Frações contínuas

Introdução

Objetivo: Construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$

Século XIX: limites de sequências.

Exemplo

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288841971\ldots$$

$$\begin{aligned} 3 <& \pi < 4 \\ \frac{31}{10} <& \pi < \frac{32}{10} \\ &\vdots \\ \frac{p_k}{10^k} <& \pi < \frac{p_{k+1}}{10^k}. \end{aligned}$$

$$|\pi - \frac{p_k}{10^k}| < \frac{1}{10^k}.$$

Introdução

Exemplo

- $\pi \approx \frac{22}{7} = 3,142857143$

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{700}.$$

- $\pi \approx \frac{355}{113} = 3,14159292$

$$|\pi - \frac{355}{113}| < \frac{1}{3000000}.$$

Definição

Uma Fração Contínua simples é uma fração da forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \quad ,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, e $a_i \in \mathbb{N}_*$.
Denotamos esta expressão por

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots].$$

Propriedade

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe (a_k), tal que $x = [a_0; a_1, \ldots]$.

Vantagem: Podemos representar os números reais, usando números inteiros, que não depende da base.

Ideia: Inverter o numerador.
Sejam $x \in \mathbb{R}$, e $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Então $0 < x - a_0 < 1$.

Se $x_1 = \frac{1}{x-a_0}$, $x_1 > 1$. E $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$.

Análogamente, se
$a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, e $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, então $x_2 > 1$, $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ e

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}.$$

Continuando desta forma, temos duas opções:

- $x \in \mathbb{Q}$, se existe a_n tal que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.
- $x \in \mathbb{I}$, senão, i.e, $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Exemplo

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{293 + \cfrac{1}{10 + \ddots}}}}} = [3; 7, 15, 1, 293, 10, \ \cdots]$$

Observemos que

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = [3; 7],$$

e que

$$3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1].$$

Fração contínua de um número irracional

Toda expansão em frações contínuas infinita representa um número irracional.

Se

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

Chamamos $\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$, convergentes de x.

Teorema

Para todo número irracional x a sequência infinita dos seus convergentes verifica,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = x.$$

Logo existe uma sequência infinita de racionais que são aproximações muito melhores para os irracionais.

Exemplos

Representações em frações contínuas, muito mais simples.

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

Logo,

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}].$$

Exemplos

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = [1; \overline{1}].$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots].$$

Números com representação em frações contínuas infinitas periódicas se denominam Irracionalidades Quadráticas, e são solução de uma equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$.

ALGORITMO DE EUCLIDES

Dados $p, q \in \mathbb{Z}$, existem $a, r \in \mathbb{N}$ com $0 < r < q$, tais que

$$p = aq + r$$

Então, dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\begin{aligned}
p =& a_0 q + r_1; && 0 < r_1 < q \\
q =& a_1 q + r_2; && 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 =& a_2 q + r_2; && 0 < r_2 < r_2 \\
& \vdots && \\
r_{n-1} =& a_n r_n; && 0 < r_n < r_{n-1}.
\end{aligned}$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Logo,

$$\frac{p}{q} = a_o + \frac{r_1}{q}, \qquad \frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \cdots$$

Portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, possui uma expansão em frações contínuas finita,

Interpretação geométrica

Enchemos um retângulo de tamanho $1 \times x$ com quadrados, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre.

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho.
Se os lados do retangulo são $c < d$, então $\frac{d}{c} = [1; 2, 2, 1, \ldots]$, pois temos:
$a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 2$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrados ainda ainda menores, e um número grande não desenhado de quadrados ainda ainda ainda menores.