

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

PNV3324 FUNDAMENTOS DE CONTROLE EM ENGENHARIA

NOTAS DE AULA*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina.

9 LUGAR DAS RAÍZES

9.1 Introdução

O projeto de um controlador consiste, em essência, na definição dos pólos da função de transferência em malha fechada, que depende, por sua vez, das funções de transferência do sistema a ser controlado, do sensor e do controlador. Em geral, não há liberdade para alterar as duas primeiras funções de transferência. Sendo assim, resta somente a opção de ajustar os parâmetros da função de transferência do controlador para se obter os pólos desejados do sistema em malha fechada. Para selecionar, adequadamente, estes parâmetros, muitas vezes, é interessante conhecer o impacto das alterações dos parâmetros do controlador nos pólos do sistema. O objetivo do método do lugar das raízes é verificar graficamente a localização dos pólos do sistema em malha fechada quando se varia um dos parâmetros do controlador que é, em geral, o ganho. Aqui vale ressaltar que o procedimento do lugar das raízes permite obter a localização dos pólos da função de transferência de malha fechada a partir dos zeros e pólos da função de transferência de malha aberta.

9.2 Método do Lugar das Raízes

Seja $G(s)G_{sen}(s)$ a função de transferência de malha aberta. A função de transferência de malha fechada será dada por:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_{sen}(s)} \quad 9.1$$

Os pólos deste sistema são as raízes da equação característica, isto é:

$$1 + G(s)G_{sen}(s) = 0$$

ou

$$G(s)G_{sen}(s) = -1 \quad 9.2$$

Como $G(s)G_{sen}(s)$ é um número complexo a equação 9.2 pode ser expressa como:

$$\angle G(s)G_{sen}(s) = \pm 180^0(2k+1), \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$|G(s)G_{sen}(s)| = 1$$

O gráfico dos pontos do plano complexo que satisfazem simultaneamente as condições de ângulo e de módulo são as raízes da equação característica. O gráfico dos pontos do plano complexo que satisfazem apenas a condição angular é o lugar das raízes. As raízes da equação característica correspondentes a um dado valor do ganho podem ser determinadas a partir de condição de módulo.

A seguir é mostrado um procedimento para esboçar o lugar das raízes. Para isto admita que a função de transferência em malha aberta seja dada por:

$$G(s)G_{sen}(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad \text{com } m \leq n \quad 9.3$$

A equação característica é dada, portanto, por:

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0$$

O objetivo é obter o lugar das raízes da equação característica ao variar o ganho K , onde $K > 0$. Convém observar que a ordem da equação característica (9.3) é n e, portanto, deve haver n segmentos no plano s correspondentes a cada uma raízes. Cada um destes segmentos é denominado de ramo. Os principais passos para esboçar o lugar das raízes são:

1. Obter e localizar os pólos e zeros da Função de Transferência de Malha Aberta (FTMA) no plano s .
 - a) Os ramos dos lugares das raízes começam nos pólos da FTMA.
 - b) Os ramos dos lugares das raízes terminam nos zeros da FTMA. (zeros finitos ou infinitos)
2. Determinar os lugares das raízes sobre o eixo real.
Um segmento do eixo real é pertence ao lugar das raízes se a soma dos números dos pólos e zeros no lado direito do ponto sob teste for ímpar
3. Determinar as assíntotas dos lugares das raízes.
 - a) o número de assíntotas é igual a $n-m$
 - b) os ângulos das assíntotas θ_a são dadas por:

$$\theta_a = \pm \frac{180^0(2k+1)}{n-m} \quad (k = 0,1,2,\dots,n-m-1)$$

- c) O ponto de partida das assíntotas do eixo real corresponde ao centróide dos pólos e zeros da FTMA que possuem, respectivamente, as massas 1 e -1 .

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

Onde p_j e z_j são, respectivamente os pólos e zeros da função de transferência de malha aberta.

4. Determinar os pontos de ruptura ou de chegada que são dados por:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$