$$
\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Proposição 3.1

Suponha também que E tenha ocorrido e que estejamos interessados em determinar qual dos F_j eventos ocorreu. Então, pela Equação (3.4), temos a proposição a seguir.

$$
P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)} \qquad (3.5)
$$

Exemplo 3a (parte 1)

Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de 0,4 de sofrer um acidente dentro de um período fixo de 1 ano, enquanto essa probabilidade cai para 0,2 no caso de uma pessoa não propensa a acidentes. Se supomos que 30% da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um novo segurado sofra um acidente no período de um ano posterior à compra de sua apólice?

Solução Vamos obter a probabilidade desejada primeiro analisando a condição que diz se o segurado é propenso a acidentes ou não. Suponha que A_1 represente o evento em que o segurado sofrerá um acidente no período de um ano após a compra de sua apólice, e que A represente o evento em que o segurado é propenso a acidentes. Com isso, a probabilidade desejada é dada por

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c) \\ &= (0,4)\,(0,3) + (0,2)\,(0,7) = 0,26 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3a (parte 2)

Suponha que um novo segurado sofra um acidente em menos de um ano após a compra da apólice. Qual é a probabilidade de que ele seja propenso a acidentes?

Solução A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} \\ &= \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} \\ &= \frac{(0{,}3)(0{,}4)}{0{,}26} = \frac{6}{13} \end{aligned}$$

□

$$P(A|A_1) = \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c)}$$

Exemplo 3l

Suponha que tenhamos 3 cartas idênticas, exceto que ambos os lados da primeira carta são vermelhos, ambos os lados da segunda carta são pretos e um dos lados da terceira carta é vermelho enquanto o outro lado é preto. As três cartas são misturadas no interior de um boné; uma carta é selecionada aleatoriamente e colocada no chão. Se o lado de cima da carta escolhida é vermelho, qual é a probabilidade de que o outro lado seja preto?

Solução Suponha que RR, BB e RB representem, respectivamente, os eventos em que a carta escolhida é toda vermelha, toda preta ou vermelha e preta. Além disso, suponha que R seja o evento em que o lado de cima da carta sorteada tem cor vermelha. Então, a probabilidade desejada é obtida por

$$
\begin{aligned}
P(RB|R) &= \frac{P(RB \cap R)}{P(R)} \\
&= \frac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|RB)P(RB) + P(R|BB)P(BB)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{(1)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

3.4 EVENTOS INDEPENDENTES

Definição

Dois eventos E e F são chamados de *independentes* se a Equação (4.1) for verdadeira.
Dois eventos E e F que não são independentes são chamados de *dependentes*.

$$P(EF) = P(E)P(F) \tag{4.1}$$

Exemplo 4a

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas. Se E é o evento em que a carta selecionada é um ás e F é o evento em que a carta selecionada é do naipe de espadas, então E e F são independentes. Isso ocorre porque $P(EF) = 1/52$, enquanto $P(E) = 4/52$ e $P(F) = 13/52$. □

Exemplo 4c

Suponha que joguemos 2 dados honestos. Seja E_1 o evento em que a suma dos dados é igual a 6 e F o evento em que o primeiro dado é igual a 4. Então,

$$P(E_1F) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{36}$$

enquanto que

$$P(E_1)P(F) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{216}$$

Com isso, E_1 e F não são independentes.

Mostramos agora que, se E é independente de F, então E também é independente de F^c.

Proposição 4.1 Se E e F são independentes, então E e F^c também o são.

Demonstração Suponha que E e F sejam independentes. Como $E = EF \cup EF^c$, e é obvio que EF e EF^c são mutuamente exclusivos, temos

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E)P(F) + P(EF^c) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} P(EF^c) &= P(E)[1 - P(F)] \\ &= P(E)P(F^c) \end{aligned}$$

e o resultado está provado. □

Definição

Três eventos E, F e G são ditos independentes se

$$
\begin{aligned}
P(EFG) &= P(E)P(F)P(G) \\
P(EF) &= P(E)P(F) \\
P(EG) &= P(E)P(G) \\
P(FG) &= P(F)P(G)
\end{aligned}
$$

Note que, se E, F e G são independentes, então E será independente de qualquer evento formado a partir de F e G. Por exemplo, E é independente de $F \cup G$, já que

$$
\begin{aligned}
P[E(F \cup G)] &= P(EF \cup EG) \\
&= P(EF) + P(EG) - P(EFG) \\
&= P(E)P(F) + P(E)P(G) - P(E)P(FG) \\
&= P(E)[P(F) + P(G) - P(FG)] \\
&= P(E)P(F \cup G)
\end{aligned}
$$

Naturalmente, também podemos estender a definição de independência a mais de três eventos. Os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são ditos independentes se, para cada subconjunto $E_{1'}, E_{2'}, \ldots, E_{r'}$ desses eventos, $r \leq n$,

$$P(E_{1'}E_{2'} \cdots E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \cdots P(E_{r'})$$

Finalmente, definimos um conjunto infinito de eventos como sendo independente se cada subconjunto finito desses eventos for independente.

Exemplo 4h

Realizam-se tentativas independentes que consistem no lançamento de um par de dados honestos. Qual é a probabilidade de que um resultado igual a 5 apareça antes de um resultado igual a 7 quando o resultado de uma jogada é igual à soma dos dados?

Solução (por probabilidades condicionais)

F = evento em que a primeira tentativa resulta em um 5

G = evento em que a primeira tentativa resulta em um 7

H = evento em que a primeira tentativa não resulta nem em um 5, nem em um 7.

Exemplo 4h

Realizam-se tentativas independentes que consistem no lançamento de um par de dados honestos. Qual é a probabilidade de que um resultado igual a 5 apareça antes de um resultado igual a 7 quando o resultado de uma jogada é igual à soma dos dados?

Solução (por probabilidades condicionais)

F = evento em que a primeira tentativa resulta em um 5

G = evento em que a primeira tentativa resulta em um 7

H = evento em que a primeira tentativa não resulta nem em um 5, nem em um 7.

$$P(E) = \underset{\mathbf{1}}{P(E|F)}P(F) + \underset{\mathbf{0}}{P(E|G)}P(G) + \underset{P(E)}{P(E|H)}P(H)$$

$$P(E) = \frac{P(F)}{1 - P(H)} = \frac{P(F)}{P(F) + P(G)} = \frac{2}{5}$$

Exemplo 4h

Realizam-se tentativas independentes que consistem no lançamento de um par de dados honestos. Qual é a probabilidade de que um resultado igual a 5 apareça antes de um resultado igual a 7 quando o resultado de uma jogada é igual à soma dos dados?

Solução Se E_n representar o evento em que o 5 ou o 7 não aparecem nas primeiras $n-1$ tentativas e um 5 aparece na n-ésima tentativa, então a probabilidade desejada é

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n), \qquad P(E_n) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36}$$

Assim,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9}\frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

3.58 Suponha que queiramos gerar o resultado da jogada de uma moeda honesta, mas que tudo o que tenhamos à nossa disposição seja uma moeda viciada que dá cara com alguma probabilidade desconhecida p diferente de 1/2. Considere o seguinte procedimento para realizar nossa tarefa:

1. Jogue a moeda.
2. Jogue a moeda de novo.
3. Se ambas as jogadas resultarem em duas caras ou duas coroas, volte para o passo 1.
4. Deixe que o resultado da última jogada seja o resultado do experimento.

(a) Mostre que o resultado tem a mesma probabilidade de dar cara ou coroa.

Exemplo 4f

Deve-se realizar uma sequência infinita de tentativas independentes. Cada tentativa tem probabilidade de sucesso p e probabilidade de fracasso $1 - p$. Qual é a probabilidade de que

(a) pelo menos 1 sucesso ocorra nas primeiras n tentativas;
(b) exatamente k sucessos ocorram nas primeiras n tentativas;
(c) todas as tentativas resultem em sucessos?

Solução Para determinar a probabilidade de pelo menos 1 sucesso nas primeiras n tentativas, é mais fácil calcular primeiro a probabilidade do evento complementar de que nenhum sucesso ocorra nas primeiras n tentativas. Se E_i representar o evento fracasso na i-ésima tentativa, então a probabilidade de não haver eventos bem-sucedidos é, por independência,

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_n) = (1 - p)^n$$

Portanto, a resposta da letra (a) é $1 - (1 - p)^n$.

Para computar a resposta da letra (b), considere qualquer sequência particular em que os primeiros n resultados contenham k sucessos e $n - k$ fracassos. Cada uma dessas sequências, pela hipótese de independência das tentativas, irá ocorrer com probabilidade $p^k(1 - p)^{n-k}$. Como existem $\binom{n}{k}$ sequências como essa [há $n!/k!(n - k)!$ permutações de k sucessos e $n - k$ fracassos], a probabilidade desejada na letra (b) é

$$P\{\text{exatamente } k \text{ sucessos}\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Para responder à letra (c), notamos, pela letra (a), que a probabilidade de que as primeiras n tentativas resultem em sucesso é dada por

$$P(E_1^c E_2^c \cdots E_n^c) = p^n$$

Assim, usando a propriedade da continuidade das probabilidades (Seção 2.6), vemos que a probabilidade desejada é dada por

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = \lim_n p^n = \begin{cases} 0 \text{ se } p < 1 \\ 1 \text{ se } p = 1 \end{cases}$$

3.5 Q = P(. I A1) é uma probabilidade (p.121)

Seja A1 um evento. A função Q que, a cada evento A2, atribui a probabilidade condicional Q(A2) = P(A2|A1) é uma função de probabilidade. Isto é, Q satisfaz todos axiomas da probabilidade e, desta forma, todas as propriedades que deles decorrem.

Proposition 5.1

(a) $0 \leq P(A_2|A_1) \leq 1$

(b) $P(S|A_1) = 1$

(b) If A_2^i, $i = 1, 2, \ldots$,são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\Big(\cup_{i=1}^{\infty} A_2^i \Big| A_1 \Big) = 1$$

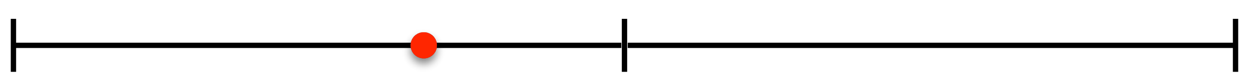
Em particular, $Q(A_2) = Q(A_2|A)Q(A) + Q(A_2|A^c)Q(A^c)$, onde

$$Q(A_2|A) = \frac{Q(A_2A)}{Q(A)} = \frac{\frac{P(A_2AA_1)}{\cancel{P(A_1)}}}{\frac{P(AA_1)}{\cancel{P(A_1)}}} = \frac{P(A_2AA_1)}{P(AA_1)} = P(A_2|AA_1)$$

Assim, $P(A_2|\underline{A_1}) = P(A_2|A\underline{A_1})P(A|\underline{A_1}) + P(A_2|A^c\underline{A_1})P(A^c|\underline{A_1})$.

Exemplo 5a

Considere o Exemplo 3a, que trata de uma companhia de seguros que acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes distintas: aquelas que são propensas a sofrer acidentes e aquelas que não o são. Durante um ano, uma pessoa propensa a acidentes terá uma probabilidade de 0,4 de sofrer um acidente, enquanto o valor correspondente a uma pessoa não propensa a acidentes é de 0,2. Qual é a probabilidade condicional de que um novo segurado sofra um acidente em seu segundo ano de contrato, dado que ele ou ela tenha sofrido um acidente no primeiro ano?



$$P(A_2|A_1) = P(A_2|AA_1)P(A|A_1) + P(A_2|A^cA_1)P(A^c|A_1) \quad = \mathbf{0,29}\ldots$$

$P(A_2|A)$ 6/13 $P(A_2|A^c)$ (1 - 6/13)

0,4 0,2

0,4 0,3

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c)} \quad = \mathbf{6/13}$$

0,4 0,3 0,2 0,7

Independência condicional

A_1 e A_2 são eventos condicionalmente independentes dado A se

$$P(A_2|A\,A_1) = P(A_2|A)$$

ou equivalentemente

$$P(A_2A_1|A) = P(A_2|A)P(A_1|A)$$

Considere o exemplo 5a, p. 123. Note que A2 é independente de A1 dado A

Contudo, A2 não é independente de A1, pois

$$P(A_2|A\,A_1) = P(A_2|A) = 0,4$$

mas,

$$P(A_2|A_1) = 0,29 > 0,26 = P(A_2)$$

Exemplo 5f Atualizando informações sequencialmente

Suponha que H1, H2,… HN sejam N eventos (hipóteses) mutuamente e exaustivamente possíveis. Por exemplo, N = 2, H1 = A (propenso a acidentes) e H2 = A^c (não=propenso a acidentes).

Suponha que a cada tempo t, recebamos a informação de que um novo evento At ocorreu, t =1, 2… Então no tempo t =1 (dada a informação de que A1 ocorreu) a probabilidade de Hi é dada por

$$P(H_i|A_1) = \frac{P(A_1|H_i)P(H_i)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(A_1|H_k)P(H_k)}$$

Consequentemente, no tempo t = 2 (dada a informação de que A1 e A2 ocorreram) a probabilidade de Hi é dada por

$$P(H_i|A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(A_1A_2|H_k)P(H_k)} \overset{?}{=} \frac{P(A_2|H_i)P(H_i|A_1)}{\sum_k P(A_2|H_k)P(H_k|A_1)}$$

Exemplo 5f Atualizando informações sequencialmente

A resposta à questão

$$P(H_i|A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(A_1A_2|H_k)P(H_k)} \overset{?}{=} \frac{P(A_2|H_i)P(H_i|A_1)}{\sum_k P(A_2|H_k)P(H_k|A_1)}$$

é positiva desde que, para cada k = 1, 2,…,N, os eventos A1 e A2 sejam independentes dado Hk.

PROVA. Basta notar que, para qualquer k = 1, 2,…,n (incluso k = i), vale:

$$P(A_1A_2|H_k)P(H_k) = P(A_2|H_k)P(A_1|H_k)P(H_k) = P(A_2|H_k)P(H_k|A1)P(A_1) \; \square$$

Por exemplo. Dado que o segurado do exemplo 3a tenha cometido um acidente pela segunda vez, qual é probabilidade de ele ser propenso a acidentes? Solução. Neste caso, N = 2, Hi = H1 = A = “segurado é propenso a acidentes”, sendo H2 o evento complementar de H1. Assim:

$$P(A|A_1A_2) = \frac{\overset{4/10}{P(A_2|A)}\,\overset{6/13}{P(A|A_1)}}{\underset{4/10}{P(A_2|A)}\,\underset{6/13}{P(A|A_1)} + \underset{2/10}{P(A_2|A^c)}\,\underset{(1\,-\,6/13)}{P(A^c|A_1)}}$$

= **0,63**… > **0,46**… = **6/13**

Exemplo 5f   Atualizando informações sequencialmente

Supondo A1, A2, … An+1, independentes dado Hi (i =1,2,…N), temos

$$P(H_i|A_1, A_2) = \frac{P(A_2|H_i)P(H_i|A_1)}{\sum_k P(A_2|H_k)P(H_k|A_1)}$$

e em geral,

$$P(H_i|A_1A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}) = \frac{P(A_{n+1}|H_i)P(H_i|A_1A_2, \ldots, A_n)}{\sum_k P(A_{n+1}|H_k)P(H_k|A_1A_2, \ldots, A_n)}$$

Reaplicando a formula sucessivamente, concluímos

$$P(H_i|A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \frac{\left[\Pi_{t=1}^{n+1} P(A_t|H_i)\right] P(H_i)}{\sum_k \left[\Pi_{t=1}^{n+1} P(A_t|H_k)\right] P(H_k)}$$

Finalmente, se P(At | Hi) = P(A1| Hi) para todo t = 2, 3,…,n+ 1, temos

$$P(H_i|A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \frac{\left[P(A_1|H_i)\right]^{n+1} P(H_i)}{\sum_k \left[P(A_1|H_k)\right]^{n+1} P(H_k)}$$

Exemplo 5f   Atualizando informações sequencialmente

Considere o exemplo 3a. Calcule a probabilidade de que o segurado seja propenso a acidentes dado que ele cometeu um acidente nos anos 1, 2,…, n.

$$P(A|A_1, A_2, \ldots, A_n) = \frac{\Big[P(A_1|A)\Big]^n P(A)}{\Big[P(A_1|A)\Big]^n P(A) + \Big[P(A_1|A^c)\Big]^n P(A^c)}$$

Assim,

$$P(A|A_1, A_2, \ldots, A_n) = \frac{1}{1 + [P(A^c)/P(A)]Q^n}$$

onde $Q = P(A_1|A^c)/P(A_1|A)$. Isto é

$$P(A|A_1, A_2, \ldots, A_n) = \frac{1}{1 + [0,7/0,3](0,2/0,4)^n} \quad (\to 1)$$

Calcule a probabilidade $P(A_{n+1}|A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Qual é o seu limite?

Exemplo 5f   Atualizando informações sequencialmente

Mostre que em geral, quando existem N hipóteses H1, H2,…HN, então

$P(A_{n+1}|A_1, A_2, \ldots, A_n)$ converge para P(A1| Hi) onde i maximiza P(Hi| A1).

Assuma para tanto que, para cada k = 1, 2,…N, os eventos A1, A2, … An+1 são independentes dado Hk. Além disso, suponha que P(At | Hk) = P(A1 | Hk) para quaisquer t = 1, 2,… n, e k = 1, 2,…,N.

Fim