Terceira série de exercícios
Tópicos de Mecânica Estatística - Transições de Fases - 2018

(esses exercícios são baseados na primera parte do artigo "Two-dimensional Ising model as a soluble problem of many fermions", T. D. Schultz, D. C. Mattis e E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. **36**, 856, 1964)

1- Considere o modelo de Ising em campo nulo definido numa rede de N colunas (vamos fazer $N \to \infty$) e M linhas (com $M = 3$). O hamiltoniano desse sistema é dado por

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{i,j}\sigma_{i,j+1} - J_2 \sum_{i=1,2} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j},$$

com $\sigma_{i,j} = \pm 1$ para todos os sítios, e $\sigma_{i,N+1} = \sigma_{i,1}$.

(a) Mostre de forma explícita que a função de partição é dada por

$$Z = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{V}_2^{1/2}\,\mathbf{V}_1\,\mathbf{V}_2^{1/2}\right)^N,$$

em que

$$\mathbf{V}_1 = (2\,\mathrm{senh}\,2K_1)^{3/2} \exp\left[K_1^* \sum_{m=1}^{3} \tau_m^x\right]$$

e

$$\mathbf{V}_2 = \exp\left[K_2 \sum_{m=1,2} \tau_m^z \tau_{m+1}^z\right],$$

com $K_1 = \beta J_1$, $K_2 = \beta J_2$,

$$\mathrm{senh}\,(2K_1)\,\mathrm{senh}\,(2K_1^*) = 1,$$

e a notação usual para os operadores de spin, $\tau_1^z = \sigma^z \otimes 1 \otimes 1$, $\tau_2^z = 1 \otimes \sigma^z \otimes 1$, e assim por diante.

(b) Faça a transformação $\tau^x \to -\sigma^z$ e $\tau^z \to -\sigma^x$. Escreva as matrizes $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ em termos dos operadores σ^+ e σ^-.

(c) Utilize a transformação de Jordan-Wigner para escrever as matrizes $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ em termos operadores de Fermi, c e $c^\dagger$. Discuta e detalhe as possíveis condições de contorno e a subdivisão em espaços de paridades diferentes.

(d) Utilize a transformação de Fourier

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \sum_q \exp\left(iqm\right)\, \eta_q$$

para escrever a matriz de transferência em termos de operadores de Fermi no espaço recíproco. Quais os conjuntos possíveis de valores de q? Note que $M = 3$ (ou seja, M é ímpar).

(e) Observe que a matriz de transferência é de ordem $2^3 \times 2^3$ e que, portanto, há oito autoestados com os seus respectivos autovalores. Obtenha explicitamente os oito autovalores da matriz de transferência (obtenha também os respectivos autoestados fermiônicos).

(f) A partir do maior autovalor da matriz de transferência, obtenha uma expressão para o potencial termodinâmico. Mostre que não há transição de fase nesse caso.

2- Inicialmente demonstre a identidade

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\left[2\cosh x - 2\cos\omega\right]\, d\omega = 2\pi x.$$

A partir dos resultados de Schulz, Mattis e Lieb, verifique que a energia livre do modelo de Ising numa rede quadrada simples, com $J_1 = J_2 = J$, pode ser escrita como

$$-\beta g = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln Z = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln\left(\cosh 2K\right) +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\pi}^{+\pi} dq_1 dq_2 \ln\left[2 - k\left(\cos q_1 + \cos q_2\right)\right],$$

com $K = \beta J$ e

$$k = \frac{\cosh^2\left(2K\right)}{2\,\mathrm{senh}\left(2K\right)}.$$

(a) Mostre que $k = 1$ no ponto crítico.

(b) Mostre que

$$\iint_{-\pi}^{+\pi} \frac{dq_1 dq_2}{2 - k\left(\cos q_1 + \cos q_2\right)} \to 2\pi \ln\left(1-k\right),$$

para $k \to 1-$.

(c) A partir do itens anteriores, mostre que as formas assintóticas da energia interna e do calor específico por spin, no limite $|t| = |T - T_c| / T_c \to 0$, são dadas por

$$\frac{1}{J} u = \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{JN} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \sim -\frac{8}{\pi} K_c\, t\, \ln|t|$$

e

$$\frac{1}{k_B} c = \frac{1}{k_B} \frac{\partial u}{\partial T} \sim -\frac{8}{\pi} K_c^2\, \ln|t|\,,$$

com

$$K_c = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Verifique eventuais errinhos nos prefatores!