

Distribuição Uniforme Discreta

Notação

Quando se trata de variáveis aleatórias, lê-se o símbolo $\sim$ como “tem distribuição”.

- **Distribuição Uniforme Discreta:**

Dizemos que a v.a. $X \sim$ Uniforme Discreta sobre o conjunto

$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n.$$

X é um elemento escolhido ao acaso em $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Distribuição Uniforme Discreta

- Exemplo: X = Resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(X) = \sum_x x p(x) = \frac{1}{6} \times [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6] = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 p(x) = \frac{1}{6} \times [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2] = \frac{91}{6}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Distribuição de Bernoulli

- Consideremos um experimento com espaço amostral Ω e o evento A .
- Vamos dizer que ocorre **sucesso** se o evento A acontecer.
Se A não acontecer, então ocorre **fracasso**.
- Exemplo: Lançamos uma moeda e observamos se cai em cara ou coroa.
Consideramos a obtenção de cara como sucesso.
- Esse tipo de experimento se chama **ensaio de Bernoulli**.

Distribuição de Bernoulli

- Ensaio de Bernoulli: Interessa-nos se ocorre sucesso ou fracasso.
- Exemplo: Uma pessoa é selecionada ao acaso entre os moradores de uma cidade, e pergunta-se a ela se concorda com um projeto municipal. As respostas possíveis são apenas “Sim” (sucesso) ou “Não” (fracasso).

Distribuição de Bernoulli

- Ensaio de Bernoulli: Interessa-nos se ocorre sucesso ou fracasso.
- Exemplo: Uma pessoa é selecionada ao acaso entre os moradores de uma cidade, e pergunta-se a ela se concorda com um projeto municipal. As respostas possíveis são apenas “Sim” (sucesso) ou “Não” (fracasso).
- Definimos a variável aleatória $X = \begin{cases} 1 & \text{se ocorre sucesso,} \\ 0 & \text{se ocorre fracasso.} \end{cases}$
- Dizemos que X é a **variável indicadora** da ocorrência de sucesso em um ensaio de Bernoulli.
- $P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p$ e $P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$.
- Notação: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$; p é chamado **parâmetro** da distribuição.

Distribuição de Bernoulli

- Função de probabilidade de X :

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, x = 0, 1.$$

- $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$
- $E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p.$
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p).$

- $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Distribuição de Bernoulli

- Exemplo: Lançamos um dado honesto e consideramos a obtenção da face 5 como sucesso.

Então, $X \sim \text{Bernoulli}(p = 1/6)$.

x	0	1
$p(x)$	5/6	1/6

$$E(X) = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{5}{36}.$$

Distribuição Binomial

- Consideremos novamente um experimento com espaço amostral Ω e o evento A .
- Vamos dizer que ocorre **sucesso** se o evento A acontecer.
Se A não acontecer, então ocorre **fracasso**.
- Repetimos o experimento n vezes, de forma independente.
- X : Número de sucessos nos n experimentos.
- Exemplo: Lançamos uma moeda 10 vezes e contamos o total de caras.
Consideramos a obtenção de cara como sucesso.
Os valores possíveis de X são $\{0, 1, \dots, 10\}$.

Distribuição Binomial

- A realização de um número fixado de ensaios de Bernoulli independentes origina uma variável aleatória com **distribuição binomial**.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%.
Um grupo de 3 indivíduos é sorteado dentre a população vacinada, e cada um deles é submetido a um teste para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos a imunização como sucesso.

Distribuição Binomial

- Para $i = 1, 2, 3$, seja

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ está imunizado,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- As variáveis aleatórias X_1 , X_2 e X_3 são independentes, cada uma com distribuição Bernoulli($p = 0.8$).

Distribuição Binomial

- Para $i = 1, 2, 3$, seja

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ está imunizado,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- As variáveis aleatórias X_1 , X_2 e X_3 são independentes, cada uma com distribuição Bernoulli($p = 0.8$).
- Seja X o número de indivíduos imunizados no grupo.
- Então, $X = X_1 + X_2 + X_3$ e X assume valores em $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Dizemos que X tem **distribuição binomial com parâmetros $n = 3$ e $p = 0.8$** .

Distribuição Binomial

evento	$P(\text{evento})$	X
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

Distribuição Binomial

- Assim, a função de probabilidade de X é dada por:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

- Observe que:

$$p(x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

Distribuição Binomial

- **Modelo geral:** Realizam-se n ensaios de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade p de sucesso.
- X : Número de sucessos obtidos nos n ensaios.
- Notação: $X \sim \text{Bin}(n, p)$; n e p são denominados parâmetros.

Distribuição Binomial

- **Modelo geral:** Realizam-se n ensaios de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade p de sucesso.
- X : Número de sucessos obtidos nos n ensaios.
- Notação: $X \sim \text{Bin}(n, p)$; n e p são denominados parâmetros.
- Função de probabilidade de X :

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n.$$

Distribuição Binomial

Observações

① Note que:

$$\sum_{x=0}^n P(X = x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1.$$

Distribuição Binomial

Observações

- ① Note que:

$$\sum_{x=0}^n P(X = x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1.$$

- ② Podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, onde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, X é a soma de n variáveis aleatórias independentes, com distribuição Bernoulli(p).

Distribuição Binomial

Proposição

Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$, então

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

Distribuição Binomial

Proposição

Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$, então

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

No exemplo da vacina, temos $X \sim \text{Bin}(n = 3, p = 0.8)$, logo

$$E(X) = 3 \times 0.8 = 2.4 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.48.$$

Distribuição Binomial

Exemplo

Suponha que 60% da população de uma cidade é a favor de um projeto proposto pelo prefeito.

Seleciona-se uma amostra aleatória de 15 pessoas.

- (a) Qual a probabilidade de que a amostra contenha no máximo duas pessoas favoráveis ao projeto?
- (b) Quais são o valor esperado e a variância do número de pessoas a favor do projeto na amostra?

Distribuição Binomial

Seja X o número de pessoas favoráveis ao projeto na amostra.

Então, $X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.6)$.

Distribuição Binomial

Seja X o número de pessoas favoráveis ao projeto na amostra.

Então, $X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.6)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (0.4)^{15} + \binom{15}{1} (0.6)^1 (0.4)^{14} + \binom{15}{2} (0.6)^2 (0.4)^{13} \\ &\approx 0.0002789. \end{aligned}$$

Distribuição Binomial

Seja X o número de pessoas favoráveis ao projeto na amostra.

Então, $X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.6)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (0.4)^{15} + \binom{15}{1} (0.6)^1 (0.4)^{14} + \binom{15}{2} (0.6)^2 (0.4)^{13} \\ &\approx 0.0002789. \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad E(X) = 15 \times 0.6 = 9 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 15 \times 0.6 \times 0.4 = 3.6.$$

Distribuição Binomial

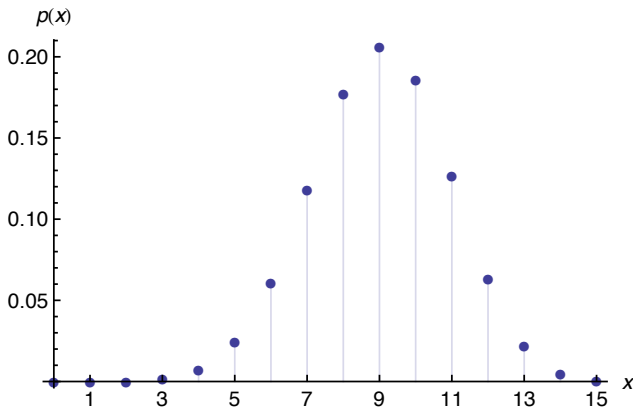


Figura: Função de probabilidade de $X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.6)$.

Distribuição Binomial

Proposição

Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$, onde $0 < p < 1$, então, à medida que x vai de 0 a n , $P(X = x)$ primeiro cresce e depois decresce, atingindo seu valor máximo quando x é o maior inteiro menor ou igual a $(n + 1)p$.

Distribuição Geométrica

- Novamente consideramos um experimento aleatório e chamamos a ocorrência de um evento A de **sucesso**.
- Porém, agora repetimos esse experimento **até que ocorra o primeiro sucesso**, registrando o número de repetições realizadas.
- Exemplo: Lançamos uma moeda repetidas vezes, até a primeira cara.

Distribuição Geométrica

- Novamente consideramos um experimento aleatório e chamamos a ocorrência de um evento A de **sucesso**.
- Porém, agora repetimos esse experimento **até que ocorra o primeiro sucesso**, registrando o número de repetições realizadas.
- Exemplo: Lançamos uma moeda repetidas vezes, até a primeira cara.
- Modelo geral: Ensaio de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p são realizados até que ocorra um sucesso ($0 < p < 1$).
- X : Número de ensaios necessários.
- Os valores possíveis de X são $1, 2, 3, \dots$

Distribuição Geométrica

- $P(X = 1) = p.$

$$P(X = 2) = (1 - p) p.$$

Em geral: $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$

- Notação: $X \sim \text{Geom}(p).$

- Observe que: $\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = p \sum_{x=1}^{\infty} (1 - p)^{x-1} = 1.$

Distribuição Geométrica

- $P(X = 1) = p.$

$$P(X = 2) = (1 - p) p.$$

Em geral: $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \dots$

- Notação: $X \sim \text{Geom}(p).$

- Observe que: $\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = p \sum_{x=1}^{\infty} (1 - p)^{x-1} = 1.$

Proposição

Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Distribuição Geométrica

Exemplo

Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente, até que se obtenha a face 6.

Determine:

- (a) a probabilidade de que sejam necessários exatamente 5 lançamentos.
- (b) a probabilidade de que sejam necessários pelo menos 4 lançamentos.
- (c) a esperança e a variância do número de lançamentos feitos.

Distribuição Geométrica

X : Número de lançamentos feitos até obter a face 6

$\Rightarrow X \sim \text{Geom}(p = 1/6)$.

$$(a) \quad P(X = 5) = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5} \approx 0.0804.$$

Distribuição Geométrica

X : Número de lançamentos feitos até obter a face 6

$\Rightarrow X \sim \text{Geom}(p = 1/6)$.

$$(a) \quad P(X = 5) = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5} \approx 0.0804.$$

$$(b) \quad P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=4}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.5787.$$

Distribuição Geométrica

X : Número de lançamentos feitos até obter a face 6

$\Rightarrow X \sim \text{Geom}(p = 1/6)$.

(a) $P(X = 5) = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5} \approx 0.0804.$

(b) $P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=4}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.5787.$

(c) $E(X) = \frac{1}{1/6} = 6$ e $\text{Var}(X) = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30.$

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)

- **Modelo geral:** Ensaio de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p são realizados até que ocorra o r -ésimo sucesso ($r \geq 1$ inteiro e $0 < p < 1$).
- X : Número de ensaios necessários.
- Os valores possíveis de X são $r, r + 1, \dots$
- Notação: $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$.

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)

Exemplo

Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente, até que a face 6 seja obtida 4 vezes.

X : Número de lançamentos feitos $\Rightarrow X \sim \text{Bin. Negativa}(r = 4, p = 1/6)$.

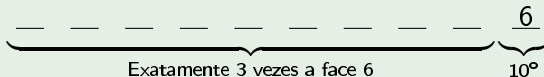
Distribuição Binomial Negativa (Pascal)

Exemplo

Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente, até que a face 6 seja obtida 4 vezes.

X : Número de lançamentos feitos $\Rightarrow X \sim \text{Bin. Negativa}(r = 4, p = 1/6)$.

$\{X = 10\}$: Exatamente 3 vezes a face 6 nos 9 primeiros lançamentos e o 10º lançamento resulta em 6.



$$P(X = 10) = \binom{9}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \times \left(\frac{1}{6}\right) = \binom{9}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.0217.$$

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)

- Função de probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots$$

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)

- Função de probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots$$

Proposição

Se $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$, então

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

- No exemplo do dado, temos:

$$E(X) = \frac{4}{1/6} = 24 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{4 \times (5/6)}{(1/6)^2} = 120.$$

Distribuição Hipergeométrica

- **Modelo geral:** Considere uma população de N objetos, dos quais R têm a característica 1 e $N - R$ têm a característica 2.
- Retiram-se n objetos ao acaso da população (sem reposição).
- X : Número de objetos com a característica 1 na amostra.

Distribuição Hipergeométrica

- **Modelo geral:** Considere uma população de N objetos, dos quais R têm a característica 1 e $N - R$ têm a característica 2.
- Retiram-se n objetos ao acaso da população (sem reposição).
- X : Número de objetos com a característica 1 na amostra.
- Função de probabilidade de X :

$$P(X = x) = \binom{R}{x} \binom{N - R}{n - x} \binom{N}{n}^{-1},$$

para x inteiro tal que $\max(0, n - N + R) \leq x \leq \min(n, R)$.

- Notação: $X \sim \text{Hipergeométrica}(n, R, N)$, $n \leq N$, $R \leq N$.

Distribuição Hipergeométrica

Proposição

Seja $X \sim \text{Hipergeométrica}(n, R, N)$ e considere $p = R/N$ a fração de objetos com a característica 1 na população. Então,

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \left(\frac{N-n}{N-1} \right) np(1-p).$$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo

Um lote de componentes eletrônicos contém 100 itens, dos quais 10 são defeituosos. Seleciona-se ao acaso uma amostra de 5 itens, sem reposição.

Calcule:

- (a) a probabilidade de que a amostra contenha pelo menos um item defeituoso.
- (b) a esperança e a variância do número de itens defeituosos na amostra.

Distribuição Hipergeométrica

X : Número de itens defeituosos na amostra retirada

$\Rightarrow X \sim \text{Hipergeométrica}(n = 5, R = 10, N = 100)$.

(a) A probabilidade de que haja pelo menos um item defeituoso na amostra é:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{10}{0} \binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.4162.$$



Distribuição Hipergeométrica

X : Número de itens defeituosos na amostra retirada

$\Rightarrow X \sim \text{Hipergeométrica}(n = 5, R = 10, N = 100)$.

(a) A probabilidade de que haja pelo menos um item defeituoso na amostra é:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{10}{0} \binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.4162.$$

(b) Como $p = R/N = 0.1$, temos:

$$E(X) = 5 \times 0.1 = 0.5 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \left(\frac{95}{99}\right) \times 5 \times 0.1 \times 0.9 \approx 0.4318.$$



Distribuição de Poisson

- Dizemos que a variável aleatória X tem **distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$** se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

- λ é chamado **taxa de ocorrência**.
- Note que: $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$

Distribuição de Poisson

- Dizemos que a variável aleatória X tem **distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$** se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

- λ é chamado **taxa de ocorrência**.
- Note que: $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$

Proposição

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é usada para modelar uma contagem de indivíduos ou itens que se distribuem aleatoriamente no tempo ou no espaço.

- 1 Número de erros de impressão em uma página de um livro.
- 2 Número de partículas emitidas por uma fonte radioativa durante um minuto.
- 3 Número de requisições por minuto a um servidor.
- 4 Número de defeitos que ocorrem por metro na fabricação de um filamento metálico.
- 5 Número de plantas de uma espécie encontradas em uma área de 10 m^2 numa floresta.



Distribuição de Poisson

Exemplo

O número de partículas que uma fonte radioativa emite por minuto é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson com média igual a 5.

Então, a probabilidade de que pelo menos 3 partículas sejam emitidas em um minuto é:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - e^{-5} - 5e^{-5} - \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 1 - \frac{37}{2} e^{-5} \approx 0.8753. \end{aligned}$$

Distribuição de Poisson

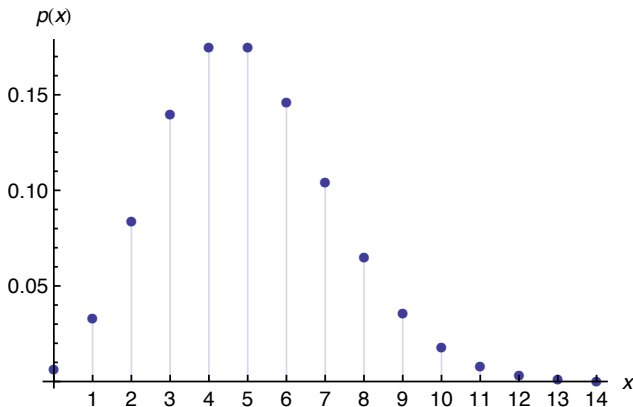


Figura: Função de probabilidade de $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$.

Aproximação de Poisson à Binomial

Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, com n grande e p pequeno, de modo que o valor de $\lambda = np$ é moderado.

Considere $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Então, para qualquer inteiro x entre 0 e n ,

$$P(X = x) \approx P(Y = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}.$$

Essa aproximação é justificada pelo [Teorema de Poisson \(1832\)](#).

Aproximação de Poisson à Binomial

Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, com n grande e p pequeno, de modo que o valor de $\lambda = np$ é moderado.

Considere $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Então, para qualquer inteiro x entre 0 e n ,

$$P(X = x) \approx P(Y = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}.$$

Essa aproximação é justificada pelo [Teorema de Poisson \(1832\)](#).

De acordo com [duas regras práticas](#), uma boa aproximação é obtida quando $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$ ou $n \geq 100$ e $np \leq 10$.

Aproximação de Poisson à Binomial

Exemplo 1

Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 100, p = 0.065)$.

- Por exemplo:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0.065)^{10} (0.935)^{90} \approx 0.05502.$$

Aproximação de Poisson à Binomial

Exemplo 1

Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 100, p = 0.065)$.

- Por exemplo:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0.065)^{10} (0.935)^{90} \approx 0.05502.$$

- Para usar a aproximação de Poisson, definimos $Y \sim \text{Poisson}$ com parâmetro $\lambda = np = 100 \times 0.065 = 6.5$. Então:

$$P(X = 10) \approx P(Y = 10) = \frac{e^{-6.5} (6.5)^{10}}{10!} \approx 0.05578.$$

Aproximação de Poisson à Binomial

Exemplo 2

Em um grupo de 500 pessoas, seja X o número de pessoas que fazem aniversário no mesmo dia que você. Então, $X \sim \text{Bin}(n = 500, p = 1/365)$.



Aproximação de Poisson à Binomial

Exemplo 2

Em um grupo de 500 pessoas, seja X o número de pessoas que fazem aniversário no mesmo dia que você. Então, $X \sim \text{Bin}(n = 500, p = 1/365)$.

Podemos aproximar a função de probabilidade de X usando a variável aleatória $Y \sim \text{Poisson}(500/365)$. Assim, a probabilidade de que pelo menos uma pessoa do grupo faça anos no mesmo dia que você é:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - e^{-500/365} \approx 0.7458.$$

Compare-se com o valor obtido usando-se a distribuição exata:

$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{500} \approx 0.7463.$$

