Variável aleatória – Exemplo 1

Considere o experimento aleatório em que uma moeda é lançada 3 vezes, e registram-se os resultados em ordem.

O espaço amostral desse experimento é:

$$\Omega = \{(\mathrm{KKK}), (\mathrm{CKK}), (\mathrm{KCK}), (\mathrm{KKC}), (\mathrm{CCK}), (\mathrm{CKC}), (\mathrm{KCC}), (\mathrm{CCC})\}.$$

Variável aleatória – Exemplo 1

Considere o experimento aleatório em que uma moeda é lançada 3 vezes, e registram-se os resultados em ordem.

O espaço amostral desse experimento é:

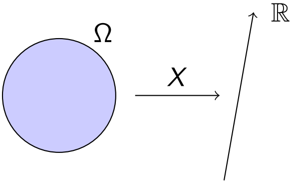
$$\Omega = \{(\text{KKK}), (\text{CKK}), (\text{KCK}), (\text{KKC}), (\text{CCK}), (\text{CKC}), (\text{KCC}), (\text{CCC})\}.$$

Podemos ter interesse em saber o número observado X de caras.

ω	(KKK)	(CKK)	(KCK)	(KKC)	(CCK)	(CKC)	(KCC)	(CCC)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Note que X é uma função a valores reais, definida em Ω.

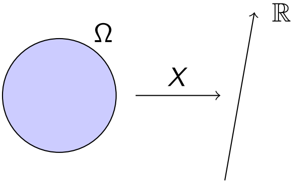
Variável aleatória – Exemplo 1



ω	(KKK)	(CKK)	(KCK)	(KKC)	(CCK)	(CKC)	(KCC)	(CCC)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Dizemos que X é uma variável aleatória, que assume valores em $\{0, 1, 2, 3\}$.

Variável aleatória – Exemplo 1

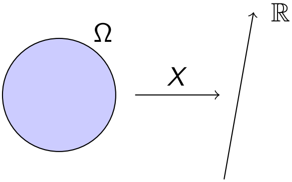


ω	(KKK)	(CKK)	(KCK)	(KKC)	(CCK)	(CKC)	(KCC)	(CCC)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Dizemos que X é uma variável aleatória, que assume valores em $\{0, 1, 2, 3\}$.

Atribuímos a probabilidade $1/8$ a cada ponto ω de Ω.

Variável aleatória – Exemplo 1



ω	(KKK)	(CKK)	(KCK)	(KKC)	(CCK)	(CKC)	(KCC)	(CCC)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Dizemos que X é uma variável aleatória, que assume valores em $\{0, 1, 2, 3\}$.

Atribuímos a probabilidade $1/8$ a cada ponto ω de Ω.

Então: $P(X = 0) = 1/8$ $\quad P(X = 1) = 3/8$

$P(X = 2) = 3/8$ $\quad P(X = 3) = 1/8.$

Variável aleatória – Exemplo 1

Por exemplo:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{(\mathrm{CKK}), (\mathrm{KCK}), (\mathrm{KKC})\}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Variável aleatória – Exemplo 1

Por exemplo:

$$P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{(\mathrm{CKK}), (\mathrm{KCK}), (\mathrm{KKC})\})$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Em resumo, podemos construir a seguinte tabela:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Variável aleatória – Exemplo 1

Por exemplo:

$$P(X=1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{(\mathrm{CKK}), (\mathrm{KCK}), (\mathrm{KKC})\})$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Em resumo, podemos construir a seguinte tabela:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Observe que:

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1.$$

Variável aleatória – Definições

Definição

Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório.

Uma variável aleatória é uma função a valores reais, definida em Ω.

- Variáveis aleatórias $\rightarrow X, Y, Z, \ldots$ (Letras maiúsculas).
- Valores possíveis $\rightarrow x, y, z, \ldots$ (Letras minúsculas).

Variável aleatória – Definições

Definição

Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório.

Uma variável aleatória é uma função a valores reais, definida em Ω.

- Variáveis aleatórias $\rightarrow X, Y, Z, \ldots$ (Letras maiúsculas).
- Valores possíveis $\rightarrow x, y, z, \ldots$ (Letras minúsculas).

- Dizemos que uma variável aleatória X é discreta se X assume valores em um conjunto finito ou infinito enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.

Variável aleatória – Definições

Definição

Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório.

Uma variável aleatória é uma função a valores reais, definida em Ω.

- Variáveis aleatórias $\rightarrow X, Y, Z, \ldots$ (Letras maiúsculas).
- Valores possíveis $\rightarrow x, y, z, \ldots$ (Letras minúsculas).

- Dizemos que uma variável aleatória X é discreta se X assume valores em um conjunto finito ou infinito enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.

- Dizemos que uma variável aleatória X é contínua se X pode assumir qualquer valor em um intervalo da reta real.

Var. aleatória discreta – Função de probabilidade

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A função

$$p(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}$$

é chamada função de probabilidade de X.

Var. aleatória discreta – Função de probabilidade

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A função

$$p(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}$$

é chamada função de probabilidade de X.

Observações

- Se $x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$, então $p(x) = 0$.

Var. aleatória discreta – Função de probabilidade

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A função

$$p(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}$$

é chamada função de probabilidade de X.

Observações

- Se $x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$, então $p(x) = 0$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

Var. aleatória discreta – Função de probabilidade

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A função

$$p(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}$$

é chamada função de probabilidade de X.

Observações

- Se $x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$, então $p(x) = 0$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.
- Para $B \subset \mathbb{R}$, temos: $P(X \in B) = \sum_{i:\, x_i \in B} p(x_i)$.

Exemplo 2

Três bolas são selecionadas ao acaso de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Se apostamos que pelo menos uma das bolas retiradas tem o número maior ou igual a 17, qual a probabilidade de ganharmos?

Exemplo 2

Três bolas são selecionadas ao acaso de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Se apostamos que pelo menos uma das bolas retiradas tem o número maior ou igual a 17, qual a probabilidade de ganharmos?

Seja X o maior número sorteado.

- $\omega_1 = \{2, 5, 12\} \to X(\omega_1) = 12 \to$ Aposta perdida.
- $\omega_2 = \{4, 9, 18\} \to X(\omega_2) = 18 \to$ Aposta ganha.

Note que X é uma v.a. que assume valores no conjunto $\{3, 4, \ldots, 20\}$, e que desejamos obter $P(X \geq 17)$.

Exemplo 2

Supondo que cada uma das $\binom{20}{3}$ seleções possíveis é igualmente provável, temos:

$$p(i) = P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \ i = 3, 4, \ldots, 20.$$

Exemplo 2

Supondo que cada uma das $\binom{20}{3}$ seleções possíveis é igualmente provável, temos:

$$p(i) = P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}},\ i = 3, 4, \ldots, 20.$$

Assim, a probabilidade de que ganhemos a aposta é:

$$P(X \geq 17) = P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$$

$$= \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} \approx 0{,}508.$$

Exemplo 3

O número de pessoas que entram em uma agência bancária durante um minuto é uma v.a. discreta X com função de probabilidade dada por

$$p(i) = \frac{c\,4^i}{i!},\ i = 0, 1, \dots$$

Determine: (a) o valor de c. (b) $P(X \geq 3)$.

Exemplo 3

O número de pessoas que entram em uma agência bancária durante um minuto é uma v.a. discreta X com função de probabilidade dada por

$$p(i) = \frac{c\,4^i}{i!},\ i = 0, 1, \ldots$$

Determine: (a) o valor de c. (b) $P(X \geq 3)$.

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1 \Rightarrow c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4^i}{i!} = 1 \Rightarrow c\,e^4 = 1 \Rightarrow c = e^{-4}.$

$$\therefore\ p(i) = \frac{e^{-4}\,4^i}{i!},\ i = 0, 1, \ldots$$

Exemplo 3

O número de pessoas que entram em uma agência bancária durante um minuto é uma v.a. discreta X com função de probabilidade dada por

$$p(i) = \frac{c\,4^i}{i!},\ i = 0, 1, \ldots$$

Determine: (a) o valor de c. (b) $P(X \geq 3)$.

(a) $$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1 \Rightarrow c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4^i}{i!} = 1 \Rightarrow c\,e^4 = 1 \Rightarrow c = e^{-4}.$$

$$\therefore\ p(i) = \frac{e^{-4}\,4^i}{i!},\ i = 0, 1, \ldots$$

(b) $$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$

$$= 1 - e^{-4} - 4\,e^{-4} - \frac{4^2\,e^{-4}}{2!} = 1 - 13\,e^{-4} \approx 0{,}7619.$$

Função de distribuição

Definição

A função de distribuição acumulada de uma v.a. X é a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \; x \in \mathbb{R}.$$

Função de distribuição

Definição

A função de distribuição acumulada de uma v.a. X é a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \; x \in \mathbb{R}.$$

Observações

1. F é uma função não decrescente:

   Se $a < b$, então $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$, logo $F(a) \leq F(b)$.

Função de distribuição

Definição

A função de distribuição acumulada de uma v.a. X é a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \; x \in \mathbb{R}.$$

Observações

1. F é uma função não decrescente:

   Se $a < b$, então $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$, logo $F(a) \leq F(b)$.

2. Se X é uma v.a. discreta, então

$$F(x) = \sum_{\text{todo } y \leq x} p(y).$$

Exemplo – Função de distribuição

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$F(0) = P(X \leq 0) = p(0) = \frac{1}{8}$$

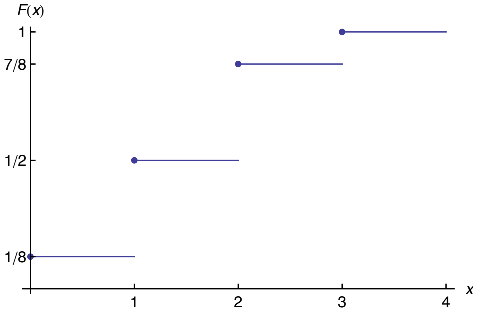
$$F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 1.$$

Exemplo – Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1/8 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1/2 & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 7/8 & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$



Função de distribuição

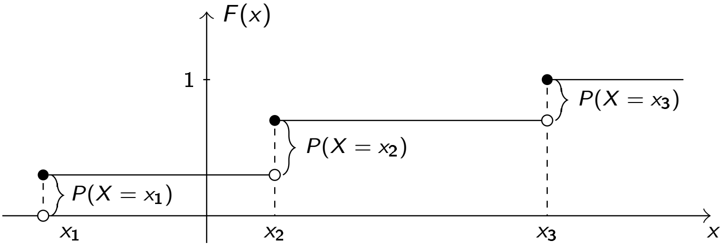


Figura: Função de distribuição de uma variável aleatória discreta.

Função de distribuição

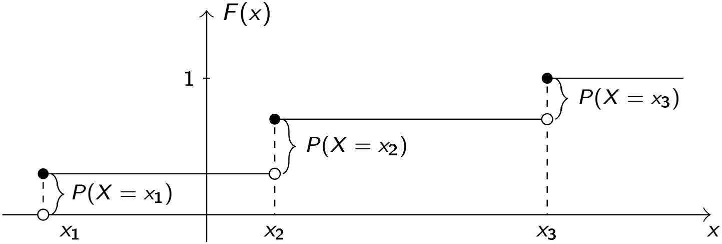


Figura: Função de distribuição de uma variável aleatória discreta.

Outras propriedades de F

1. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$P(X = x) = F(x) - F(x^-) = \text{Salto de } F \text{ no ponto } x.$$

Função de distribuição

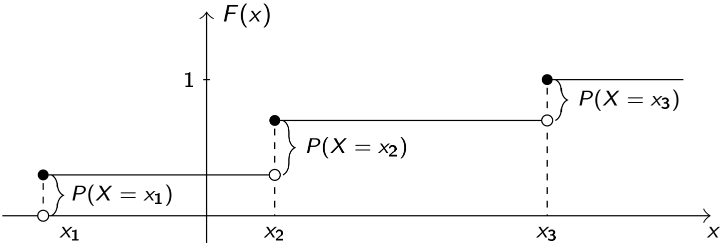


Figura: Função de distribuição de uma variável aleatória discreta.

Outras propriedades de F

1. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$P(X = x) = F(x) - F(x^-) = \text{Salto de } F \text{ no ponto } x.$$

2. Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Propriedades fundamentais

Propriedades fundamentais de uma função de distribuição

(F1) F é uma função não decrescente:

Se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$.

(F2) F é contínua à direita: Se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Propriedades fundamentais

Propriedades fundamentais de uma função de distribuição

(F1) F é uma função não decrescente:

Se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$.

(F2) F é contínua à direita: Se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Proposição

Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz (F1), (F2) e (F3) é a função de distribuição de alguma variável aleatória X.

Definição de esperança

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(x)$. A esperança (média ou valor esperado) de X é definida por

$$\mu = E(X) = \sum_{x:p(x)>0} x\, p(x).$$

Em palavras, o valor esperado de X é a média ponderada dos valores possíveis de X, cada valor sendo ponderado por sua probabilidade correspondente.

Exemplo 1

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Exemplo 1

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Então:
$$\mu = E(X) = \sum_x x\, p(x)$$
$$= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Exemplo 1

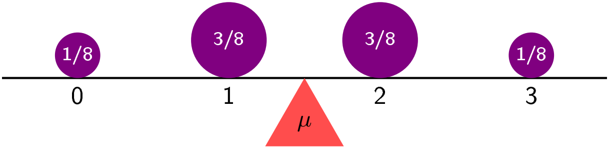
- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Então:
$$\mu = E(X) = \sum_x x\, p(x)$$
$$= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

- O valor esperado pode não ser um dos valores possíveis de X.
- Não se deve arredondar $E(X)$ para um número inteiro.

Interpretação: Centro de gravidade



- Imagine uma barra com peso desprezível. Para cada $i \geq 1$, um peso com massa $p(x_i)$ é colocado na posição x_i.
- Então, o valor esperado μ é o centro de gravidade dessa distribuição de massas.

Exemplo 2

- X: Resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Exemplo 2

- X: Resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Então: $$\mu = E(X) = \sum_x x\, p(x) = \frac{1}{6} \times [1+2+3+4+5+6] = \frac{7}{2}.$$

Motivação

Suponha que o dado é lançado n vezes, e seja N_i o número de vezes em que aparece a face i ($i = 1, \ldots, 6$).

A média aritmética dos n resultados observados é:

$$\bar{X} = \frac{1 \times N_1 + \cdots + 6 \times N_6}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{6} i\, N_i}{n}.$$

Se n é grande, então, pela interpretação frequentista da probabilidade,

$$\frac{N_i}{n} \approx p(i) = \frac{1}{6}.$$

Assim, para n grande, temos: $\quad \bar{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{i\, N_i}{n} \approx \sum_{i=1}^{6} i\, p(i) = \mu.$

A Lei dos Grandes Números justifica adequadamente essas aproximações.

Exemplo 3

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas vermelhas.

Retiram-se 2 bolas da urna, uma após a outra, sem reposição.

Qual o número esperado de bolas brancas retiradas?

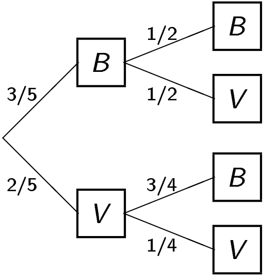
Exemplo 3

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas vermelhas.

Retiram-se 2 bolas da urna, uma após a outra, sem reposição.

Qual o número esperado de bolas brancas retiradas?

- X: Número de bolas brancas retiradas.



$X = 2$ Prob. $= 3/10$

$X = 1$ Prob. $= 3/10$

$X = 1$ Prob. $= 3/10$

$X = 0$ Prob. $= 1/10$

Exemplo 3

Portanto, a função de probabilidade de X é dada por:

x	0	1	2
$p(x)$	$1/10$	$6/10$	$3/10$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x\, p(x) \\ &= 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5} = 1{,}2. \end{aligned}$$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplos

- $Y = \dfrac{9\,X}{5} + 32:$ Temperatura em °C convertida para °F.
- $Y = X^2:$ Área de um quadrado de lado X.

Funções de variáveis aleatórias

Exemplos

- $Y = \dfrac{9\,X}{5} + 32$: Temperatura em °C convertida para °F.
- $Y = X^2$: Área de um quadrado de lado X.

Proposição

Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(x)$.

Para qualquer função g a valores reais,

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x)\,p(x).$$

Esse resultado possibilita a obtenção da esperança da v.a. $Y = g(X)$, mesmo que não se conheça a distribuição de Y.

Exemplo

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Usando a Proposição, temos:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x x^2\, p(x) \\ &= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3. \end{aligned}$$

Exemplo

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Usando a Proposição, temos:

$$E(X^2) = \sum_x x^2\, p(x)$$

$$= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3.$$

- Note que $E(X^2) \neq (E(X))^2$.

Exemplo

- Suponha que uma moeda é lançada 3 vezes, e que ganhamos ou perdemos \$1 conforme o número de caras seja par ou ímpar. Qual o valor esperado do nosso lucro?

Exemplo

- Suponha que uma moeda é lançada 3 vezes, e que ganhamos ou perdemos $1 conforme o número de caras seja par ou ímpar. Qual o valor esperado do nosso lucro?

- X: Número de caras $\rightarrow$ $Y = (-1)^X$: Lucro obtido no jogo.

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Então: $E(Y) = E\left[(-1)^X\right] = \sum_x (-1)^x \, p(x)$

$$= (-1)^0 \times \frac{1}{8} + (-1)^1 \times \frac{3}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{8} + (-1)^3 \times \frac{1}{8} = 0.$$

Corolário

Corolário

Se a e b são constantes, então

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Corolário

Corolário

Se a e b são constantes, então

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b.$$

Exemplo

- Uma moeda é lançada 3 vezes, e ganhamos \$5 a cada cara obtida e perdemos \$2 a cada coroa.

  Qual o valor esperado do nosso lucro?

Corolário

Corolário

Se a e b são constantes, então

$$E(a\,X + b) = a\,E(X) + b.$$

Exemplo

- Uma moeda é lançada 3 vezes, e ganhamos \$5 a cada cara obtida e perdemos \$2 a cada coroa.

  Qual o valor esperado do nosso lucro?

- X: Número de caras

  $\rightarrow$ Lucro: $Y = 5\,X - 2\,(3 - X) = 7\,X - 6.$

$$E(Y) = E\,(7\,X - 6) = 7\,E(X) - 6 = 7 \times \frac{3}{2} - 6 = \frac{9}{2}.$$

Momentos

Definição

Para $n \geq 1$, a quantidade $E(X^n)$ é chamada o n-ésimo momento da variável aleatória X.

Recorde que, para uma v.a. discreta X com função de probabilidade $p(x)$,

$$E(X^n) = \sum_x x^n \, p(x).$$

Observação

A esperança de uma variável aleatória discreta X está definida somente quando a soma é bem definida.

Assim,

$$E(X) = \sum_{x \geq 0} x\, p(x) - \sum_{x<0} (-x)\, p(x),$$

e portanto $E(X)$ está definida desde que ambas as somas não sejam $+\infty$.

Em caso contrário, dizemos que $E(X)$ não existe (ou que X não tem valor esperado).

Note, em particular, que $E(X)$ está bem definida se $P(X \geq 0) = 1$.

Variância

Buscamos definir medidas que nos permitam resumir e entender as propriedades fundamentais da distribuição de uma variável aleatória.

Variância

Buscamos definir medidas que nos permitam resumir e entender as propriedades fundamentais da distribuição de uma variável aleatória.

Definição

- A variância de uma v.a. X com esperança μ é definida por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2).$$

- O desvio padrão de X é definido por $\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Variância

- Ex.: Seja X o resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Então: $$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_x (x-\mu)^2\, p(x)$$

$$= \frac{1}{6} \times \left[\left(1-\frac{7}{2}\right)^2 + \cdots + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2\right] = \frac{35}{12}.$$

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7078.$$

Variância – Fórmula alternativa

Proposição

$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2.$

Variância – Fórmula alternativa

Proposição

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2.$

- X: Resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$$E(X) = \sum_x x\, p(x) = \frac{1}{6} \times [1+2+3+4+5+6] = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\, p(x) = \frac{1}{6} \times \left[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right] = \frac{91}{6}$$

$$\therefore\ \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Variância – Fórmula alternativa

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Variância – Fórmula alternativa

- X: Número observado de caras em 3 lançamentos de uma moeda.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$E(X) = \sum_x x\,p(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\,p(x) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\therefore\ \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Propriedade da variância

Proposição

Se a e b são constantes, então

$$\mathrm{Var}(a\,X + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Propriedade da variância

Proposição

Se a e b são constantes, então

$$\text{Var}(a\,X + b) = a^2\,\text{Var}(X).$$

Corolário

Seja X uma v.a. com esperança μ e variância $\sigma^2 > 0$. Defina $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

Então:

$$E(Z) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z) = 1.$$

Independência de variáveis aleatórias

Definição

- As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, para qualquer escolha de conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_n \in A_n).$$

Independência de variáveis aleatórias

Definição

- As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, para qualquer escolha de conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_n \in A_n).$$

- No caso de variáveis aleatórias discretas, isso é equivalente à condição de que, para qualquer escolha de $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n).$$

Independência de variáveis aleatórias

Definição

- As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, para qualquer escolha de conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_n \in A_n).$$

- No caso de variáveis aleatórias discretas, isso é equivalente à condição de que, para qualquer escolha de $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n).$$

- Quando falamos de variáveis aleatórias, a abreviatura i.i.d. significa independentes e identicamente distribuídas.

Independência – Exemplo

Um dado honesto é lançado 4 vezes, de modo independente.

Para $i = 1, \ldots, 4$, seja X_i o resultado do i-ésimo lançamento.

Então, $X_1, \ldots, X_4$ são variáveis aleatórias i.i.d. com função de probabilidade comum dada por:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Independência – Exemplo

Um dado honesto é lançado 4 vezes, de modo independente.

Para $i = 1, \ldots, 4$, seja X_i o resultado do i-ésimo lançamento.

Então, $X_1, \ldots, X_4$ são variáveis aleatórias i.i.d. com função de probabilidade comum dada por:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Assim, por exemplo,

$$P(X_1 \leq 2, X_2 = 4, X_3 \text{ é par}, X_4 \geq 5) =$$

$$= P(X_1 \leq 2)\, P(X_2 = 4)\, P(X_3 \text{ é par})\, P(X_4 \geq 5) =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{108}.$$

Propriedades da esperança e variância

Proposição (Linearidade da esperança)

Para quaisquer variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$, temos:

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Propriedades da esperança e variância

Proposição (Linearidade da esperança)

Para quaisquer variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$, temos:

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Proposição

Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então:

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n).$$

Exemplo

Quais são o valor esperado e a variância da soma das faces obtidas em 100 lançamentos independentes de um dado honesto?

Exemplo

Quais são o valor esperado e a variância da soma das faces obtidas em 100 lançamentos independentes de um dado honesto?

Para $i = 1, \ldots, 100$, seja X_i o resultado do i-ésimo lançamento.

Então, $X_1, \ldots, X_{100}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com média $\mu = 7/2$ e variância $\sigma^2 = 35/12$. A soma obtida é $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

Consequentemente,

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100\, E(X_1) = 350 \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{Var}(X_i) = 100\, \mathrm{Var}(X_1) = \frac{875}{3}.$$

Noções de Estimação

Deseja-se estudar uma característica numérica de uma população, descrita por uma variável aleatória X, com distribuição desconhecida (por exemplo, X é o número de filhos em famílias de uma região).

- $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X)$: Média e variância populacionais.

Noções de Estimação

Deseja-se estudar uma característica numérica de uma população, descrita por uma variável aleatória X, com distribuição desconhecida (por exemplo, X é o número de filhos em famílias de uma região).

- $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X)$: Média e variância populacionais.

Definição

As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são uma amostra aleatória de tamanho n retirada da população se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias i.i.d. com a mesma distribuição de X.

Assim, uma amostra aleatória são n observações resultantes de seleções independentes, cada observação tendo distribuição idêntica à da população.

Noções de Estimação

Definição

Consideremos

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \text{Média amostral} \quad \text{e}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2}{n-1} = \text{Variância amostral.}$$

Dizemos que as variáveis aleatórias $\bar{X}$ e S^2 são estimadores de μ e σ^2, respectivamente.

Os valores observados correspondentes $\bar{x}$ e s^2 são as estimativas de μ e σ^2.

Propriedades da média amostral

Proposição

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n selecionada de uma população com média μ e variância σ^2. Então:

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Resumo: Propriedades da média amostral

$$\text{Valor esperado} = \text{Média populacional} \;\; \text{e} \;\; \text{Variância} = \frac{\text{Variância populacional}}{\text{Tamanho da amostra}}$$

Propriedades da média amostral

Proposição

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n selecionada de uma população com média μ e variância σ^2. Então:

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Resumo: Propriedades da média amostral

$$\text{Valor esperado} = \text{Média populacional} \;\text{ e }\; \text{Variância} = \frac{\text{Variância populacional}}{\text{Tamanho da amostra}}$$

Observação

$\text{DP}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é estimado por $\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ (que é chamado erro padrão da média).