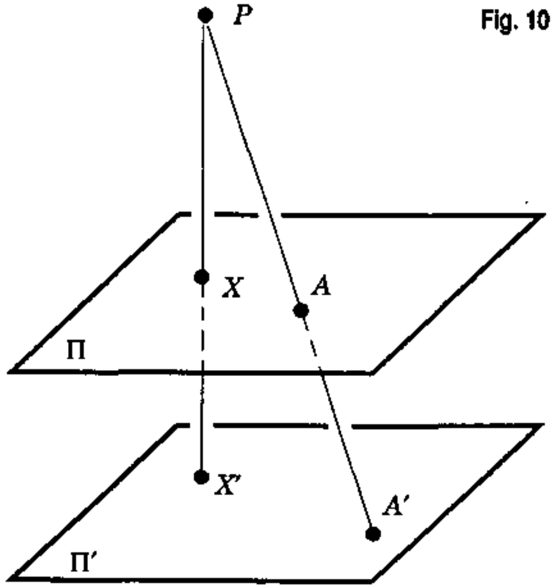


A projeção central $\sigma : R \to R'$ é uma semelhança. Com efeito, seja A o pé da perpendicular baixada de P sobre R. Pondo

$$r = \overline{PA'}\,/\,\overline{PA} = \frac{\text{distância de } P \text{ a } R'}{\text{distância de } P \text{ a } R},$$

vemos que σ coincide, em R, com a homotetia de centro P e razão r pois, sendo os segmentos AX e $A'X'$ paralelos, o Corolário do Teorema 2 nos dá $\overline{PX'}/\overline{PX} = \overline{PA'}/\overline{PA} = r$.

Fig. 10



Analogamente, se Π e Π' são planos paralelos e P é um ponto do espaço que não pertence a Π nem a Π', a projeção central, a partir de P, do plano Π sobre o plano Π' é uma semelhança entre Π e Π', cuja razão é o quociente r da distância de P a Π' pela distância de P a Π.

Com efeito, seja A o pé da perpendicular baixada de P sobre o plano Π.

Afirmamos que a projeção central $\sigma : \Pi \to \Pi'$, definida por $\sigma(X) = X'$ = interseção da semi-reta PX com o plano Π', é a restrição a Π da homotetia de centro P e razão $r = \overline{PA'}/\overline{PA}$. De fato, sendo Π e Π' paralelos, o segmento AX é paralelo a $A'X'$. Pelo Corolário do Teorema 2, temos $\overline{PX'}/\overline{PX} = \overline{PA'}/\overline{PA} = r$.

O Teorema 2 pode ser enunciado, um tanto vagamente, dizendo-se que "figuras homotéticas são figuras semelhantes, semelhantemente dispostas".

Nota 1. Entre os textos de Geometria mais notáveis depois dos Elementos estão os "Éléments de Géométrie" de Legendre (1794), e as "Léçons de Géométrie Élémentaire" de Hadamard (1898). Legendre dá a mesma definição de semelhança de Euclides, enquanto que Hadamard define figuras semelhantes como aquelas que são congruentes a figuras homotéticas. Em termos mais precisos, Hadamard chama as figuras F e F' semelhantes quando existe uma figura F'', congruente a F', tal que F e F'' são homotéticas. Do nosso ponto de vista isto é um teorema, segundo o qual toda semelhança é composta de uma homotetia com uma isometria.

A demonstração é imediata: dada a semelhança $\sigma : F \to F'$, de razão r, fixemos um ponto O e consideremos a homotetia τ, de centro O e razão r. Seja F'' a imagem de F por essa homotetia. A função inversa τ^{-1} é uma homotetia (portanto uma semelhança) de razão $1/r$. Logo, a função composta $\lambda = \sigma \circ \tau^{-1} : F'' \to F'$ é uma isometria. Assim $\sigma = \sigma \circ \tau^{-1} \circ \tau = \lambda \circ \tau$ é composta da homotetia τ com a isometria λ.

Portanto, a definição de semelhança de Hadamard coincide com a nossa.

Nota 2. A demonstração do Teorema 2 dada acima é uma adaptação de um argumento devido a Euclides, que já consta no Livro VI dos Elementos. O uso de área na demonstração evita repetir a consideração de casos ("comensurável" vs "incomensurável") já feita quando se deduziu a fórmula da área do quadrado. Os autores modernos (a partir de Legendre e Hadamard) incorrem nessa repetição, utilizando duas vezes o teorema aritmético segundo o qual toda função crescente $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, tal que $f(n.x) = n.f(x)$ para qualquer $n \in \mathbf{N}$ e qualquer $x \geq 0$, é da forma $f(x) = c.x$. Vide, por exemplo, "Meu Professor de Matemática", pags. 164 e 167.

4. Semelhança de triângulos

Mostraremos agora que nossa definição de semelhança, quando aplicada a triângulos, reduz-se à definição tradicional.

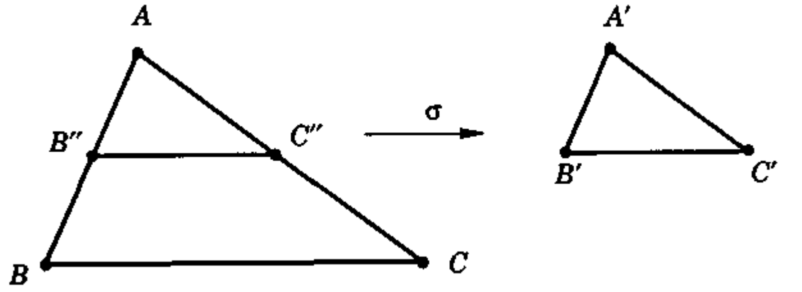
Teorema 3. *Dois triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições abaixo então eles são semelhantes:*

a) Têm lados proporcionais;

b) Têm ângulos iguais;

c) Têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.

Fig. 11



Demonstração: Seja $\sigma : ABC \to A'B'C'$ uma semelhança de razão r entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, com $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Então, pela definição de semelhança,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r$$

logo os triângulos têm os lados homólogos proporcionais. Para provar que os ângulos são iguais, suponhamos, a fim de fixar idéias, que seja $0 < r < 1$. A homotetia τ, de centro A e razão r, transforma o triângulo ABC no triângulo parcial $A\,B''C''$, com $B''C''$ paralela a BC. Então $\angle B'' = \angle\ B$ e $\angle C'' = \angle\ C$.

Mas os triângulos $A\,B''\,C''$ e $A'B'C'$ são congruentes pois

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'}\ (= r.\overline{\mathrm{AB}}),$$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'}\ (= r.\overline{\mathrm{AC}})$$

e

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'}\ (= r.\overline{\mathrm{BC}}).$$

Logo

$$\angle A = \angle\ A',\ \ \angle\ B = \angle\ B'\ \text{ e }\ \angle\ C = \angle\ C'.$$

a) Sejam agora ABC e $A'B'C'$ triângulos tais que

$$\overline{A'B'} = r.\overline{AB},\ \ \overline{A'C'} = r.\overline{AC}\ \ \text{ e }\ \ \overline{B'C'} = r.\overline{BC}$$

para um certo $r > 0$. (Isto significa que eles têm os lados proporcionais.) A homotetia de centro A e razão r transforma ABC no triângulo $A\,B''C''$ cujos lados medem

$$\overline{AB''} = r.\overline{\mathrm{AB}},\ \ \overline{AC''} = r.\overline{\mathrm{AC}}\ \ \text{ e }\ \ BC = r.\ \overline{BC}.$$

$AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes porque têm os lados iguais. Como $AB''C''$ é semelhante a ABC, segue-se que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

b) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos tais que

$$\angle A = \angle\ A',\ \ \angle\ B = \angle\ B'\ \text{ e }\ \angle\ C = \angle\ C'.$$

Nas retas AB e AC tomemos os pontos B'' e C'' respectivamente, de modo que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes porque têm um ângulo igual ($\angle\ A = \angle\ A'$) compreendido entre lados iguais. Logo $\angle B'' = \angle\ B'$, donde $\angle B = \angle\ B''$. Conclui-se que as retas $B''C''$ e BC são paralelas e daí

os triângulos $AB''C''$ e ABC são semelhantes. Como $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, resulta que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

c) Finalmente, suponhamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ cumpram

$$\angle\ A = \angle\ A',\quad \overline{A'B'} = r.\overline{AB}\quad \text{e}\quad \overline{A'C'} = r.\overline{AC}.$$

Novamente tomamos sobre as retas AB e AC, respectivamente, os pontos B'' e C'' com

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'}\quad \text{e}\quad \overline{AC''} = \overline{A'C'}.$$

Os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, como no caso b). A homotetia de centro A e razão r transforma AB em AB'' e AC em AC'' porque

$$\overline{AB''} = r.\overline{AB}\quad \text{e}\quad \overline{AC''} = r.\overline{AC}.$$

Logo essa homotetia é uma semelhança entre o triângulo ABC e o triângulo $AB''C''$. Como $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, segue-se que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Lembremos que *ângulo* é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem. Essas semi-retas chamam-se os *lados* e sua origem comum chama-se o *vértice* do ângulo.

Assim, quando se diz que o ponto P pertence ao ângulo $\angle A$, isto significa que P está sobre um dos lados desse ângulo. (Podendo estar sobre ambos os lados, se é o vértice.)

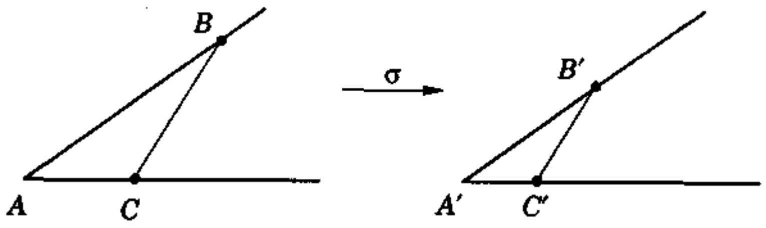
Se os lados do ângulo são semi-retas opostas (isto é, estão sobre a mesma reta) então o ângulo chama-se *raso*.

Se o ângulo $\angle A$ não é raso, o vértice A é o único dos seus pontos que não pode ser interior a um segmento de reta contido num dos lados de $\angle A$.

Corolário 1. *Dois ângulos semelhantes são iguais.*

Evidentemente, basta considerar o caso em que os ângulos não são rasos. Seja $\sigma:\ \angle\ A \to\ \angle\ A'$ uma semelhança entre o ângulo $\angle A$ e o ângulo $\angle A'$. Em primeiro lugar, notemos que deve ser $\sigma(A) = A'$ pois se $\sigma(A) = X$ fosse outro ponto do ângulo $\angle A'$ diferente do vértice A', então X pertenceria ao interior de um segmento de reta $Y'Z'$ contido num dos lados do ângulo $\angle A'$. Considerando a semelhança inversa $\sigma^{-1}: \angle A' \to \angle A$, concluiríamos que o vértice $A = \sigma^{-1}(X)$ pertenceria ao interior do segmento de reta YZ, contido num dos lados de $\angle A$, com $\sigma(Y) = Y'$, $\sigma(Z) = Z'$. Mas isto é absurdo, logo $X = A'$. Em seguida, consideremos dois pontos quaisquer B e C em lados distintos do ângulo $\angle A$. Sejam B' e C', respectivamente, os homólogos de B e C.

Fig. 12



Pela definição de semelhança, temos

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r$$

Pelo item a) do Teorema 3, segue-se que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. A primeira parte do mesmo Teorema assegura que os ângulos homólogos desse triângulos são iguais. Em particular, $\angle A = \angle A'$.

Segue-se do Corolário 1 que toda figura semelhante a um retângulo é ainda um retângulo.

5. Semelhança no círculo

Sejam O um ponto do plano e a um número real positivo. O *círculo* de centro O e raio a é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância $\leq a$ do ponto O.

Noutras palavras, o círculo de centro O e raio a é a reunião de todos os segmentos de reta de comprimento a, traçados no plano a partir do ponto O. A palavra *raio* às vezes se usa também para designar cada um desses segmentos. Esta ambigüidade não costuma causar confusão pois o significado sempre fica claro a partir do contexto.

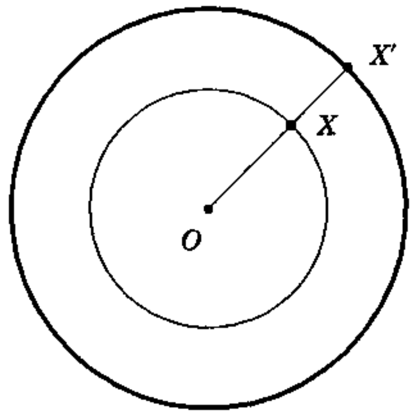
O conjunto dos pontos do plano situados à distância a do centro O, isto é, a linha que limita o círculo, chama-se *circunferência*. Às vezes também se usa a palavra "círculo" para designar essa linha. (O próprio Euclides cometia esse abuso de linguagem. Ver também "Meu Professor de Matemática", pag. 196.)

Evidentemente, dois círculos de raios iguais são figuras congruentes.

Teorema 4. *Dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que o círculo C, de raio a, e o círculo C', de raio a', têm o mesmo centro O. A homotetia de centro O e razão $r = a'/a$ transforma cada segmento de reta de origem O e comprimento a num segmento de origem O e comprimento a', situado sobre a mesma reta. Logo, essa homotetia define uma semelhança entre C e C'.

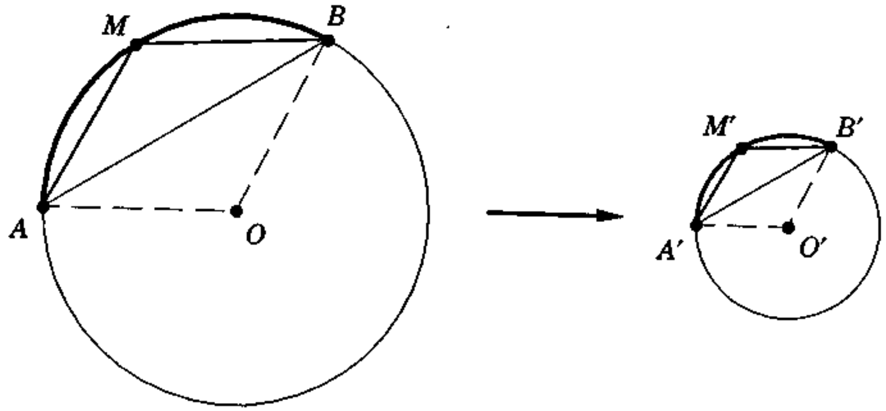
Fig. 13



Teorema 5. *Dois arcos de circunferência são semelhantes se, e somente se, subtendem o mesmo ângulo central.*

Demonstração: Sejam AB e $A'B'$ arcos de circunferência nos círculos de centro O e O' respectivamente. Eles subtendem os ângulos centrais $\alpha = \angle\ AOB$ e $\alpha' = \angle\ A'O'B'$. Sejam M o ponto médio de AB e M' o ponto médio de $A'B'$.

Fig. 14



Toda semelhança entre os arcos AB e $A'B'$ determina uma semelhança entre os triângulos AMB e $A'M'B'$, logo os ângulos $\angle M$ e $\angle M'$ são iguais. Daí resulta que os ângulos centrais α e α' também são iguais, pois $\alpha = 360° - 2\angle M$ e $\alpha' = 360° - 2\angle M'$. Assim, arcos semelhantes subtendem o mesmo ângulo central. Reciprocamente, suponhamos que os arcos AB e $A'B'$ subtendem ângulos centrais iguais. Sem perda de generalidade, podemos supor que os círculos onde estão situados esses arcos são concêntricos. Neste caso, a homotetia (com esse centro) que leva um círculo no outro é uma semelhança entre os arcos dados.

6. Relação entre semelhança e área

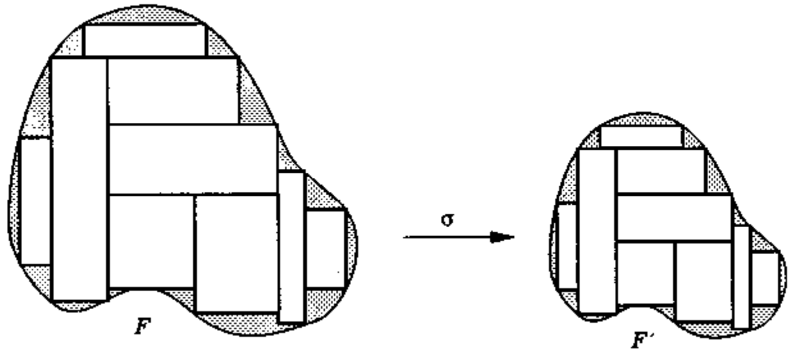
Resulta imediatamente da fórmula da área do retângulo que se multiplicarmos a base e a altura de um retângulo pelo mesmo número positivo r, a área desse retângulo fica multiplicada por r^2.

O teorema abaixo usa este caso particular para mostrar que se trata de uma situação bem mais geral.

Teorema 6. *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração: Seja $\sigma : F \to F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F'. Afirmamos que a área de F' é igual a r^2 vezes a área de F. Como vimos acima, isto é verdade quando F e F' são

Fig. 15



retângulos e portanto também quando F e F' são polígonos retangulares. Assim, todo polígono retangular P, contido em F, é transformado pela semelhança σ num polígono retangular P', contido em F', tal que a área de P' é igual a r^2 vezes a área de P. E vice-versa, todo polígono retangular Q', contido em F', é transformado por σ^{-1} num polígono retangular Q cuja área é $(1/r)^2$ vezes a área de Q', logo a área de Q' é r^2 vezes a área de Q. Assim, a área de F' é o número real cujas aproximações por falta são r^2 vezes as aproximações por falta da área de F. Desta maneira, temos:

$$\text{área de } F' = r^2 \times (\text{área de } F).$$

Observação: Para comentários sobre o Teorema 6 e seu análogo tri-dimensional (Exercício 2 do Cap. 4), veja "Meu Professor de Matemática", pag. 182.

7. Área do círculo e comprimento da circunferência

Como dois círculos com raios iguais são congruentes, e portanto têm a mesma área, a área de um círculo de raio r é uma função desse raio. Ora, um círculo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1, sendo r a razão de semelhança. Pelo que acabamos de ver, isto implica que a área de um círculo de raio r é r^2 vezes a área do círculo de raio 1.

Indicaremos, como é tradicional, com a letra grega π a área do círculo de raio 1. Sabe-se que π é um número irracional, cujo valor aproximado com 6 algarismos decimais exatos é $\pi = 3{,}141592$.

Então a área A de um círculo de raio r é dada pela fórmula

$$A = \pi \,.\, r^2$$

onde o número π é, por definição, a área de um círculo de raio 1.

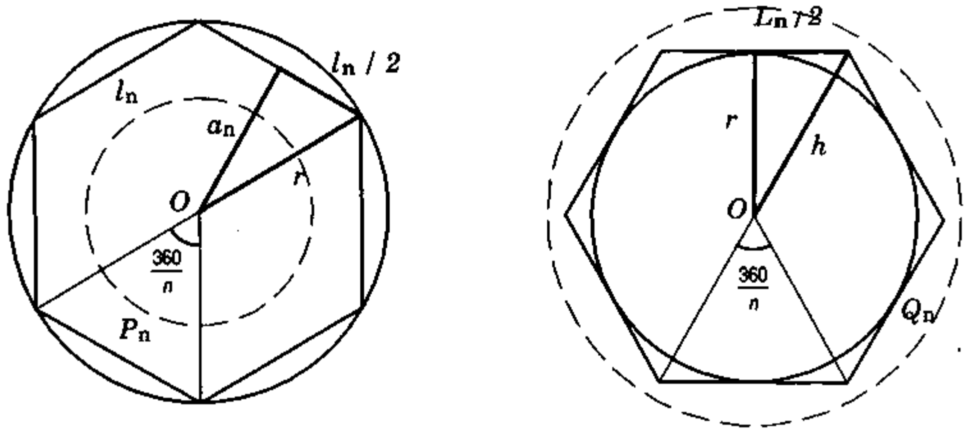
O teorema seguinte diz que, no caso particular do círculo, podemos caracterizar sua área como o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscritos (ou circunscritos) quando o número de lados cresce indefinidamente.

Lembremos que se chama *regular* um polígono convexo cujos lados e ângulos são todos iguais. Diz-se que um polígono está inscrito num círculo quando seus vértices estão sobre a circunferência e seus lados são cordas. O polígono diz-se *circunscrito* ao círculo quando seus lados são tangentes à circunferência.

Os vértices de um polígono regular inscrito num círculo dividem a circunferência em partes iguais. A perpendicular baixada do centro do círculo sobre o meio do lado chama-se *apótema*. Se o polígono é inscrito, o apótema é menor do que o raio; se é circunscrito, seu apótema é igual ao raio do círculo.

Teorema 7. *A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos.*

Demonstração: Indiquemos com P_n e Q_n os polígonos regulares de n lados, respectivamente inscrito no, e circunscrito ao, círculo C de centro O e raio r. Evidentemente, área de $P_n < \pi r^2 <$ área de Q_n.



Queremos provar que, tomando o número n de lados suficientemente grande, as áreas de P_n e Q_n podem tornar-se tão próximas de πr^2 quanto se deseje. Mais precisamente, se forem dados arbitrariamente os números positivos α e β, tais que $\alpha < \pi r^2 < \beta$, provaremos que é possivel achar n tal que

$$\alpha < \text{área de } P_n < \pi r^2 < \text{área de } Q_n < \beta.$$

Começamos observando que o lado l_n do polígono P_n pode tornar-se tão pequeno quanto se deseje, bastando que o número n de lados seja suficientemente grande. Com efeito, os vértices de P_n dividem a circunferência em n arcos iguais e cada corda l_n é menor do que um qualquer desses arcos.

O raio r é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $l_n/2$ e o apótema a_n de P_n. Logo $r < a_n + l_n/2$.

Dado o número α tal que $\alpha<\pi r^2$, tomamos $s=\sqrt{\alpha/\pi}$. Então $\pi s^2=\alpha$ e $s<r$. Portanto, o círculo C_s, de centro O e raio s, tem área α e está contido em C. Podemos tomar n tão grande que $l_n/2<r-s$. Então

$$r < a_n + l_n/2 < a_n + r - s, \quad \text{donde} \quad a_n > s.$$

De $s < a_n$ resulta que o círculo C_s está contido no polígono P_n. Logo α = área de C_s < área de P_n. Isto completa a prova de que as áreas dos polígonos regulares inscritos em C são aproximações por falta da área de C.

Vejamos agora as áreas dos polígonos regulares circunscritos Q_n. Tanto P_n como Q_n acham-se decompostos em triângulos isósceles com vértice no centro O e bases iguais aos lados dos polígonos dados. Tanto para P_n com para Q_n, os ângulos dos vértices desses triângulos são iguais a $360°/n$. Logo os triângulos de P_n são semelhantes aos de Q_n, a razão de semelhança sendo r/a_n. Portanto, se chamarmos de L_n o lado de Q_n, teremos $L_n=(r/a_n)\cdot l_n$. Assim, $L_n < 2l_n$ pois o apótema é sempre maior do que a metade do raio. Da desigualdade $L_n < 2.l_n$ resulta que, tomando n suficientemente grande, não apenas l_n como também L_n pode tornar-se tão pequeno quanto se deseje.

Seja dado um número $\beta > \pi r^2$. A fim de achar n tal que área de $Q_n < \beta$, escrevemos $t=\sqrt{\beta/\pi}$. Então o círculo C_t, de centro O e raio t, tem área β e contém C pois $t > r$. Ora, $L_n/2$ e r são catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa h é a distância do centro O a um vértice de Q_n. Temos então $h < r+L_n/2$. Tomando n suficientemente grande, sabemos que é possível tornar $L_n/2 < t-r$. Daí resulta $r+L_n/2 < t$, logo $h < t$. Isto significa que área de $Q_n <$ área de $C_t=\beta$, como queríamos demonstrar.

Encerraremos esta seção estabelecendo a fórmula do comprimento da circunferência.

Usaremos a notação ∂P_n para indicar o perímetro (soma dos lados) do polígono regular de n lados, inscrito no círculo C.

O *comprimento da circunferência* é, por definição, o número real ∂C cujas aproximações por falta são os perímetros ∂P_n dos polígonos regulares P_n inscritos no círculo C e cujas aproximações por excesso são os perímetros ∂Q_n dos polígonos regulares Q_n circunscritos a C.

Em virtude desta definição, tem-se $\partial P_n < \partial C < \partial Q_n$, para todo n.

Teorema 8. *O comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.*

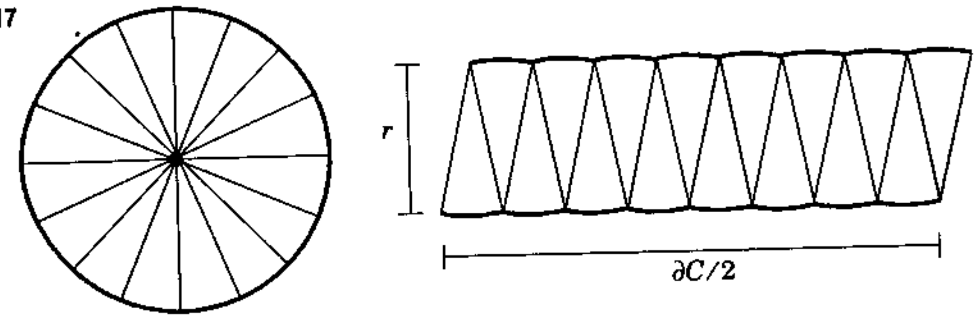
Demonstração: Provaremos inicialmente que o comprimento ∂C da circunferência não pode ser menor do que $2\pi r$. Com efeito, supondo, por absurdo, que fosse $\partial C < 2\pi r$, daí resultaria $(\partial C/2)\cdot r<\pi r^2$. Pelo Teorema 7, poderíamos obter um polígono regular P_n, de n lados, inscrito no círculo C, tal que $\partial C.r/2 <$ área de P_n. Ora, a área do polígono P_n é a soma das áreas dos triângulos que o compõem, os quais têm o centro O como vértice e os lados de P_n como bases. Logo, essa área é igual a $\partial P_n.a_n/2$, onde a_n é o apótema de P_n (altura dos triângulos). Assim, $\partial C.r/2 < \partial P_n.a_n/2$ e daí, $\partial C < \partial P_n.(a_n/r)$. Como $a_n/r < 1$, concluímos que $\partial C < \partial P_n$, um absurdo. Portanto, não se pode ter $\partial C < 2\pi r$.

Por um raciocínio análogo, com polígonos regulares circunscritos, em vez de inscritos, concluiremos também que não pode ser $\partial C > 2\pi r$. Logo, o comprimento da circunferência é $\partial C=2\pi r$.

Assim o número π, que foi definido inicialmente como a área de um círculo de raio 1, satisfaz também a igualdade $\pi=\partial C/r$, ou seja, é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Observação: No Teorema 8, a fórmula $\partial C=2\pi r$ do comprimento da circunferência resulta da expressão πr^2 da área do círculo. Esse procedimento pode ser invertido. A Figura 17 mostra como chegar experimentalmente à expressão $\partial C\times r/2$ $(=\pi r^2)$ para a área do círculo a partir do conhecimento do comprimento $\partial C(=2\pi r)$ da circunferência.

g. 17



Decompõe-se o círculo num número par (bastante grande) de setores; rearranjam-se esses setores na forma mostrada à direita e nota-se que a figura obtida é aproximadamente um paralelogramo de base $\partial C/2$ e altura r, cuja área mede $(\partial C/2) \times r$.

8. Nota histórica

No que diz respeito à área do círculo, Euclides não vai mais além do que provar (no Livro XII) que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros ou, o que é o mesmo, dos seus raios. Indicando com $A(r)$ a área de um círculo de raio r, isto significa que $A(r)$ é diretamente proporcional a r^2, ou seja, que $A(r) = c.r^2$, onde c independe do raio r. Euclides sabia também que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é uma constante d, independente da circunferência tomada, mas não tratou nos Elementos de estimar os valores de c e d. Coube a Arquimedes provar que tais números são a mesma constante. Esta constante, que a partir de 1737 Euler chamou de π, e que manteve este nome até hoje, já fora considerada muito antes de Euclides.

Com efeito, dois mil anos antes de Cristo os babilônios atribuíam a π (isto é à área de um círculo de raio um) o valor $3\frac{1}{8}$ (= 3,125) enquanto os egípcios admitiam $\pi = 4 \times (8/9)^2 = 3{,}16$. Arquimedes, em torno do ano 250 A.C., estimou que o valor de π se situa entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$ o que dá $\pi = 3{,}14$ com algarismos decimais exatos até centésimos. O método de Arquimedes consistia em inscrever um polígono regular no círculo de raio 1 e ir dobrando o número de lados. Ele sabia calcular o lado de um polígono de $2n$ lados a partir do de n lados. Assim, começando com o triângulo equilátero, de duplicação em duplicação, conseguiu calcular o lado l de um polígono de 96 lados. O perímetro $96l$ era uma boa aproximação inferior para o comprimento 2π da circunferência em questão, logo $48l$ era uma boa aproximação por falta para o valor de π. De modo semelhante, trabalhando com polígonos circunscritos, obteve a aproximação por excesso 22/7. Liu Hui, na China, no ano 264 de nossa era, obteve o valor $\pi = 3{,}14159$, com cinco algarismos decimais exatos.

Para mais comentários sobre π, veja "Meu Professor de Matemática", página 256.

A mania de obter aproximações para o valor de π com um número cada vez maior de algarismos decimais tem sobrevivido o passar dos séculos e, inclusive, ganhou novo ímpeto com o advento dos super-computadores e a descoberta de algoritmos teóricos muito mais eficientes do que o método de Arquimedes. A última notícia de que temos conhecimento a esse respeito foi publicada na revista "Science News", de setembro de 1989, segundo a qual David e Gregory Chudnovski, da Universidade Columbia, nos Estados Unidos, calcularam um valor aproximado de π com 1 bilhão de algarismos decimais exatos!

9. Exercícios

1. Se $\sigma : F \to F'$ e $\sigma' : F' \to F''$ são semelhanças de razões r e r', respectivamente, então a função composta $\sigma' \circ \sigma : F \to F''$ é uma semelhança de razão rr' e a função inversa $\sigma^{-1}: F' \to F$ é uma semelhança de razão $1/r$.

2. Numa semelhança entre dois segmentos de reta, os extremos de um deles são homólogos aos extremos do outro.

3. Existem exatamente duas semelhanças entre 2 segmentos de reta dados.

4. Se dois triângulos são congruentes, toda semelhança entre eles é uma isometria.

5. Uma semelhança entre duas figuras planas fica inteiramente determinada quando se conhecem os homólogos de três pontos não colineares.

6. Numa semelhança entre figuras sólidas, os homólogos de quatro pontos não-coplanares são pontos não-coplanares.

7. Seja AB um segmento orientado, no plano Π ou no espaço E. (*Orientado* significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A, e depois B.) A *translação* determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau: \Pi \to \Pi$, ou $\tau: E \to E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo. Prove que toda translação é uma isometria.

8. Seja R uma reta do plano Π. A *reflexão* em torno do eixo R é a transformação $\rho: \Pi \to \Pi$, que associa a cada ponto X do plano o ponto X' tal que tal que R é a mediatriz do segmento XX'. Prove que toda reflexão é uma isometria.

9. A *simetria* em torno do ponto O é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX'. Prove que toda simetria em torno de um ponto é uma isometria.

10. Uma semelhança transforma segmentos paralelos em segmentos paralelos, retângulos em retângulos, losangos em losangos e quadrados em quadrados.

11. Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados (em particular, dois quadrados) são figuras semelhantes. Quando é que dois retângulos são semelhantes?

12. Num triângulo retângulo, a perpendicular baixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa o decompõe em dois triângulos parciais semelhantes ao triângulo total.

13. Se três figuras semelhantes estão dispostas sobre os lados de um triângulo retângulo de tal modo que os lados desse triângulo sejam homólogos uns aos outros então a área da figura situada sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras situadas sobre os catetos. (Prove isto com e sem a ajuda do Teorema de Pitágoras e, no segundo caso, obtenha Pitágoras como corolário.)

14. Dois polígonos convexos com o mesmo número de lados são semelhantes se, e somente se, seus vértices podem ser numerados de modo que os ângulos de mesmo índice sejam iguais e os lados de mesmos índices sejam proporcionais.

15. Sejam S, R e R' retas coplanares tais que S não é paralela a R nem a R'. Defina uma correspondência $\sigma: R \to R'$, associando a cada ponto X em R o ponto $X' = \sigma(X)$, interseção de R' com a paralela a S traçada por X. Mostre que σ é uma semelhança entre R e R'. Se R e R' são paralelas, mostre que σ é uma isometria.

16. Sejam Π e Π' planos, nenhum deles paralelo à reta S. Defina uma correspondência $\sigma: \Pi \to \Pi'$, associando a cada ponto X em Π o ponto $X' = \sigma(X)$, interseção do plano Π' com a reta paralela a S passando por X. Mostre que σ é uma isometria se Π é paralelo a Π'.

17. Usando semelhança de triângulos, mas não diretamente a noção de área, prove que o produto da base pela altura de um paralelogramo não depende de qual lado se tomou como base.

18. Seja R um retângulo. Prove que a área de R é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em R, cujos lados são paralelos ou perpendiculares a uma reta S, arbitrariamente fixada no plano que contém R.

19. Sejam Π e Π' planos não paralelos. Dado o ponto X em Π, sejam X' o pé da perpendicular baixada de X sobre o plano Π' e Y o pé da perpendicular baixada de X' sobre o plano Π. Mostre que o número $c = \overline{X'Y}/\overline{X'X}$ não depende do ponto X em Π. Dada uma figura F em Π, seja F' a sua projeção ortogonal sobre Π'. (F' é o conjunto dos pontos X', cada um dos quais é o pé da perpendicular baixada de um ponto X em F sobre o plano Π'.) Prove que a área de F' é igual a c vezes a área de F.

20. Sejam OX, OY semi-retas de origem O e $A(x, y)$ a área do triângulo de vértice O e base XY, com $\overline{OX} = x$, $\overline{OY} = y$. Prove que $A(x,y)$ é diretamente proporcional a x e y e conclua que $A(x, y)/A(x', y') = xy/x'y'$.

21. No exercício anterior tem-se $A(x, y) = k.x.y$. Determine k supondo que o ângulo $XOY = 90°$, $60°$ e $45°$.

22. Desenhe um triângulo isósceles ABC (cuja base BC seja maior do que a altura AD), o retângulo de base BC e altura AD e o arco de círculo ABC. A partir dessa figura, conclua que se Γ é um círculo e P_n é o polígono regular de n lados nele inscrito então

$$a(\Gamma) - a(P_{2n}) < \frac{1}{2}\,[a(\Gamma) - a(P_n)\,],$$

isto é, quando se toma área(P_{2n}) como valor aproximado para área(Γ), o erro cometido é menor do que a metade do erro que se tem quando se usa a aproximação área(P_n).

23. Toda figura semelhante a uma elipse é uma elipse.

24. Por meio de 8 pontos, divida em 3 partes iguais cada lado do quadrado circunscrito a um círculo de raio r. Corte os 4 cantos do quadrado, obtendo um octógono cujos vértices são os oito pontos de subdivisão. Mostre que a área desse octógono é igual a $28r^2/9$. De que modo este processo conduz a um valor aproximado de π? Qual é esse valor?

25. (*Lúnulas de Hipócrates.*) Sobre cada cateto de um triângulo retângulo constrói-se um semi-círculo justaposto ao triângulo e, sobre a hipotenusa, um semi-círculo contendo o triângulo. Prove que a soma das áreas das lúnulas assim formadas é igual à área do triângulo.

26. Seja ABC um triângulo retângulo isósceles inscrito no semi-círculo ABC. Dentro do triângulo trace o arco ADC de (outro) círculo, semelhante aos arcos AB e BC. Prove que a lúnula cujos lados são os arcos ABC e ADC tem área igual à do triângulo ABC.

27. Trace no plano as semi-retas OX, OY, OZ com a mesma origem O, de modo que OZ esteja no interior do ângulo $\angle XOY$. Por cada ponto P em OZ, sejam Q o pé da perpendicular baixada de P sobre OX e S a interseção com OY da paralela a OX passando por P. Prove que a razão $\overline{PQ}\,/\,\overline{PS}$ não depende do ponto P tomado em OZ.

28. Sejam A, B, C e D pontos sobre uma circunferência, dispostos na mesma ordem dos números de um mostrador de relógio. Sobre o segmento AC, tome um ponto E tal que os ângulos $\angle ABE$ e $\angle DBC$ sejam iguais. Prove que os triângulos ABE e BCD são semelhantes, o mesmo ocorrento com os triângulos ABD e BCE. Conclua daí que $\overline{AC}.\,\overline{BD} = \overline{AB}.\,\overline{CD} + \overline{AD}.\,\overline{BC}$. ("Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos".)

29. O resultado do exercício anterior é conhecido como o Teorema de Ptolomeu. Mostre que ele pode ser usado para exprimir o lado do polígono regular de $2n$ lados, inscrito no círculo de raio r, em função do lado do polígono regular de n lados inscrito no mesmo círculo.

30. Num círculo de raio 1, considere o diâmetro AD e dois pontos B, C sobre a mesma semi-circunferência. Usando o Teorema de Ptolomeu, obtenha a relação $2\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} = \overline{AC}.\overline{BD}$. Chamando de

2α e 2β respectivamente, os ângulos centrais subtendidos pelos arcos CD e BCD, mostre que esta relação significa

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}\beta \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\beta.$$

[O papel histórico do Teorema de Ptolomeu foi o de servir de precursor para as fórmulas de subtração e adição em trigonometria.]

31. Dados um triângulo ABC e um retângulo R, ache um retângulo semelhante a R com um vértice sobre AB, outro sobre AC e os dois vértices restantes sobre o lado BC. Em particular, mostre como obter um quadrado que tenha um lado sobre BC e os vértices restantes sobre AB e AC. [Sugestão: tome um pequeno retângulo, semelhante a R, com um lado sobre BC e um vértice sobre AB. Ligue o quarto vértice a A e prolongue até encontrar AC.]

32. Mostre que a área de uma elipse de eixos $2a$ e $2b$ é igual a πab.

33. Prove que a projeção ortogonal (veja a definição no Exercício 19) de um círculo sobre um plano é outro círculo, uma elipse ou um segmento de reta.

34. Num triângulo onde o ângulo de vértice é a metade de cada um dos ângulos da base, mostre que a bissetriz de um ângulo da base decompõe o triângulo total em dois triângulos parciais, ambos isósceles, um dos quais é semelhante ao triângulo dado. Conclua que a base do triângulo inicial divide cada um dos outros lados em média e extrema razão.

35. Use o Exercício 34 para exprimir em função de r o lado do decágono regular inscrito num círculo de raio r e, a partir daí calcular a área desse decágono.

36. Dotando o plano de um sistema de eixos ortogonais, seja R uma reta não paralela ao eixo das ordenadas. Aponte explicitamente quais os fatos geométricos utilizados para provar que existem dois números reais a, b tais que um ponto do plano com coordenadas (x, y) pertence à reta R se, e somente se, $y = ax + b$.

4. Volume

1. Noção intuitiva de volume

O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. (Isto não é uma definição matemática, mas apenas uma idéia intuitiva.) Estamos interessados em medir a grandeza "volume" e para isso deveremos compará-la com uma unidade. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume.

Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume, por definição, será igual a 1.

Assim sendo, o volume de um sólido S deverá ser um número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Como o sólido S pode ter uma forma bastante irregular, não é claro o que significa o "número de vezes" em que S contém o cubo unitário. Novamente, temos aqui uma idéia intuitiva, que devemos usar como guia e à qual devemos atribuir um significado preciso.

Suponhamos, por exemplo, que o sólido S cujo volume desejamos calcular seja um pedaço de metal, plástico ou outra substância impermeável. Mergulhando S num reservatório contendo uma quantidade conhecida de água, que o encha até os bordos, o volume S será igual ao volume do líquido transbordado e este pode ser medido simplesmente através de uma escala impressa na parede do reservatório.

Um tal processo prático de calcular volumes pode ter utilidade em casos simples, porém deixa muito a desejar, mesmo na prática, pois não permite considerar objetos muito grandes (qual o volume da lua?) nem muito pequenos (qual o volume de um elétron?). Além disso, não permite previsões como a seguinte: de que tamanho deve ser tomado o raio de um reservatório esférico para que este contenha x litros de gás?

Precisamos, portanto, obter métodos para o cálculo indireto dos volumes, métodos sistemáticos e gerais, que se apliquem tanto aos volumes grandes quanto aos pequenos, tanto aos casos concretos como aos abstratos. Este objetivo, como veremos, nos forçará a um reexame do conceito de volume, conduzindo-nos a uma definição precisa.

2. Volume de um bloco retangular.

Um *bloco retangular* é um sólido limitado por 6 retângulos: suas *faces*. Esses retângulos constituem 3 pares; em cada par os retângulos são iguais. Os lados dos retângulos são chamados as *arestas* do bloco. Um tijolo é um exemplo de um bloco retangular.

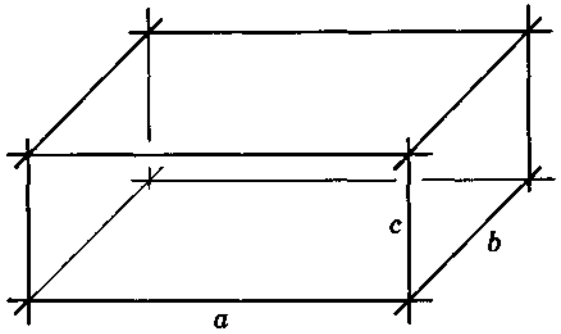


Fig. 1. As 3 arestas *a*, *b*, *c* determinam o bloco retangular.

Um bloco retangular fica inteiramente determinado quando se conhecem 3 de suas arestas que concorrem num ponto.

O *cubo* é um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm todas o mesmo comprimento. As 6 faces de um cubo são quadrados iguais.

Um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento chama-se *cubo unitário*; por definição seu volume é 1. Se n é um número inteiro, um cubo C cuja aresta mede n unidades de comprimento pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos, logo o volume de C é n^3. A figura abaixo ilustra o caso $n = 4$.

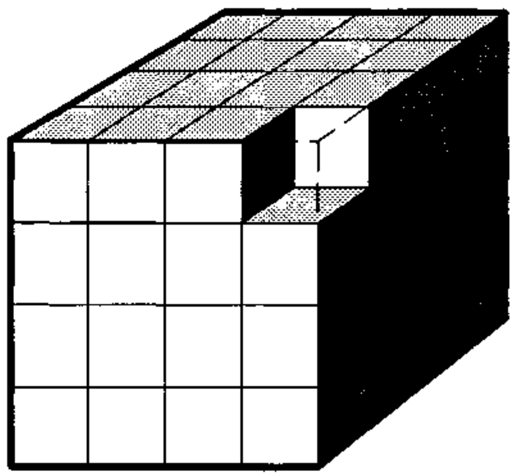


Fig. 2. Cubo de aresta 4 decomposto em $64 = 4^3$ cubos unitários justapostos.

Analogamente, decompondo cada aresta de um cubo unitário no mesmo número inteiro q de partes iguais, decompô-lo-emos em q^3 cubos justapostos, cada um com aresta $1/q$. Segue-se que um cubo cuja aresta mede $1/q$ (q inteiro) tem volume igual a $1/q^3$, ou seja $(1/q)^3$.

Mais geralmente, dado um cubo C cuja aresta tem como medida um número racional p/q, podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma das quais tem comprimento $1/q$. Deste modo, o cubo C ficará decomposto em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais tem aresta medindo $1/q$. O volume de cada cubo menor é $1/q^3$. Assim, o volume de C será

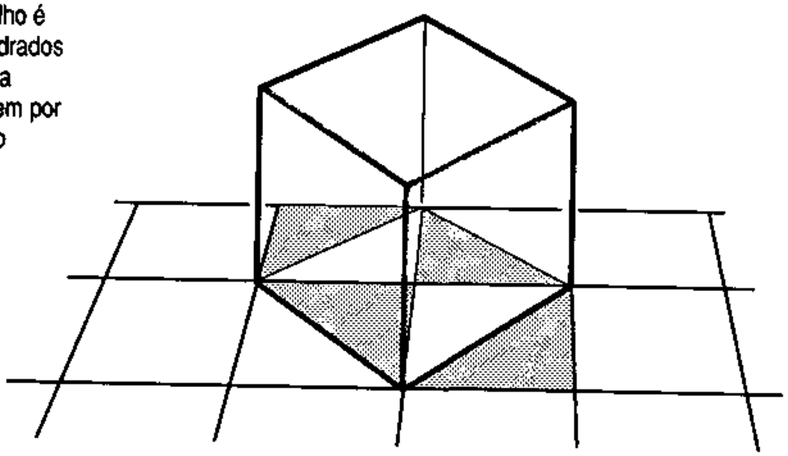
$$p^3 \times \frac{1}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Chegamos assim ao seguinte resultado: se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a, então o volume de C será igual a a^3.

Sob o ponto de vista estritamente prático, isto resolve o problema de calcular o volume de um cubo pois não é possível, através de medidas diretas, obter um número irracional como medida de uma aresta. Ninguém pode, através de um instrumento de medida, por mais sensível que ele seja, encontrar $\sqrt{2}$, ou π, como medida de um segmento. Poderemos, sim, obter resultados aproximados, como 1,414 ou 3,14159.

Entretanto, sob o ponto de vista teórico, tanto em Matemática Pura como em aplicações de natureza científica, números irracionais ocorrem. Desde Pitágoras já se sabia que, tomando o lado de um quadrado como unidade, a diagonal do mesmo tem para medida o número irracional $\sqrt{2}$. (Cfr. Seção 1 do Capítulo 1.)

Fig. 3. Se o ladrilho é formado por quadrados de lado 1, então a aresta do cubo tem por medida o número irracional $\sqrt{2}$.



Qual é então o volume de um cubo C cuja aresta tem para medida um número irracional b? Afirmamos que, ainda neste caso, tem-se $vol(C) = b^3$. Em conseqüência, a fórmula

$$\text{Volume de } C = (\text{aresta de } C)^3$$

é absolutamente geral, válida quer a aresta de C tenha medida inteira, racional ou irracional.

Para demonstrar que $vol(C) = b^3$ mesmo quando b é irracional, usaremos novamente o método da exaustão: mostraremos primeiro que se x é qualquer número menor do que b^3 então $x < vol(C)$. Depois mostraremos que se $y > b^3$ então $y > vol(C)$. Concluiremos daí que $vol(C) = b^3$.

Seja então, para começar, x um número tal que $x < b^3$. Podemos aproximar o número irracional b por um valor racional $r < b$, tão próximo de b que $x < r^3 < b^3$. Então o cubo C, cuja aresta tem medida b, contém um cubo D, cuja aresta tem para medida o número racional r. Segue-se que $vol(D) < vol(C)$. Mas já sabemos que $vol(D) = r^3$, porque r é racional. Concluímos que $r^3 < vol(C)$ e, portanto, $x < vol(C)$.

Usando um raciocínio inteiramente análogo, o leitor pode mostrar que se y for um número maior do que b^3, então $y > vol(C)$.

Seja agora B um bloco retangular cujas 3 arestas têm para medidas números racionais. Podemos sempre reduzir esses três números ao mesmo denominador e, portanto, supor que tais medidas são a/q, b/q e c/q, onde a, b, c e q são números inteiros.

Decompondo as três arestas do bloco B, respectivamente em a, b e c segmentos iguais, cada um deles de comprimento $1/q$, o bloco ficará decomposto em abc cubos justapostos, cada um desses cubos tendo aresta $1/q$ e, portanto, volume $1/q^3$. Segue-se que

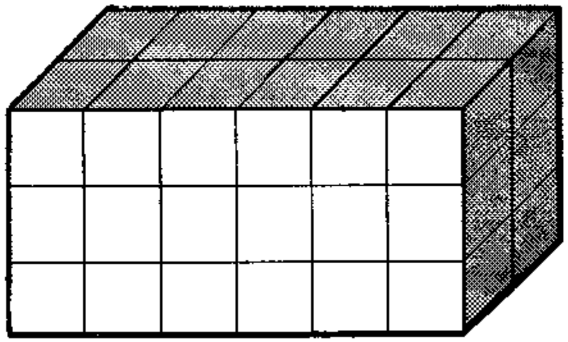


Fig. 4. Bloco subdividido em $6 \times 3 \times 2$ cubos justapostos, todos com o mesmo volume.

$$vol(B) = \frac{abc}{q^3} = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}.$$

Por conseguinte, podemos enunciar: *Se um bloco retangular B tem arestas com medidas racionais a, b, c, seu volume será o produto dessas medidas, isto é, $vol(B) = abc$.*

Como no caso do cubo, a fórmula acima vale sejam quais forem as medidas das arestas, mesmo que alguma delas seja irracional. Tem-se portanto:

> *Dado um bloco retangular B, cujas arestas têm medidas a, b e c, seu volume é dado pela fórmula $vol(B) = abc$.*

A demonstração, como no caso do cubo, se faz pelo método da exaustão. Evidentemente esta fórmula inclui o caso particular em que $a = b = c$, portanto a fórmula do volume do cubo resulta dela.

Dado o bloco retangular B, com arestas medindo a, b, e c, suponhamos que o número x seja menor do que abc. Podemos encontrar números racionais $r < a$, $s < b$ e $t < c$ tão próximos de a, b e c respectivamente que

$$x < r.s.t < abc.$$

O bloco B contém um bloco menor C, cujas arestas medem r, s, e t, logo $vol(C) < vol(B)$. Mas já vimos que $vol(C) = r.s.t$. Portanto

$$x < r.s.t = vol(C) < vol(B),$$

isto é, $x < vol(B)$. Analogamente se mostra que todo número $y > abc$ é maior do que o volume de B. Portanto, $vol(B) = abc$.

Observação 1. Provamos explicitamente que, dado $x < abc$, podem-se obter números racionais r, s, t tais que $r < a$, $s < b$, $t < c$ e $x < rst < abc$.

De $x < abc$ resulta $x/bc < a$, logo existe r racional tal que $x/bc < r < a$. Então $x < rbc < abc$ e daí $x/rc < b$. Portanto existe s racional tal que $x/rc < s < b$. Segue-se que $x < rsc$, donde $x/rs < c$.

Assim, existe t racional com $x/rs < t < c$. Por conseguinte, $x < rst < abc$, como se pretendia provar.

Observação 2. Como no caso da área do retângulo, a fórmula do volume do bloco retangular também pode ser deduzida usando a teoria das proporções. Com efeito, indiquemos com $V(x, y, z)$ o volume do bloco retangular com arestas x, y e z. Para todo número natural n, temos

$$V(nx, y, z) = V(x, ny, z) = V(x, y, nz) = n.V(x, y, z)$$

porque cada um dos três primeiros números é o volume de um bloco formado pela justaposição de n blocos com arestas x, y, z respectivamente. Além disso, é evidente que $V(x, y, z)$ é uma função crescente de cada uma das variáveis x, y e z. Segue-se então que o volume $V = V(x, y, z)$ é diretamente proporcional às arestas x, y e z, isto é, para todo número real positivo c, tem-se:

$$V(c.x, y, z) = V(x, c.y, z) = V(x, y, c.z) = c.V(x, y, z).$$

[Veja "Meu Professor de Matemática", página 165.] Então

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V(x.1, y, z) = x.V(1, y, z) = x.V(1, y.1, z) \\ &= x.y.V(1, 1, z) = x.y.V(1, 1, z.1), \\ &= x.y.z.V(1, 1, 1) = x.y.z. \end{aligned}$$

pois $V(1, 1, 1)$ é o volume do cubo unitário.

3. Definição geral de volume

Acabamos de ver que a idéia intuitiva de volume de um sólido, como o "número de vezes" que esse sólido contém o cubo unitário, conduz diretamente a uma fórmula para o cálculo do volume de um bloco retangular.

Abordaremos em seguida o problema de calcular o volume de sólidos mais irregulares do que blocos. Como foi dito acima, é necessário possuirmos uma definição mais precisa daquilo que entendemos por “volume de um sólido”. Nosso objetivo nesta seção é chegar a uma tal definição geral.

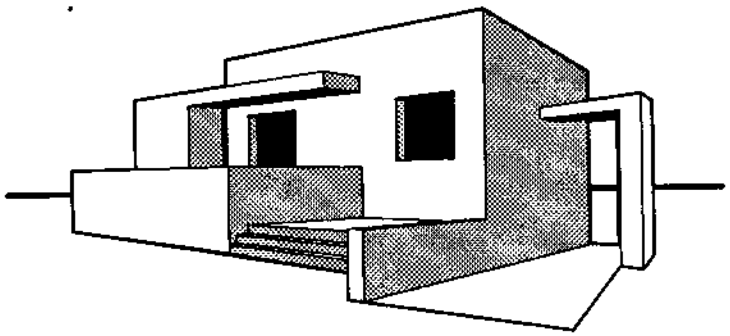


Fig. 5. O desenho acima mostra um bloco retangular. (Trata-se da reprodução simplificada de uma casa que realmente existe.)

Definição. Chamaremos *poliedro retangular* a todo sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. É fácil obter o volume de um poliedro retangular: basta somar os volumes dos blocos retangulares que o constituem.

Dado um sólido S, desejamos definir precisamente o número $vol(S)$, ou seja, queremos dar um significado exato à idéia inicial, segundo a qual $vol(S)$ é o número que exprime quantas vezes S contém o cubo unitário.

Para cada poliedro retangular P contido em S, sabemos calcular $vol(P)$. O número $V = vol(S)$, que estamos procurando, deve satisfazer à condição

$vol(P) \leq V$ *para todo poliedro retangular P contido em S.*

Os números $vol(P)$, volumes dos poliedros retangulares P contidos em S, fornecem aproximações inferiores para o volume de S. Acrescentando mais blocos retangulares a P, sempre tendo o cuidado de permanecer dentro de S, obteremos um poliedro retangular P', maior do que P, e $vol(P')$ será uma aproximação melhor para $vol(S)$.

Queremos que seja possível aproximar $vol(S)$ com tanta precisão quanto se deseje por volumes de poliedros retangulares

contidos em S. Esta exigência equivale a requerer que $vol(S)$ seja o *número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S.*

Isto significa que não apenas se tem $vol(S) \geq vol(P)$ para todo poliedro retangular P contido em S como também, dado qualquer número real r tal que $r < vol(S)$, é possível achar um poliedro retangular Q, contido em S, com

$$r < vol(Q) \leq vol(S).$$

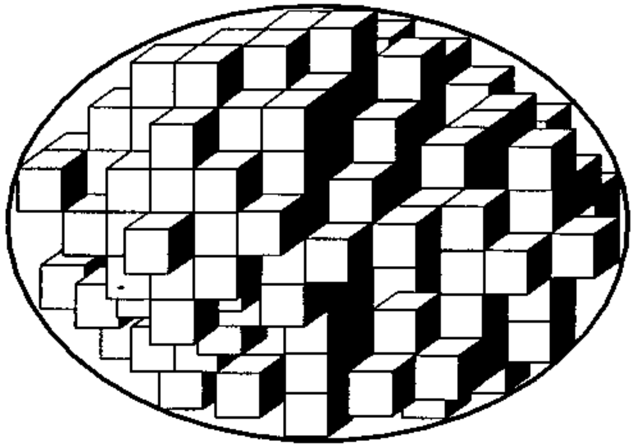


Fig. 6. Poliedro retangular, cujo volume é uma aproximação inferior para o volume do sólido que o contém.

Observação. (Aproximação por excesso.) Seja S um sólido cujo volume desejamos calcular. Podemos, ainda, considerar os poliedros retangulares Q que contêm o sólido S. Sabemos calcular o volume de cada um desses poliedros. O número procurado, $V = vol(S)$, deve também satisfazer à condição

$V \leq vol(Q)$ *para todo poliedro retangular Q contendo S.*

Os números $vol(Q)$, volumes dos poliedros retangulares que contêm o sólido S, são valores aproximados por excesso para o volume de S. Quanto menor for o bloco retangular Q contendo S, melhor será a aproximação $vol(Q)$ para o volume de S.

Podemos, então, afirmar que o número $V = vol(S)$ goza da seguinte propriedade:

Quaisquer que sejam os poliedros retangulares P, contido em S, e Q, contendo S, tem-se vol(P) ≤ V ≤ vol(Q).

Em cursos mais adiantados, demonstra-se que a propriedade acima caracteriza o volume $V = vol(S)$ para todos os sólidos S habitualmente construídos na Geometria. Em outras palavras, dado um sólido geométrico S, seu volume $V = vol(S)$ é o único número real que satisfaz à condição acima destacada.

4. Princípio de Cavalieri

Convenhamos o seguinte: a definição de volume dada na seção anterior satisfaz à necessidade lógica de precisar bem os conceitos e pôr os fundamentos em firme base. Mas, sob o ponto de vista do cálculo, ela é de pouco valor prático. Seria extremamente laborioso calcular diretamente os volumes dos sólidos a partir daquela definição.

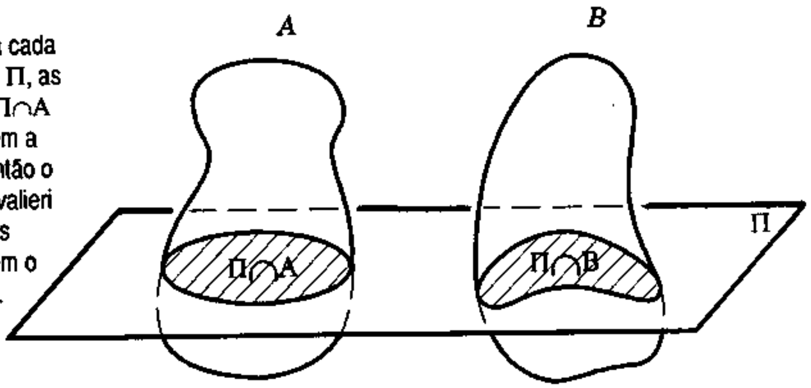


Fig. 7. Se, para cada plano horizontal Π, as seções planas Π∩A e Π∩B e tiverem a mesma área, então o Princípio de Cavalieri assegura que os sólidos *A* e *B* têm o mesmo volume.

Abordaremos agora um resultado, conhecido como *Princípio de Cavalieri*, cujo valor prático para o cálculo de volumes será evidenciado nos parágrafos seguintes.

Escolhamos, de uma vez por todas, um plano, que chamaremos *plano horizontal*. Todos os planos paralelos a ele serão também chamados planos *horizontais*.

Sejam A e B dois sólidos. Cada plano horizontal Π determina, nos sólidos A e B, seções planas que indicaremos respectivamente com $\Pi \cap A$ e $\Pi \cap B$. Elas são as interseções do plano Π com os dois sólidos dados. Se, para todos os planos horizontais Π, a figura plana $\Pi \cap A$ tem a mesma área que a figura plana $\Pi \cap B$, o Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A e o volume de B são iguais.

Enunciaremos então:

Princípio de Cavalieri. *Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então* $vol(A) = vol(B)$.

Quando se desenvolve, em cursos mais avançados, a teoria dos volumes a partir da definição que demos na seção anterior, o Princípio de Cavalieri é um teorema, isto é, ele pode ser demonstrado. Não daremos sua demonstração aqui porque ela envolve conceitos avançados da Teoria da Medida, logo foge destas lições.

Aceitaremos, portanto, o Princípio de Cavalieri como verdadeiro. Ele se torna plausível se observarmos o seguinte: duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas são. Os dois sólidos dados podem ser cortados, através de planos horizontais, em fatias finas com volumes aproximadamente iguais. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes dessas fatias, e a aproximação entre os volumes das fatias podendo tornar-se tão precisa quanto se deseje, vemos que $vol(A) = vol(B)$.

Os argumentos acima esboçados não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri mas dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro.

O Princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas. Os parágrafos seguintes mostrarão como ele pode ser aplicado. Aqui, daremos as primeiras aplicações.

Definição. Um *paralelepípedo* é um sólido limitado por 6 paralelogramos: suas faces. Estas faces agrupam-se em 3 pares; em cada par as 2 faces são paralelas, congruentes, e dizem-se *opostas*. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como *base*, a *altura* correspondente é a distância entre esta face e sua oposta, ou seja é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face oposta sobre o plano da base.

As *arestas* de um paralelepípedo são os lados dos paralelogramos que constituem suas faces.

Um paralelepípedo cujas faces são retângulos é um bloco retangular.

Teorema 1. *O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Tomemos uma das faces do paralelepípedo P como base; o plano que a contém será chamado plano horizontal. Sobre este plano, tomemos um retângulo cuja área a seja igual à área do paralelogramo que serve de base ao paralelepípedo dado. Com altura h, igual à do paralelepípedo, construamos um bloco retangular B, tendo como base o retângulo recém-obtido. Já sabemos que $vol(B) = a.h$. Para concluir que $vol(P) = a.h$, como queremos demonstrar, aplicaremos o Princípio de Cavalieri. Ora,

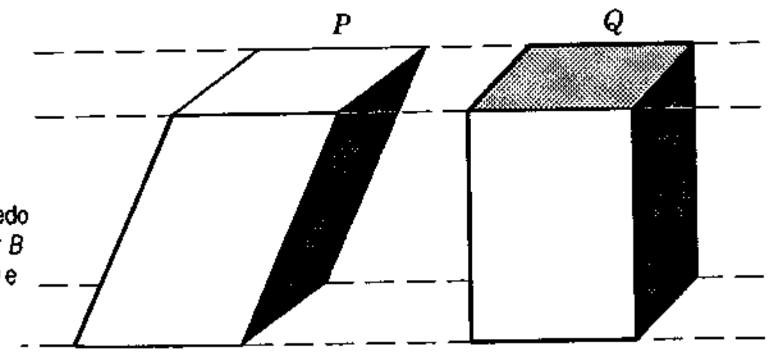


Fig. 8. O paralelepípedo P e o bloco retangular B têm a mesma altura h e suas bases têm a mesma área α.

dado qualquer plano horizontal Π, a seção plana $\Pi \cap P$ é um paralelogramo congruente à base de P, enquanto $\Pi \cap B$ é um retângulo, também congruente à base de B. (Aqui e no Teorema 2 faz-se uso do fato de que se Π e Π' são planos paralelos e R é uma reta não paralela a eles então a projeção $\sigma:\Pi \to \Pi'$, paralela a R, é uma isometria. (Exercício 16 do Cap. 3)). Segue-se que $\Pi \cap P$ e $\Pi \cap B$ têm a mesma área, seja qual for o plano horizontal Π. Concluímos, então, pelo Princípio de Cavalieri, que

$$vol(P) = vol(B) = a.h.$$

Isto termina a demonstração.

O argumento acima pode ser generalizado, a fim de fornecer a fórmula para o volume de um cilindro. Definamos, inicialmente, o que entendemos por *cilindro*.

Definição. Começamos com uma figura plana F, chamada a *base* do cilindro. Tomaremos o plano que contém F como horizontal. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g, não paralelo ao plano horizontal, chamado *geratriz* do cilindro, do seguinte modo: por cada ponto de F levantamos um segmento de reta paralelo a, e do mesmo comprimento que, g. A reunião desses segmentos é o *cilindro* C, de base F e geratriz g.

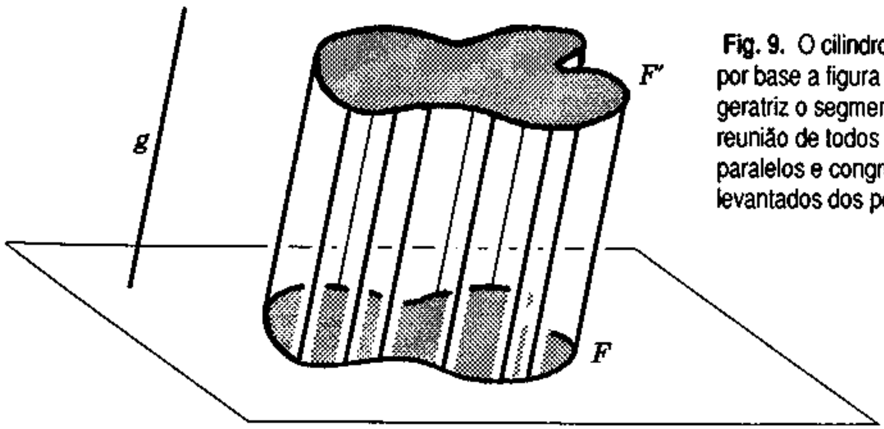


Fig. 9. O cilindro C, que tem por base a figura plana F e por geratriz o segmento g, é a reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a g, levantados dos pontos de F.

As extremidades não pertencentes à base F dos segmentos que geram o cilindro C, constituem uma figura plana F', contida num plano paralelo ao plano de F. A distância entre estes planos (isto é, o comprimento da perpendicular baixada de um ponto de F' sobre o plano de F) chama-se a *altura* do cilindro C.

Teorema 2. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Como no Teorema 1, construímos, no plano que contém F, um retângulo cuja área a seja igual à área de F e, tendo este retângulo como base, construímos um bloco retangular B cuja altura h seja igual à altura do cilindro C. Qualquer que seja o plano horizontal Π, a seção $\Pi \cap C$ é uma figura plana congruente a F, enquanto $\Pi \cap B$ é um retângulo congruente à base de B. Segue-se que $\Pi \cap C$ e $\Pi \cap B$ têm a mesma área, qualquer que seja o plano horizontal Π. Em virtude do Princípio de Cavalieri, concluímos que

$$vol(C) = vol(B) = a.h,$$

o que demonstra o Teorema 2.

Note-se que a definição de cilindro que acabamos de dar inclui, como caso particular, a possibilidade de ser a base F um polígono. Quando isso acontece, o sólido C fica limitado por faces planas e chama-se um *prisma*. Assim, temos a seguinte

Definição. *Prisma* é um cilindro cujas bases são polígonos.

Em particular, um paralelepípedo é um prisma: qualquer de suas faces pode servir-lhe de base. O Teorema 1 é, portanto, um caso particular do Teorema 2. Observe-se que as demonstrações são inteiramente semelhantes.

No caso em que a geratriz do cilindro é perpendicular ao plano da base, este chama-se um *cilindro reto*. No caso particular de ser a base um polígono, temos um *prisma reto*. Um paralelepípedo reto cuja base é um retângulo é simplesmente um bloco retangular.

Note-se ainda que, como conseqüência do Teorema 1, qualquer que seja a face do paralelepípedo que se tome como base, o produto de sua área pela altura correspondente é o mesmo.

5. Volume de um cone

Definição. Um *cone* K, tendo como *base* uma figura plana F, e como *vértice* um ponto P situado fora do plano de F, é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F.

O plano que contém a base F do cone K será considerado horizontal. A distância do vértice P a este plano, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano, chama-se *altura* do cone.

Lema. *Seja K um cone de vértice P, altura h_0 e base F_0 situada no plano horizontal Π_0. Seja Π outro plano horizontal, entre P e Π_0. Indiquemos com F a seção $\Pi \cap K$ e com h a distância entre P e Π, isto é, a altura do cone de base F e vértice P. Tem-se a relação*

$$\frac{área\ (F_0)}{área\ (F)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

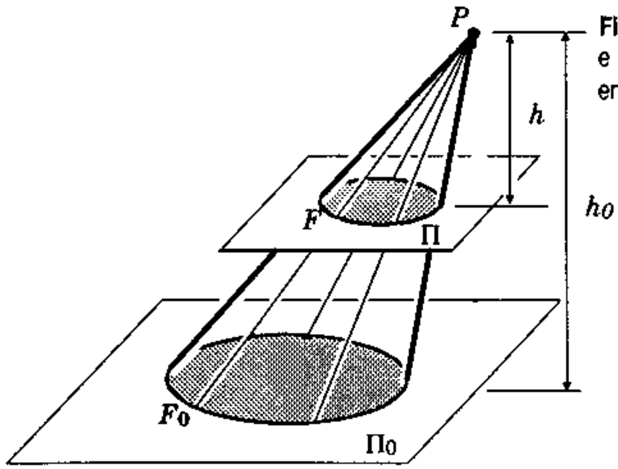


Fig. 10. A razão entre as áreas de F e F_0 é igual ao quadrado da razão entre as alturas h e h_0.

Demonstração. Basta observar que a correspondência $\sigma:\Pi \rightarrow \Pi_0$, que associa a cada ponto X do plano Π o ponto $X' = \sigma(X)$ de Π_0, obtido como interseção da semi-reta PX com o plano Π_0, é uma semelhança, com fator de semelhança igual a h_0/h. (Vide Figura 11, Capítulo 3.) Evidentemente, a semelhança σ transforma F em F_0, logo o lema segue-se do Teorema 6, Capítulo 3.

Teorema 3. *Dois cones de mesma altura e bases com áreas iguais têm volumes iguais.*

Demonstração. Sejam K e L dois cones com mesma altura h_0 e bases F_0 e G_0 com mesma área. Podemos admitir que as bases F_0 e G_0 estão no mesmo plano Π_0 e os vértices desses cones estão do mesmo lado de Π_0. Para todo plano horizontal Π, situado entre esses vértices e o plano Π_0, as seções $F = \Pi \cap K$ e $G = \Pi \cap L$ têm áreas iguais pois, segundo o Lema,

$$\frac{área(F)}{área(F_0)} = \frac{área(G)}{área(G_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^2,$$

onde h é a distância do vértice P (e, igualmente, do vértice Q) ao plano Π. Segue-se do Princípio de Cavalieri que $vol(K) = vol(L)$, como queríamos demonstrar.

Um cone cuja base é um polígono chama-se uma *pirâmide*. As faces laterais de uma pirâmide são triângulos. Uma pirâmide cuja base também é um triângulo chama-se um *tetraedro*.

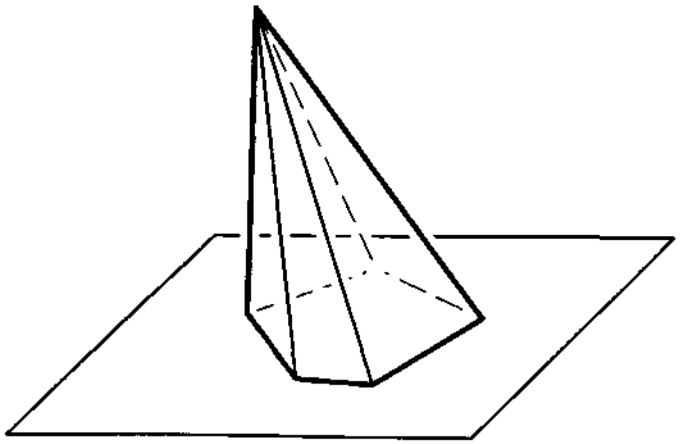


Fig. 11. Uma pirâmide com base pentagonal.

Teorema 4. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da altura pela área da base.*

Demonstração. Em virtude do Teorema 3, o volume do cone dado é igual ao de uma pirâmide cuja base é um triângulo ABC que tem área igual à da base do cone e cujo vértice B' é tal que o segmento $B'B$ é perpendicular ao plano ABC e tem comprimento igual à altura do cone. Basta então provar que o volume da pirâmide $ABCB'$ é igual a um terço do produto da área da base ABC pela altura BB'.

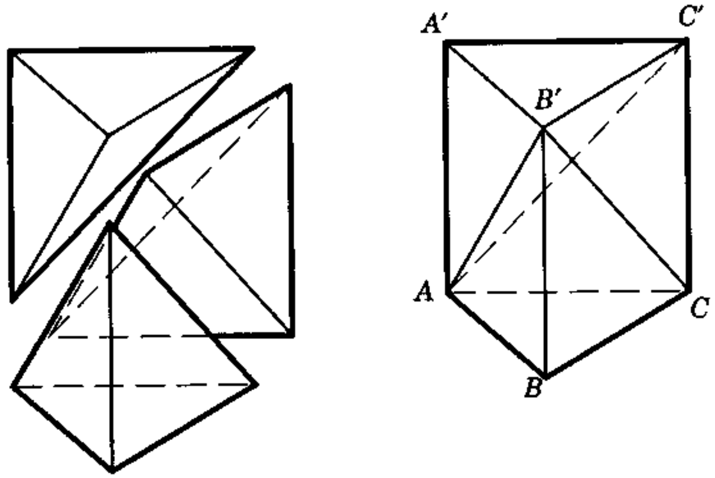


Fig. 12. O prisma à direita foi decomposto em 3 pirâmides $ABCB'$, $A'B'C'A$ e $ACC'B'$ de volumes iguais.

Levantemos AA' e CC', perpendiculares ao plano ABC, de comprimentos iguais ao de BB'. Obtemos um prisma reto de bases ABC e $A'B'C'$. Como o volume desse prisma é igual ao produto da área da base pela altura, basta mostrar que ele pode ser decomposto em 3 pirâmides, cada uma delas com volume igual ao da pirâmide $ABCB'$. Ora, as 3 pirâmides são a própria $ABCB'$, a pirâmide $A'B'C'A$ (com base congruente à base da primeira e com mesma altura) e a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruente à base $AA'C'$ da segunda e cuja altura, a partir do vértice B', é igual à altura da segunda pirâmide, $AA'C'B'$, a partir do mesmo vértice B'. Isto conclui a demonstração.

Corolário. *O volume de um cone de altura h, cuja base é um círculo de raio R, é igual a* $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

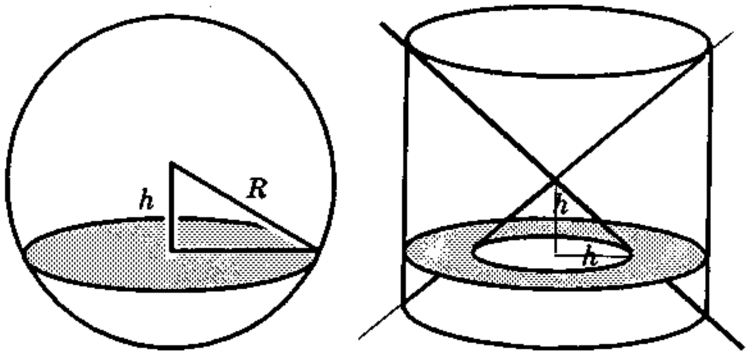
6. Volume da esfera

Definição. A *esfera* de centro num ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R. Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R.

Teorema 5. *O volume de uma esfera de raio R é igual a* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Demonstração. Consideremos um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e cuja altura tem medida $2R$. Imaginemos que a esfera dada repouse sobre o plano horizontal, no qual está contida a base do cilindro.

Fig. 13. Cortando a esfera por um plano horizontal que dista h do centro, obtemos um círculo cuja área mede $\pi(R^2 - h^2)$. O mesmo plano determina (entre as paredes do cone e do cilindro, à direita) um anel circular cuja área também mede $\pi(R^2 - h^2)$.



Com vértice no ponto médio do segmento que liga os centros dos dois círculos básicos, (superior e inferior) do cilindro, construamos dois cones, interiores ao cilindro, com bases naqueles dois círculos que limitam o cilindro. Consideremos o sólido T que é limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos 2 cones. O volume desse sólido T é igual à

diferença entre o volume do cilindro ($2\pi R^3$) e o volume dos dois cones ($2\pi R^3/3$), ou seja,

$$vol(T) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Assim o Teorema 5 estará demonstrado se provarmos que o volume da esfera é igual ao volume do sólido T. Para isso, em virtude do Princípio de Cavalieri, é suficiente mostrar que a esfera S e o sólido T determinam seções $\Pi \cap S$ e $\Pi \cap T$, de igual área, em cada plano horizontal Π. Dado o plano Π, seja h sua distância ao centro da esfera ou (o que é o mesmo) ao vértice comum dos dois cones. Então $\Pi \cap S$ é um círculo de raio

$$\sqrt{R^2 - h^2},$$

enquanto $\Pi \cap T$ é uma coroa circular cujo raio externo é igual a R e raio interno igual a h. Segue-se que

$$\text{área}(\Pi \cap S) = \pi\,(R^2 - h^2),$$

e

$$\text{área}(\Pi \cap T) = \pi\,(R^2 - h^2).$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 5.

7. Área do cilindro, do cone e da esfera

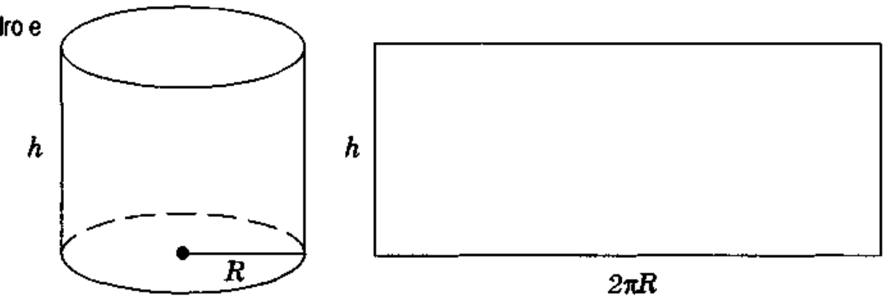
O estudo das áreas das superfícies curvas, bem como o próprio conceito de superfície, quando abordado com maior generalidade, apresenta dificuldades que o situam em nível superior ao do presente texto. Por isso nos limitaremos a uma apresentação elementar dos casos clássicos.

Área do cilindro.

Inicialmente, consideraremos um cilindro reto de altura h, cuja base é um círculo de raio R. Sua superfície é formada por dois círculos de raio r mais a *superfície lateral*, reunião de segmentos de comprimento h, perpendiculares à base, levantados a partir dos pontos da circunferência básica.

.Cortando o cilindro ao longo de um desses segmentos, podemos desenrolar sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo a obter um retângulo de base $2\pi R$ e altura h, logo a área da superfície lateral do cilindro é igual à área desse retângulo, que vale $2\pi Rh$.

Fig. 14. O cilindro e sua superfície lateral aplicada sobre o plano.



Área do cone.

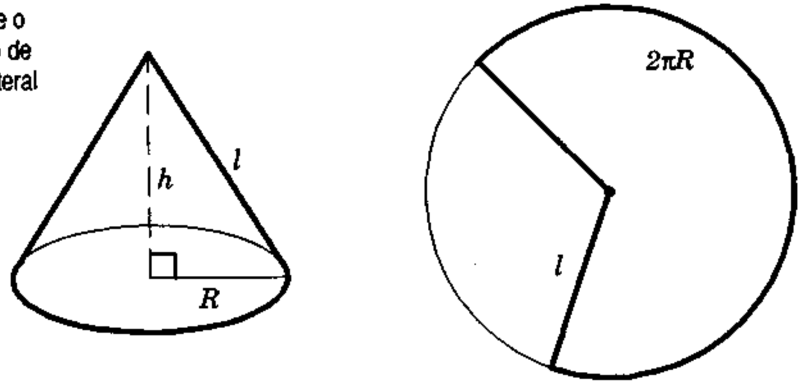
Em seguida consideremos o cone reto de altura h, com base num círculo de raio R. Sua superfície é formada pelo círculo básico mais a superfície lateral, que é a reunião de todos os segmentos de reta ligando o vértice do cone aos pontos da circunferência básica. Dizer que o cone é *reto* significa afirmar que esses segmentos têm todos os mesmo comprimento l, que se costuma chamar a *geratriz* do cone. Equivalentemente, isto quer dizer que a reta ligando o vértice do cone ao centro do círculo básico (eixo do cone) é perpendicular ao plano desse círculo. Evidentemente, $l = \sqrt{h^2 + R^2}$.

Cortando o cone ao longo de uma geratriz, podemos aplicar sua superfície lateral sobre o plano sem alterar a área. Obtemos então um setor de um círculo de raio l, o qual subtende um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$. A área lateral A do cone é igual à área desse setor, logo está para a área do círculo de raio l assim como o arco $2\pi R$ está para toda a circunferência $2\pi l$. Ou seja,

$$\frac{A}{\pi l^2} = \frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{R}{l} \quad \text{donde} \quad A = \pi l R.$$

[Usou-se acima o fato de que a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que ele subtende. Isto decorre imediatamente da definição de grandezas proporcionais. Ver "Meu Professor de Matemática", pag. 160.]

Fig. 15. O cone e o desenvolvimento de sua superfície lateral sobre o plano.



Área da esfera.

Ao contrário do cilindro e do cone, a esfera não possui uma superfície "desenvolvível", isto é, não é possível fazer cortes nela e depois aplicá-la sobre o plano, sem dobrar nem esticar. Por isso, para calcular a área de uma superfície esférica, devemos procurar métodos diferentes daquele utilizado nos casos de cilindro e do cone.

Vejamos como chegar a uma fórmula que nos dê a área da superfície de uma esfera de raio R. Dado um número positivo h, consideremos outra esfera de mesmo centro porém de raio $R + h$. A região compreendida entre essas duas esferas concêntricas é uma reunião de segmentos de reta de comprimento h (diferença entre os raios). Cada um desses segmentos é perpendicular a ambas as esferas. Logo é intuitivamente aceitável que, para valores pequenos de h, o volume V dessa casca seja aproximadamente igual a $S \times h$, onde S é a área da esfera de raio R. Usando a fórmula do volume da esfera, e usando o símbolo $\approx$ para significar "aproximadamente igual a", temos:

$$S \times h \approx V = \frac{4\pi}{3}(R+h)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi h(3R^2 + 3Rh + h^2).$$

Assim, para valores pequenos de h, temos

$$S \approx \frac{4}{3}\pi\,(3R^2 + 3Rh + h^2).$$

Ora, se h é realmente pequeno, as parcelas $3Rh$ e h^2 são insignificantes, logo

$$S = \frac{4}{3}\pi \times 3R^2 = 4\pi R^2.$$

Podemos então concluir que a superfície da esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$.

O raciocínio acima, estritamente falando, não constitui uma demonstração mas apenas um argumento heurístico para indicar como se obtém a expressão $4\pi R^2$ para a área da esfera. Uma demonstração da fórmula $S = 4\pi R^2$ pode ser encontrada nos livros de Cálculo, como aplicação do conceito de integral. Demonstrações elementares da mesma fórmula constam dos textos usuais de Geometria, todas seguindo , a menos de detalhes de exposição, as idéias originais de Arquimedes.

Por completeza, mostremos como deduzir elementarmente a fórmula $S = 4\pi R^2$ à maneira de Arquimedes.

A idéia é considerar a superfície esférica como obtida pela rotação de uma semi-circunferência em torno de um diâmetro. Inscreve-se nessa semi-circunferência a metade de um polígono regular de $2n$ lados. Por rotação, essa poligonal gera uma superfície formada por $n-2$ troncos de cone mais um cone no topo e outro na base. Todos esses cones e troncos têm geratrizes de mesmo com-

primento l (= lado do polígono inscrito). A área dessa superfície inscrita é uma aproximação para a área da esfera. Aumentando indefinidamente o número de lados do polígono regular inscrito obtém-se, no limite, a área da esfera.

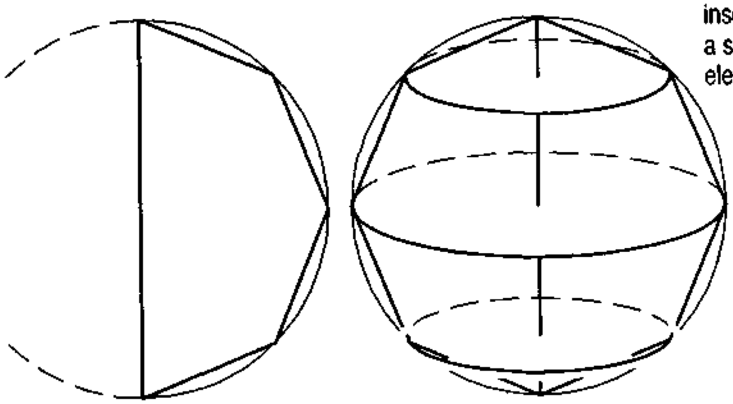


Fig. 16. Polígono regular inscrito num semi-círculo e a superfície de rotação por ele gerada.

Temos, portanto, de começar calculando a área lateral de um tronco de cone. Por definição, um *tronco de cone* (reto) é a parte de um cone compreendida entre 2 planos perpendiculares ao eixo. A base do tronco é um círculo de raio R e o topo é outro círculo, de raio r. A altura h do tronco é o segmento do eixo entre os 2 planos. Seja l a geratriz do tronco de cone (segmento da geratriz do cone compreendido entre o topo e a base do tronco).

Evidentemente, a área da superfície lateral do tronco de cone acima descrito é igual a $\pi R(l+y) - \pi r y$, onde $l+y$ é a geratriz do cone inteiro. Esta expressão, entretanto, precisa ser modificada, inicialmente para eliminar y. Começamos com o

Lema 1. *A área lateral do tronco de cone é igual ao produto da geratriz pelo comprimento da circunferência média.*

Demonstração: A "circunferência média" é a que tem raio $m = (R+r)/2$. A semelhança entre o menor e o maior triângulo retângulo na Figura 17 fornece

$$\frac{R}{l+y}=\frac{r}{y},$$

isto é, $Ry = r(l+y)$, ou ainda, $rl = Ry - ry$. Somando Rl a ambos os membros desta igualdade e multiplicando por π, resulta

$$2\pi ml = \pi(R+r)l = \pi R(l+y) - \pi ry = \text{área do tronco de cone.}$$

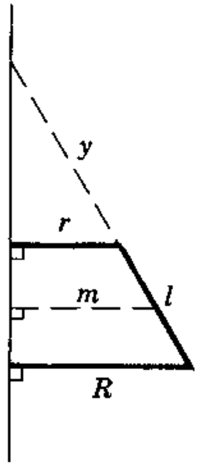


Fig. 17. O segmento de medida l, girando em torno do eixo vertical, gera um tronco de cone de raios r e R. O segmento horizontal que liga o meio da altura ao meio da aresta lateral do tronco de cone tem comprimento $m = (R + r)/2$.

Num tronco de cone, chamemos de *apótema* ao comprimento a do segmento de reta perpendicular à geratriz l, levantado pelo seu ponto médio e terminando no eixo.

O segundo lema fornece outra expressão para a área lateral do tronco de cone, a qual se presta melhor ao propósito de determinar a área da esfera.

Lema 2. *A área lateral do tronco de cone é igual ao produto $2\pi ah$ do comprimento ($2\pi a$) da circunferência que tem como raio o apótema pela altura h do tronco.*

Demonstração: O triângulo retângulo de hipotenusa a e cateto m é semelhante ao triângulo retângulo de hipotenusa l e cateto h na figura (pois a é perpendicular a l e m é perpendicular a h). Logo

$$\frac{m}{a}=\frac{h}{l},$$

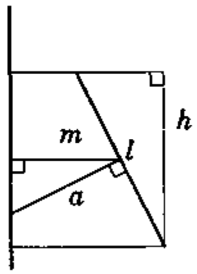


Fig. 18. O apótema, de comprimento a, é perpendicular à aresta lateral do tronco de cone, passando pelo seu ponto médio. A igualdade $ah = ml$ permite exprimir a área do tronco de cone de modo conveniente para calcular a área da esfera.

ou seja,

$$ml = ah.$$

Portanto,

$$2\pi ah = 2\pi ml = \text{ área lateral do tronco de cone.}$$

Observação. Se temos um cone inteiro, então $x = y = 0$, logo $m/a = h/l$ e a fórmula $2\pi ah$ = área lateral, vale também neste caso.

Teorema. *A área da superfície esférica de raio R é igual a $4\pi R^2$.*

Demonstração: Como na Figura 16, inscrevemos na semi-circunferência de raio R a metade de um polígono regular de $2n$ lados. Girando a figura em torno do diâmetro, obtemos $n - 2$ troncos de cone, mais 2 cones inteiros, e a área lateral da superfície assim obtida é, em virtude do Lema 2 (e levando em conta que a soma das alturas dos cones e troncos é $2R$), igual a $2\pi a \times 2R = 4\pi aR$, onde a é o apótema do polígono. Quando o número n de lados do polígono cresce indefinidamente, a tende para R e a área calculada tende para a área da superfície esférica, que é, portanto, igual a $4\pi R^2$.

Observação. A partir da área da superfície esférica, é fácil obter novamente a fórmula para o volume da esfera de raio R. Ele é o número cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros inscritos na esfera, isto é, poliedros nela contidos, os quais têm seus vértices sobre a superfície esférica. Cada um desses poliedros se decompõe, por projeção a partir do centro da esfera, numa reunião de pirâmides, todas tendo esse centro como vértice e as faces do poliedro como base. Quando as faces do poliedro inscrito são suficientemente pequenas, as alturas dessas pirâmides são aproximadamente iguais ao raio R da esfera e a soma das áreas de suas bases é aproximadamente igual à área da superfície esférica, isto é, a $4\pi R^2$. Como o volume de cada pirâmide é

$$\frac{1}{3}\text{ base} \times \text{altura},$$

segue-se que a soma dos volumes dessas pirâmides, isto é, o volume do poliedro inscrito, é aproximadamente igual a

$$\frac{4\pi R^2 \times R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Este argumento é interessante, entre outras coisas, porque explica a origem do denominador 3 nesta fórmula.

8. Nota histórica

Volumes são tratados por Euclides no Livro XII dos Elementos. Não há fórmulas ali para exprimi-los, naturalmente. Os principais teoremas demonstrados são os seguintes

- *As pirâmides e os prismas de mesma base (ou mesma altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).*
- *Todo prisma triangular se decompõe em três pirâmides equivalentes.*
- *O volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura.*
- *Os cones e cilindros de mesma base (ou altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).*

- *Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros.*

Em linguagem atual, isto significa que os volumes do prisma e do cilindro são proporcionais à base e à altura. Mais precisamente, existe uma constante k tal que esses volumes têm a expressão $V = k \times$ base $\times$ altura. Já os volumes do cone e da pirâmide têm a expressão

$$V = \frac{k}{3} \times \text{base} \times \text{altura}.$$

Escolhendo o cubo de aresta 1 como unidade de volume, resulta que $k = 1$. Por conseguinte, Euclides essencialmente sabia como calcular os volumes desses sólidos.

Quanto à esfera, o quinto teorema acima citado significa que seu volume tem a expressão $V = cR^3$, onde R é o raio. Mas Euclides nada concluiu a respeito da constante c. Só quase um século mais tarde Arquimedes provou que $c = 4\pi/3$.

Os Elementos não fazem referência às áreas do cone, do cilindro e da esfera. Evidentemente, as áreas do cilindro e do cone são fáceis de calcular: a primeira é a de um retângulo e a segunda, de um setor circular. Mas para saber a área da esfera, foi preciso novamente esperar até que o gênio de Arquimedes resolvesse o problema.

Arquimedes, que viveu de 287 a 212 A.C., foi o mais notável dos matemáticos gregos e um dos maiores de todos os tempos. Ele nasceu em Siracusa, cidade da Sicília, e lá viveu quase toda a sua vida. Mas é certo que estudou em Alexandria, com discípulos de Euclides.

A vida de Arquimedes contém episódios pitorescos, como o de sair correndo nú pelas ruas de Siracusa, gritando "Eureka!" (achei) após conceber, enquanto se banhava, seu conhecido princípio sobre corpos flutuantes. Ou sua afirmação bombástica ao rei de Siracusa: "Dê-me um ponto de apoio e eu deslocarei a terra!". O historiador romano Plutarco, em sua biografia do general Marcelo, descreve com detalhes os notáveis engenhos bélicos inventados por Arquimedes para infernizar a vida das tropas romanas no cerco a Siracusa, terminando com sua trágica morte no ano 212 A.C., assassinado por um impaciente soldado romano que não quis esperar a conclusão dos cálculos que ele fazia na areia antes de levá-lo à presença de Marcelo.

Arquimedes foi o primeiro a efetuar, com rigor e elegância, o cálculo do volume da esfera e da área de sua superfície. No livro intitulado "Superfície e volume do cilindro e da esfera" ele prova os seguintes teoremas:

- *A superfície de uma esfera é igual a quatro vezes o maior círculo nela contido.*

- *Qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone cuja base é o maior círculo nela contido e cuja altura é o raio da esfera.*

E resume esses fatos no elegante enunciado abaixo, do qual ele se orgulhava tanto que queria tê-lo gravado em seu túmulo:

"O cilindro que tem por base o maior dos círculos contidos na esfera e por altura o diâmetro dessa esfera é igual a uma vez e meia a mesma esfera e sua superfície, incluindo as bases, é também igual a uma vez e meia a superfície da esfera".

Este enunciado contém as fórmulas

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad S = 4\pi R^2$$

do volume e da área da superfície de uma esfera de raio R.

Para um relato lúcido da vida e dos trabalhos de Arquimedes, bem como de outros matemáticos gregos, vide "Episódios da História Antiga da Matemática", por A. Aaboe, publicação da Sociedade Brasileira de Matemática.

O método mais eficiente e geral que se usa hoje em dia para obter as fórmulas do volume e da área dos chamados "três corpos redondos" (cilindro, cone e esfera) é o cálculo infinitesimal, com a integração de funções elementares.

O cálculo foi desenvolvido na segunda metade do século 17, por Newton e Leibniz, a partir de trabalhos iniciais de Fermat e Descartes. Arquimedes, entretanto, já pode ser considerado o precursor dos métodos infinitesimais que conduziram à noção de integral. Muito depois dele, no começo do século 17, o padre italiano Bonaventura Cavalieri, discípulo de Galileu, deu um passo importante na mesma direção com seu livro "Geometria dos Indivisíveis". Ali está enunciado seu princípio, do qual se fez largo uso no presente texto. Cavalieri considerava uma região plana como formada por cordas paralelas e um sólido como constituído de placas planas paralelas. As idéias de Cavalieri exerceram forte influência em Leibniz. Mesmo Newton, o outro criador do Cálculo, embora assumisse publicamente uma atitude crítica em relação aos indivisíveis, em alguns de seus trabalhos usou terminologia introduzida por Cavalieri.

9. Sobre o ensino de áreas e volumes

Quando se tem de justificar, a nível do ensino de segundo grau, as fórmulas para volumes e áreas dos corpos sólidos mais conhecidos, as seguintes alternativas se apresentam:

A) Adotar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes, aperfeiçoada por autores modernos como Legendre e Hadamard. O volume do bloco retangular é tratado como no presente texto mas já os volumes do paralelepípedo e da pirâmide requerem aproximações por poliedros retangulares. Comparando (como pareceria natural) com o estudo das áreas do paralelogramo e do triângulo, nota-se uma grande diferença pois, no Capítulo 2 deste texto, estas áreas foram obtidas de modo simples, a partir do retângulo, apenas cortando e recolando. Esta diferença, por sinal, intrigou o grande matemático David Hilbert, que pôs, em 1900, o problema de saber se seria possível decompor uma pirâmide num número finito de poliedros que, reagrupados devidamente, formassem um bloco retangular. Seu aluno Max Dehn provou que não. (Vide RPM número 14, pag. 19 (1987).) Assim, não se pode evitar algum tipo de passagem ao limite no cálculo do volume da pirâmide e do paralelepípedo.

O volume do cone e do cilindro são facilmente obtidos aproximando-os por pirâmides e prismas respectivamente. Já o volume da esfera pode ser aproximado pelo da figura obtida pela rotação, em torno de um diâmetro, de um polígono regular inscrito no círculo equatorial. Essa figura, conforme vimos na seção 7, é formada por dois cones mais diversos troncos de cone, cujos volumes se calculam e depois se passa ao limite, fazendo o número de lados do polígono aumentar indefinidamente.

O tratamento acima resumido tem sido adotado nos livros brasileiros, salvo durante um intervalo contendo um pouco mais do que a década de 30, quando os nossos textos adotaram a segunda alternativa, que descrevemos a seguir.

B) Usar o Cálculo Infinitesimal. O prestigioso matemático alemão Felix Klein comandou, no início do século 20, um movimento no sentido de modernizar o ensino da Matemática nas escolas secundárias. Uma de suas teses era a introdução do Cálculo, suavemente, no currículo escolar dos anos correspondentes ao nosso segundo grau. Isto permitiria tratar de forma simples e definitiva certos conceitos físicos, como velocidade e aceleração, e, mais geralmente, evitaria a perda de tempo decorrente de estudar um assunto de modo elementar, porém complicado, para depois, na universidade, revê-lo de modo mais fácil e mais geral, com auxílio do Cálculo. Áreas e volumes eram exemplos notáveis para ilustrar a tese de Klein.

No Brasil, até 1943, o ensino antes da universidade era dividido em três cursos: primário (4 anos), secundário (5 anos) e complementar, ou pré-universitário (2 anos). Derivadas e integrais eram estudadas nestes dois últimos anos. Com a reforma de 1943, os sete anos finais foram reagrupados em 4 + 3 (ginásio e colégio). O estudo do Cálculo Diferencial foi mantido no último ano do curso colegial mas o Cálculo Integral foi abolido. Com isso, áreas e

volumes de corpos sólidos voltaram a ser tratados nos moldes de Euclides e Arquimedes.

A abordagem de áreas e volumes na escola secundária por meio de integrais tem, sem dúvida, o mérito da grande variedade de aplicações, além de ser definitiva. Por outro lado, levanta difíceis questões de natureza didática referentes ao grau de rigor nos fundamentos.

C) Utilizar o princípio de Cavalieri. Esta alternativa, que escolhemos aqui, permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume. No fundo, o princípio de Cavalieri é um resultado sobre integrais. (Corresponde a afirmar que uma integral múltipla pode ser calculada por meio de repetidas integrais simples.) Mas, apresentado sob a forma de um postulado, como o fizemos, é intuitivamente aceitável e conduz rapidamente aos resultados. Seu ponto fraco é que não se aplica ao cálculo de áreas de superfícies curvas. Esta deficiência, entretanto, é amplamente compensada por suas vantagens.

10. Exercícios

1. De que modo se poderia usar uma balança para calcular o volume de um sólido?

2. A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

3. Dois cubos ou duas esferas quaisquer são figuras semelhantes.

4. Num bloco retangular, o quadrado da diagonal é igual à soma dos quadrados das 3 arestas que concorrem num vértice.

5. Dadas as semi-retas não coplanares OX, OY, e OZ, com a mesma origem O, seja $V(x, y, z)$ o volume da pirâmide de vértice O cuja base é o triângulo XYZ, com $\overline{OX} = x$, $\overline{OY} = y$ e $\overline{OZ} = z$. Prove que $V(x, y, z)$ é diretamente proporcional a x, y e z e conclua que

$$\frac{V(x,y,z)}{V(x',y',z')} = \frac{xyz}{x'y'z'}.$$

6. Se os ângulos $\angle XOY$, $\angle XOZ$ e $\angle YOZ$ são retos, mostre que $V(x,y,z) = xyz/6$.

7. Decomponha o cubo de aresta a em 5 tetraedros justapostos, sendo 4 deles congruentes, com as três arestas laterais iguais a a e as três arestas da base medindo $a\sqrt{2}$. O quinto tetraedro é regular, com as seis arestas medindo $a\sqrt{2}$. Conclua que o volume do tetraedro regular de aresta α é igual a $\alpha^3/6\sqrt{2}$. Obtenha o mesmo resultado a partir da fórmula do volume de uma pirâmide.

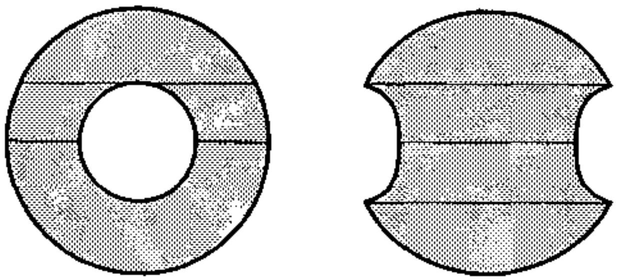
8. No exercício 5 acima, se os ângulos $\angle XOY$, $\angle XOZ$ e $\angle YOZ$ são retos, mostre que o quadrado da área do triângulo XYZ é igual à soma dos quadrados das áreas dos triângulos XOY, XOZ e YOZ. (Sugestão: use o Exerc. 21 do Capítulo 3 e o Exerc. 4 acima.)

9. Se todo plano horizontal Π secciona os sólidos A e B segundo figuras planas $\Pi \cap A$ e $\Pi \cap B$ tais que a área de $\Pi \cap A$ é k vezes a área de $\Pi \cap B$, onde k é uma constante, então $vol(A) = k.vol(B)$.

10. *O princípio de Cavalieri para áreas de figuras planas* tem o seguinte enunciado (ver Figura 19):

"Sejam A e B figuras planas. Se, para toda reta horizontal r, as interseções $r \cap A$ e $r \cap B$ são formadas por um número finito de segmentos de reta tais que a soma dos comprimentos dos segmentos em $r \cap A$ é igual à soma análoga em $r \cap B$, então A e B têm áreas iguais".

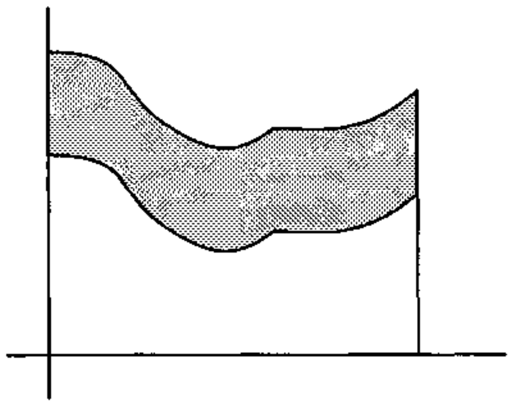
Fig. 19



Baseando-se no Princípio de Cavalieri para sólidos, demonstre o resultado acima enunciado. Prove também o análogo do Exercício 9 para figuras planas.

11. Considere, no plano, dois eixos perpendiculares OX e OY, que se encontram no ponto O. Seja A um ponto do eixo OX. É dada uma curva C, no plano, com a seguinte propriedade: qualquer perpendicular a OX levantada de um ponto do segmento OA, encontra a curva C num único ponto. Calcule a área da figura plana F obtida levantando-se a partir de cada ponto de C um segmento de comprimento h, paralelo ao eixo OY (ver Figura 20).

Fig. 20



12. Seja Π_0 um plano horizontal. Considere uma superfície S com a seguinte propriedade: a reta vertical que passa por um ponto de S não contém nenhum outro ponto de S. Seja C o sólido formado levantando-se, a partir de cada ponto de S, um segmento vertical de comprimento h. Qual é o volume de C? *Caso particular*: Seja S a superfície de um hemisfério repousando sobre o plano horizontal. Sobre cada ponto de S levante um segmento vertical de comprimento 1. Qual é o volume do sólido assim obtido?

13. Sobre 3 retas paralelas, não situadas no mesmo plano, são tomados 3 segmentos de igual comprimento h. Prove que o volume do prisma triangular assim obtido depende do comprimento h mas não das posições dos segmentos sobre as retas.

14. Chama-se *seção reta* de um cilindro à figura plana obtida como interseção do cilindro com um plano perpendicular à geratriz. (Impõe-se ainda, tacitamente, que esse plano corte todos os segmentos de reta levantados da base paralelamente à geratriz.) Prove que o volume de um cilindro é igual ao produto da área de sua seção reta pelo comprimento da geratriz.

15. Mostre que o volume de um tronco de cone de base circular em função da altura h (do tronco) e dos raios das bases R, r, tem a expressão

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

16. Takakasu Seki (1642 - 1708), conhecido como o "Newton japonês" ou o "pai da Matemática japonesa", descobriu os determinantes ao mesmo tempo que Leibniz. Era hábil praticante do que os chineses chamavam o "método do elemento celestial", que vinha a ser a resolução numérica de equações algébricas. Os matemáticos japoneses costumavam escrever livros nos quais resolviam problemas e, no final, propunham outros mais difíceis. Em seguida, vinha outro autor que resolvia estes últimos e propunha novos. Este processo durava séculos. Numa etapa dessa série, Seki chegou a resolver um problema que se reduzia a achar uma raiz de uma equação de grau 1458! Seki deduziu a fórmula da área de uma elipse cujos eixos medem $2a$ e $2b$. Na biografia de Seki, escrita por Akira Kobori, lemos o seguinte:

"A fim de obter a área de uma elipse, ele cortou de um cilindro circular infinito dois segmentos cilíndricos com geratrizes de mesmo comprimento: um com bases circulares e outro com bases elípticas. Esses dois cilindros têm o mesmo volume. Igualando os volumes desses dois pedaços do cilindro, Seki obteve o resultado de que a área de uma elipse é $\pi/4$ vezes o produto do eixo maior pelo eixo menor."

Explicite e justifique as afirmações do trecho acima, usando o princípio de Cavalieri e o Exercício 21 do Capítulo 3.

17. Numa esfera, cave um buraco cilíndrico cujo eixo seja um diâmetro da esfera. Use o Princípio de Cavalieri para mostrar que o volume do anel que sobrou é igual ao volume de uma esfera cujo diâmetro é a altura do cilindro. Calcule também o volume da parte retirada em função dos raios da esfera e do cilindro.

18. No espaço tridimensional, considere o sistema de coordenadas cartesianas definido pelos 3 eixos ortogonais OX, OY e OZ. Dados os números reais positivos a, b, e c, considere a função $f{:}E \to E$, definida por $f(P) = P'$, onde $P = (x, y, z)$ e $P' = (ax, by, cz)$. Mostre que a esfera F de centro $O = (0, 0, 0)$ e raio e 1 é transformada por f numa figura F' tal que $vol(F') = abc.vol(F)$.

19. Como no exercício anterior, considere um sistema de eixos ortogonais no espaço tridimensional E. Prove:

(a) Que o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à esfera S de centro O e raio 1, se, e somente se, $x^2 + y^2 + z^2$ 1.

(b) Que a função f do exercício anterior transforma a esfera S na figura F formada pelos pontos (x, y, z) tais que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

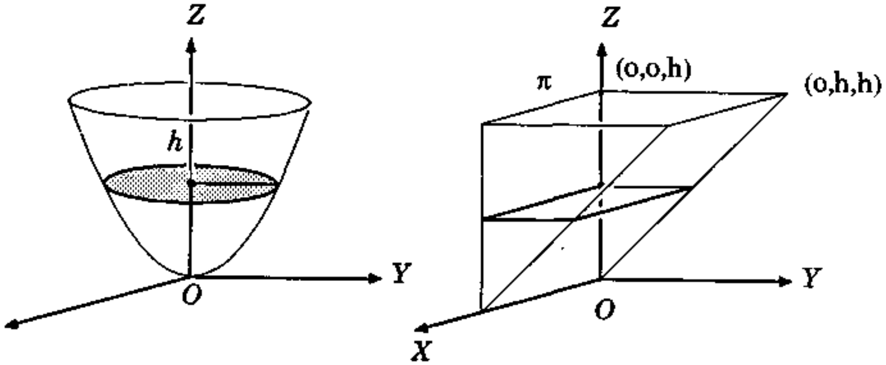
A figura F chama-se o *elipsóide* de eixos $2a$, $2b$ e $2c$. Conclua que o volume desse elipsóide é igual a $4abc/3\pi$.

(c) Que se $a = b$ então a interseção do elipsóide F com qualquer plano horizontal (z = constante) é um círculo com centro sobre o eixo OZ. Conclua que, neste caso, F é o sólido gerado pela rotação em torno do eixo OZ de uma elípse situada no plano $x = 0$, a qual tem eixos $2a$ e $2c$.

20. *O parabolóide de revolução* de altura h é o sólido gerado pela rotação do segmento de altura h da parábola $z = y^2$ (situada no plano OYZ) em torno do eixo vertical OZ. Em termos das coordenadas cartesianas (x, y, z) esse parabolóide é o conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas cumprem as condições $x^2 + y^2 \leq z \leq h$.

Observe que cada plano horizontal $z=$ constante > 0 intersecta o parabolóide segundo um círculo de raio $\sqrt{z}$.

Fig. 21



Considere um prisma de altura π, que tem por base o triângulo retângulo isósceles, no plano OYZ, cujos vértices são os pontos O, $(0, 0, h)$ e $(0, h, h)$. Use o Princípio de Cavalieri para concluir que o volume do parabolóide é igual a $\pi h^2/2$.

21. Comparando as secções horizontais da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

com as secções horizontais do círculo $x^2 + y^2 \leq b^2$,, use o Princípio de Cavalieri para figuras planas a fim de obter uma nova demonstração de que a área da elípse é igual a πab.

22. Compare as seções horizontais do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

com as da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$,

e use o Princípio de Cavalieri (na forma do Exercício 9) para ter uma nova prova de que o volume do elipsóide é igual a $4\pi abc/3$.

23. A figura sólida gerada pela rotação de um círculo de raio a em torno de um eixo vertical situado no plano do círculo, a uma distância $b>a$ do seu centro, chama-se *toro*. Compare as seções horizontais do toro com as de um cilindro reto horizontal cuja base é um círculo de raio a e cuja altura mede $2\pi b$. [Suponha que o cilindro e o toro repousam sobre o mesmo plano, perpendicular ao eixo do toro.] Use o Princípio de Cavalieri para concluir que o volume do toro é igual a $2\pi^2 a^2 b$.

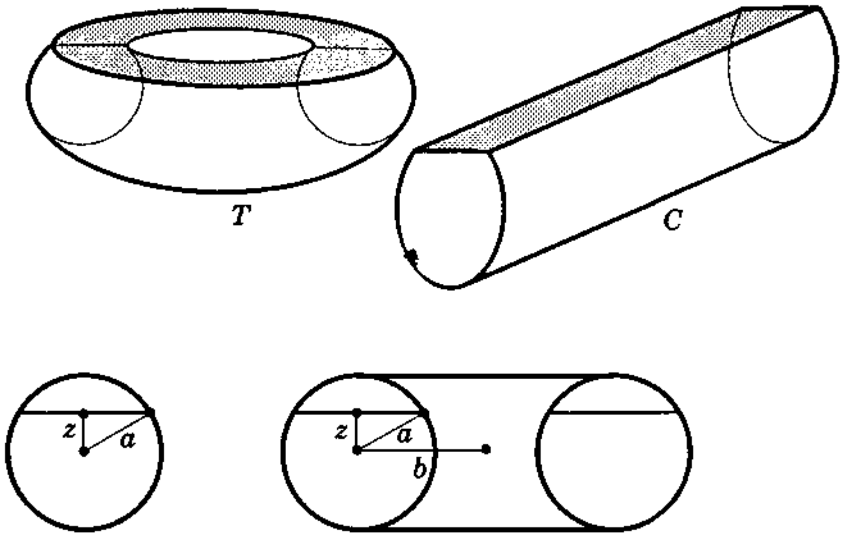


Fig. 22. Um plano horizontal, a uma altura z (a partir dos centros dos círculos que geram o toro e o cilindro) secciona o toro T segundo um anel circular de raio interno $r = b - \sqrt{a^2 - z^2}$ e raio externo $R = b + \sqrt{a^2 - z^2}$. O mesmo plano horizontal secciona o cilindro C *segundo um retângulo de base* $2\sqrt{a^2 - z^2}$ *e altura* $2\pi ab$. *Estas seções horizontais têm a mesma área.*

Leituras recomendadas

1. João Lucas Marques Barbosa – *Geometria Euclidiana Plana.* Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

2. Asger Aaboe – *Episódios da História Antiga da Matemática* (tradução de J. B. Pitombeira de Carvalho). Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

3. Elon Lages Lima – *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

4. Carl Boyer – *História da Matemática* (tradução de Elza Gomide). Editora Edgar Blücher / Editora da Universidade de São Paulo.

5. Dirk Struik – *História Concisa das Matemáticas* (tradução de João Cosme Santos Guerreiro). Gradiva Publicações Ltda, Lisboa, 1989.

Os leitores interessados numa apresentação mais conceitual dos números reais poderão consultar o livro abaixo, especialmente o Capítulo 2:

6. Elon Lages Lima – *Análise Real*, vol. 1. Publicação do IMPA, distribuida pela SBM.

Nota: Os livros publicados pela Sociedade Brasileira de Matemática podem ser adquiridos nas secretarias regionais da SBM ou escrevendo-se diretamente à sede da Sociedade, na Estrada Dona Castorina, 110, CEP 22460, Rio de Janeiro, RJ.