CÁLCULO II - 4 - LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Começamos o estudo de funções de várias variáveis, a saber, dos campos escalares e vetoriais,

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad , \quad n \in \mathbb{P} \setminus \{1\}$$

estendendo os conceitos de limite e continuidade. Tais noções dependem do comportamento do campo nas imediações de um dado ponto $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$.

No caso unidimensional, por imediações ou vizinhança de um ponto, entendemos um intervalo aberto. Assim, o primeiro passo de nosso estudo consiste em encontrar uma generalização do conceito de intervalo aberto para $\mathbb{R}^n$.

1- Bolas Abertas e Conjuntos Abertos

Definição 4.1: " Sejam $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ um ponto e $r \in \mathbb{R}_+$, o conjunto

$$B(\mathbb{a}; r) = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| < r \}$$

é denominado bola aberta de raio r e centro em $\mathbb{a}$."

Geometricamente, uma bola aberta consiste de todos os pontos $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ que distam de $\mathbb{a}$ menos do que r.

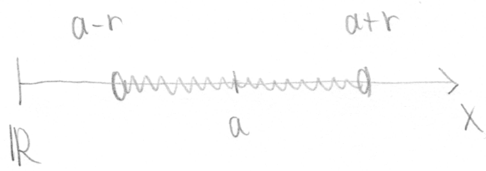
Exemplo 4.2: " Bolas abertas em algumas dimensões:

(a) $\underline{n=1}$ $B(a,r) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r \} =$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid -r < x-a < r \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid -r+a < x < r+a \}$$

$$= (a-r, a+r)$$

que coincide com um conjunto aberto da reta real:

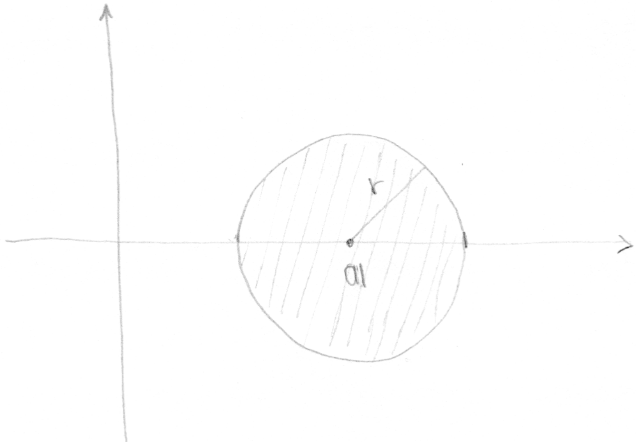


(b) $\underline{n=2}$ $B(\mathbf{a},r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r \}$

$$= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r \}$$

$$= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2 \}$$

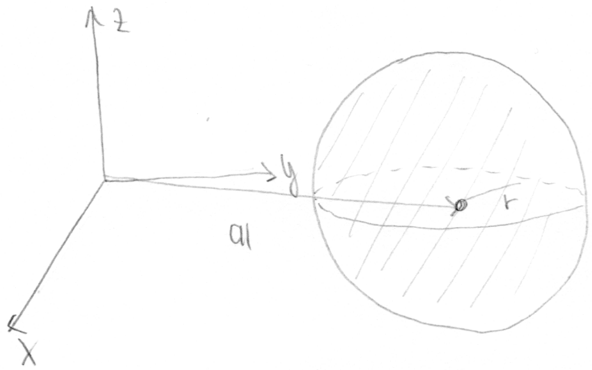
que coincide com o conjunto de todos os pontos no interior de um círculo de raio r e centro em $\mathbf{a}$



(c) $\underline{n=3}$ $B(\mathbf{a},r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r \}$

$$= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2 < r^2 \}$$

que coincide com o conjunto dos pontos no interior de uma esfera de centro a e raio r:



"

Definição 4.3: "Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e suponha que $a \in S$. Dizemos que a é um ponto interior do conjunto S, se existir um $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B(a, r) \subset S$."

Geometricamente, temos que $a \in S$ é um ponto interior do conjunto S se existir alguma bola aberta com centro em a inteiramente contida em S. O conjunto de todos os pontos interiores é denominado interior de S e usualmente denotado por $\mathring{S}$ ou por $\operatorname{int} S$

Definição 4.4: "Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se todos os pontos $x \in A$ forem pontos interiores de A, dizemos que A é um conjunto aberto."

Naturalmente, A é um conjunto aberto, se e somente se, $A = \mathring{A}$.

Empregando explicitamente a definição 4.3, podemos definir um conjunto aberto também por

Definição 4.5: " Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que A é um conjunto aberto se $\forall x \in A$, $\exists r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B(x,r) \subset A$."

Fica como um exercício ao leitor demonstrar a equivalência entre as definições 4.4 e 4.5.

Claramente, toda bola aberta é um conjunto aberto.

Exemplo 4.6: " (a) Em $\mathbb{R}^1$, o exemplo mais simples de um conjunto aberto é a sua respectiva bola aberta, ou seja, os intervalos abertos. A união enumerável de intervalos abertos também constitui um conjunto aberto.

Por outro lado, um intervalo fechado $[a,b]$ não é um conjunto aberto, pois $\forall r \in \mathbb{R}_+$, a bola aberta $B(a,r) \not\subset [a,b]$.

(b) Alguns conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ podem ser construídos considerando o produto cartesiano de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Sejam $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos abertos, então o produto cartesiano

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \in A_1 ,\ a_2 \in A_2\}$$

é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Para demonstrarmos essa afirmação, precisamos construir uma bola aberta $B(\mathbf{a}, r)$ de raio $r \in \mathbb{R}_+$ ao redor de qualquer ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, inteiramente contida em $A_1 \times A_2 \equiv A$.

Como por hipótese A_1 e A_2 são abertos, temos que:

$\forall a_1 \in A_1$, $\exists r_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $B(a_1, r_1) \subset A_1$

$\forall a_2 \in A_2$, $\exists r_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que $B(a_2, r_2) \subset A_2$

Consideremos então o ponto $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 = A$ e mostremos que a bola aberta $B(a, r)$, onde $r = \min\{r_1, r_2\}$ é tal que $B(a, r) \subset A$. Suponha, pois, por absurdo que $\exists x \in B(a, r)$ tal que $x \notin A$. Temos dois casos a analisar:

(i) $x_1 \notin A_1 \Rightarrow |x_1 - a_1| > r_1$

$$\Rightarrow \|x - a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} > r_1 \geq r$$

$$\Rightarrow x \notin B(a, r) \Rightarrow \text{Absurdo!}$$

(ii) $x_2 \notin A_2 \Rightarrow |x_2 - a_2| > r_2$

$$\Rightarrow \|x - a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} > r_2 \geq r$$

$$\Rightarrow x \notin B(a, r) \Rightarrow \text{Absurdo!}$$

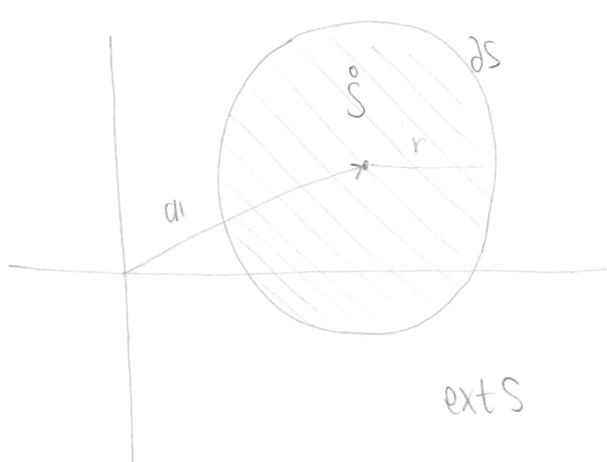
Conseqüentemente, como em ambos os casos chegamos a uma contradição, concluímos que $\forall x \in B(a, r)$ é tal que $x \in A$. Logo, $B(a, r) \subset A$, de onde concluímos que A é um conjunto aberto.

Um resultado semelhante pode ser mostrado para $\mathbb{R}^n$. //

É importante ressaltar que um conjunto aberto de $\mathbb{R}$, por exemplo o intervalo (a,b), não é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, posto que nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$ pode conter uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$.

Definição 4.7: " Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto exterior ao conjunto S se $\exists r \in \mathbb{R}_+$, $B(\mathbf{a}, r) \cap S = \emptyset$. O conjunto de todos os pontos exteriores ao conjunto S é denotado por ext S. Um ponto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ que não é nem exterior, nem interior ao conjunto S é dito ser um ponto de fronteira (ou borda) de S. O conjunto de todos os pontos de fronteira de S é denominado fronteira (ou borda) de S e denotado por ∂S. "

Exemplo 4.8: " Seja $S = B(\mathbf{a}, r)$, para algum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_+$, graficamente temos a seguinte representação:



"

2 - Limite e Continuidade

Nesta seção estendemos os conceitos de limite e continuidade a campos vetoriais. Naturalmente, tais resultados também se aplicam a campos escalares, que podem ser vistos como um caso particular de um campo vetorial

Definição 4.9: "Sejam $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e dois pontos $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$,

definimos o limite:

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{b} \quad , \quad \text{ou} \quad \mathbb{f}(\mathbb{x}) \xrightarrow{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{b}$$

através do seguinte limite elementar:

$$\lim_{\|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| \to 0} \|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}\| = 0 ,$$

quando este existir."

É importante ressaltar que o limite $\|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}\| \xrightarrow{\|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| \to 0} 0$ é o limite de uma função real de uma única variável real, que pode ser apropriadamente definido através de ε's e δ's. Para tanto, considere $\mathbb{h} = \mathbb{x} - \mathbb{a}$, logo,

$$\lim_{\|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| \to 0} \|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}\| = 0 \iff \lim_{\|\mathbb{h}\| \to 0} \|\mathbb{f}(\mathbb{a} + \mathbb{h}) - \mathbb{b}\| = 0$$

Naturalmente, podemos considerar a norma do campo vetorial:

$$\| \mathbb{f}(\mathbb{a}+\mathbb{h}) - \mathbb{b} \| = g(\|\mathbb{h}\|) \quad , \quad g : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

como uma função da norma $\|\mathbb{h}\|$. Consequentemente,

$$\lim_{\|\mathbb{h}\| \to 0} g(\|\mathbb{h}\|) = 0 \quad ,$$

existe se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|\, \|\mathbb{h}\| - 0 \,| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\, g(\|\mathbb{h}\|) - 0 \,| < \varepsilon$$

ou equivalentemente,

$$\|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}\| < \varepsilon .$$

Com isso demonstramos a seguinte:

<u>Proposição 4.10</u>: " Sejam $\mathbb{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$, existe o limite:

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{b} \quad ,$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}\| < \varepsilon ."$$

A <u>proposição 4.10</u> pode ser entendida como uma forma alternativa de se definir o limite de um campo vetorial.

Exemplo 4.11: "Demonstre: $\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{b}$, para:

(a) $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{f}(\mathbb{x}) = 3x + 2y$, $\mathbb{a} = (1,2)$, $\mathbb{b} = 7$

$$\vdash \lim_{(x,y) \to (1,2)} (3x + 2y) = 7$$

Usando a definição 4.9 temos que demonstrar que

$$\lim_{\|(x,y)-(1,2)\| \to 0} \|(3x+2y) - 7\| = 0$$

como: $\|(x,y)-(1,2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ e

$$\|(3x+2y)-7\| = |3x+2y-7| = |3x-3+2y-4|$$
$$\leqslant 3|x-1| + 2|y-2|$$

basta exibirmos um $\delta > 0$ tal que se

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \Rightarrow 3|x-1| + 2|y-2| < \varepsilon$$

Notando que: $|x-1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ e

$$|y-2| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

ao tomarmos $\delta = \varepsilon/5$, concluímos que

$$|3x+2y-7| \leqslant 3|x-1| + 2|y-2| < 3\delta + 2\delta = 5\delta = \varepsilon$$

(b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\alpha x y}{\|x\|}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$, $a = 0$, $b = 0$

$$\vdash \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x y}{\|x\|} = 0$$

De acordo com a proposição 4.10 precisamos exibir $\forall \varepsilon > 0$ um $\delta > 0$ tal que

$$\|x - 0\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{\alpha x y}{\|x\|} - 0 \right\| < \varepsilon$$

Notando que: $\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$\left\| \frac{\alpha x y}{\|x\|} \right\| = \left| \frac{\alpha x y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{\alpha |x| |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\alpha \sqrt{x^2} \sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leqslant \frac{\alpha \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \alpha \sqrt{x^2+y^2} = \alpha \|x\|$$

Portanto,

$$\alpha \|x\| < \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{\alpha x y}{\|x\|} - 0 \right\| < \varepsilon$$

mas $\alpha \|x\| < \varepsilon \Rightarrow \|x\| < \varepsilon/\alpha$. Logo, se tomarmos $\delta = \varepsilon/\alpha$,

temos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/\alpha > 0$ tal que

$$\|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - 0\| < \varepsilon. \text{ ''}$$

Note que o ponto $0 \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no exemplo 4.11 (b).

<u>Teorema 4.12</u>: " Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se existirem os limites: $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$ e $g(x) \xrightarrow{x \to a} c$, então:

(a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b + c$

(b) $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f(x)) = \lambda b$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$

(d) $\lim\limits_{x \to a} \| f(x) \| = \| b \|$. "

<u>Demonstração</u>:

(a) Precisamos demonstrar que o limite

$$\lim_{\|x \to a\| \to 0} \| f(x) + g(x) - (b + c) \| = 0$$

Notando que, $\| f(x) + g(x) - (b + c) \| \leq \| f(x) - b \| + \| g(x) - c \|$ em virtude da desigualdade triangular temos que

$$\lim_{\|x \to a\| \to 0} \| f(x) + g(x) - (b + c) \| \leq \lim_{\|x \to a\| \to 0} [\| f(x) - b \| + \| g(x) - c \|]$$

$$= \lim_{\|x - a\| \to 0} \| f(x) - b \| + \lim_{\|x - a\| \to 0} \| g(x) - c \|$$

onde empregamos a linearidade dos limites de funções de uma variável real

Como por hipótese: $\mathbb{f}(x) \xrightarrow{x \to \mathbb{a}} \mathbb{b}$ e $g(x) \xrightarrow{x \to \mathbb{a}} \mathbb{c}$, temos

que: $\lim\limits_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}\| = 0$ e $\lim\limits_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|g(x) - \mathbb{c}\| = 0$, concluímos que

$$\lim_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|f(x) + g(x) - (\mathbb{b}+\mathbb{c})\| \leqslant 0$$

Mas, por outro lado, sabemos que $\|\mathbb{f}(x) + g(x) - (\mathbb{b}+\mathbb{c})\| \geqslant 0$. Logo, do teorema do confronto, temos a tese.

(b) Precisamos demonstrar que:

$$\lim_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|\lambda \mathbb{f}(x) - \lambda \mathbb{b}\| = 0$$

Como: $\|\lambda \mathbb{f}(x) - \lambda \mathbb{b}\| = |\lambda| \, \|\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}\|$, podemos utilizar a linearidade dos limites de funções de uma variável real para escrever

$$\lim_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|\lambda \mathbb{f}(x) - \lambda \mathbb{b}\| = |\lambda| \lim_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}\| = 0.$$

(c) Precisamos demonstrar que:

$$\lim_{\|x-\mathbb{a}\| \to 0} \|\mathbb{f}(x) \cdot g(x) - \mathbb{b} \cdot \mathbb{c}\| = 0$$

Notando que

$$0 \leqslant \|\mathbb{f}(x) \cdot g(x) - \mathbb{b} \cdot \mathbb{c}\| =$$

$$= \|(\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}) \cdot (g(x) - \mathbb{c}) + \mathbb{b} \cdot (g(x) - \mathbb{c}) + \mathbb{c} \cdot (\mathbb{f}(x) - \mathbb{b})\|$$

$$\leq \| (\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}) \circ (g(x) - \mathbb{c}) \| + \| \mathbb{b} \circ (g(x) - \mathbb{c}) \| + \| \mathbb{c} \circ (\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}) \|$$

$$\leq \| \mathbb{f}(x) - \mathbb{b} \| \, \| g(x) - \mathbb{c} \| + \| \mathbb{b} \| \, \| g(x) - \mathbb{c} \| + \| \mathbb{c} \| \, \| \mathbb{f}(x) - \mathbb{b} \|$$

onde na penultima passagem empregamos a desigualda triangular e na última a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Conseqüentemente, ao utilizarmos as hipóteses:

$$\| \mathbb{f}(x) - \mathbb{b} \| \xrightarrow{x \to a} 0 \quad e \quad \| g(x) - \mathbb{c} \| \xrightarrow{x \to a} 0$$

e invocarmos o teorema do confronto obtemos a tese.

(d) Tomando $g(x) = \mathbb{f}(x)$ no item (c), temos que:

$$\lim_{x \to a} \| \mathbb{f}(x) \|^2 = \| \mathbb{b} \|^2,$$

invocando a positividade da norma concluímos a tese. ∎

À <u>definição 4.9</u> de limite depende apenas da distância entre os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, não fazendo nenhuma menção ao caminho que devemos percorrer para nos aproximarmos infinitesimalmente do ponto a. Logo, é razoável esperar que a existência do limite independa do caminho que tomamos para nos aproximar do ponto a. Assim, se para um dado campo vetorial $\mathbb{f}(x)$ encontrarmos dois caminhos distintos ao longo dos quais obtivermos valores distintos ao considerarmos $x \to a$, seremos forçados a concluir que não existe o limite:

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Formalizamos esse fato nos próximos teoremas:

Teorema 4.13: " Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e uma curva γ parametrizada por $r : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^n$, tal que $r(t_0) = a$ e $r(t) \neq a$ com $r(t) \in D$, $\forall t \in \tilde{D} \setminus \{t_0\}$. Se $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$, então

$$\lim_{t \to t_0} f(r(t)) = b."$$

Demonstração: Como $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$, sabemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que: $\| x - a \| < \delta_1 \Rightarrow \| f(x) - b \| < \varepsilon$.

Por outro lado, da continuidade de r em t_0, sabemos que $\forall \delta_1 > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que: $|t - t_0| < \delta \Rightarrow \| r(t) - r(t_0) \| < \delta_1$.

Usando que $r(t_0) = a$ e $r(t) \neq a$, $\forall t \in \tilde{D} \setminus \{t_0\}$, temos que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \| r(t) - a \| < \delta_1 \Rightarrow \| f(r(t)) - b \| < \varepsilon$$

Portanto,

$$\lim_{t \to t_0} f(r(t)) = b. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.14: "Sejam $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e duas curvas γ_1 e γ_2 parametrizadas respectivamente por $\mathbb{r}_i : \tilde{D}_i \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$ tais que $\mathbb{r}_i(t_i) = \mathbb{a}$ e $\mathbb{r}_i(t) \neq \mathbb{a}$ com $\mathbb{r}(t) \in D$, $\forall t \in \tilde{D}_i \setminus \{t_i\}$. Se

$$\lim_{t \to t_i} \mathbb{f}(\mathbb{r}_i(t)) = \mathbb{b}_i, \quad i = 1,2$$

com $\mathbb{b}_1 \neq \mathbb{b}_2$, então não existe o limite:

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x})."$$

Demonstração: Suponha por absurdo que exista o limite

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{b}.$$

Logo, pelo teorema 4.13, temos que

$$\mathbb{b}_1 = \lim_{t \to t_1} \mathbb{f}(\mathbb{r}_1(t)) = \mathbb{b} \quad \text{e} \quad \mathbb{b}_2 = \lim_{t \to t_2} \mathbb{f}(\mathbb{r}_2(t)) = \mathbb{b}$$

Levando-nos a conclusão de que $\mathbb{b}_1 = \mathbb{b}_2$, o que é um absurdo.

Logo, $\nexists \lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x})$.

$\blacksquare$

Exemplo 4.15: "Demonstre que não existe o limite:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Solução: Considere como no teorema 4.14 duas curvas γ_1 e γ_2 parametrizadas por: $\mathbb{r}_1(t) = t\,\mathbb{e}_1$ e $\mathbb{r}_2(t) = t\,\mathbb{e}_2$, tomando $f(x) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, temos:

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbb{r}_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbb{r}_2(t)) = \lim_{t\to 0} -\frac{t^2}{t^2} = -1$$

Portanto, pelo teorema 4.14, o limite não existe."

Definição 4.16: "Seja $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dizemos que $\mathbb{f}$ é contínua no ponto $a \in D$ se

$$\lim_{x\to a} \mathbb{f}(x) = \mathbb{f}(a).$$

Ademais, dizemos que $\mathbb{f}$ é contínua em D se for contínua em $\forall a \in D$, denotamos tal fato por: $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^m$."

Exemplo 4.17: "Algumas funções contínuas:

(a) Continuidade das componentes de um campo vetorial: Seja $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podemos decompô-lo em componentes de acordo com a base canônica, i.e.,

$$\mathbb{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, \mathbb{e}_i$$

onde $f_i = \mathbb{f} \circ \mathbb{e}_i$, $1 \leq i \leq n$ é tal que $f_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Invocando o teorema 4.12(c) concluímos que a continuidade de $\mathbb{f}$ implica a continuidade de suas componentes. Por outro lado o teorema 4.12 (a), (b) garante que $\mathbb{f}$ é contínua enquanto suas componentes o forem. Logo, somos levados à conclusão de que um campo vetorial é contínuo, se e somente se, suas componentes forem contínuas.

(b) Continuidade da identidade: Seja $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{x}$.

Como

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{x} = \mathbb{a} = \mathbb{f}(\mathbb{a})$$

temos que a identidade é contínua.

(c) Continuidade das transformações lineares: Seja $\mathbb{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, ou seja, tal que

$$\mathbb{f}(\lambda \mathbb{a} + \mu \mathbb{b}) = \lambda \mathbb{f}(\mathbb{a}) + \mu \mathbb{f}(\mathbb{b}), \quad \forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in D, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Precisamos demonstrar que:

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(\mathbb{a})$$

Da linearidade de $\mathbb{f}$ e do teorema 4.12 (a) temos que

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(\mathbb{a}) \iff \lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} [\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{f}(\mathbb{a})] = \mathbb{0}$$

$$\iff \lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x} - \mathbb{a}) = \mathbb{0}$$

fazendo $\mathbb{h} = \mathbb{x} - \mathbb{a}$, temos que:

$$\lim_{\mathbb{x}\to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(\mathbb{a}) \iff \lim_{\mathbb{h}\to \mathbb{0}} \mathbb{f}(\mathbb{h}) = \mathbb{0}$$

O que é facilmente verificável, pois:

$$\mathbb{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{e}_i \Rightarrow \mathbb{f}(\mathbb{h}) = \mathbb{f}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{f}(\mathbb{e}_i)$$

notando que $\mathbb{h} \to \mathbb{0} \iff h_i \to 0$, $1 \leq i \leq n$, temos que

$$\lim_{\mathbb{h}\to\mathbb{0}} \mathbb{f}(\mathbb{h}) = \mathbb{0}.$$

(d) Continuidade dos polinômios em n variáveis: Um campo escalar $P: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da forma

$$P(\mathbb{x}) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{p_n} c_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

é denominado um polinômio de n variáveis x_i, $1 \leq i \leq n$. Claramente, um polinômio é contínuo em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ pois é uma soma finita de produtos de campos escalares contínuos em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$.

(e) Continuidade das funções racionais: Sejam $P, Q: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dois polinômios, o campo escalar $R: D \setminus \{\mathbb{x} \in D \mid Q(\mathbb{x}) = 0\} \to \mathbb{R}$

$R(\mathbb{x}) = \dfrac{P(\mathbb{x})}{Q(\mathbb{x})}$ é denominada uma função racional, que é contínua em todos os pontos de seu domínio $D \setminus \{x \in D \mid Q(x) = 0\}$."

O próximo teorema trata da continuidade de funções compostas:

Teorema 4.18: " Sejam $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : D(g) \subseteq \mathbb{R}^l \rightarrow I(g) \subseteq \mathbb{R}^n$, tais que $I(g) \subseteq D(f)$. Se g for contínua em $a \in D(g)$ e f for contínua em $g(a) \in D(f)$ então a função composta $f \circ g$ é contínua em a."

Demonstração: Denotando $y = g(x)$ e $b = g(a)$, temos

$$f[g(x)] - f[g(a)] = f(y) - f(b)$$

Como por hipótese g é contínua em a, temos que

$$\lim_{x \to a} y = b.$$

Logo,

$$\lim_{\|x-a\| \to 0} \| f(g(x)) - f(g(a)) \| = \lim_{\|y-b\| \to 0} \| f(y) - f(b) \| = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f[g(a)].$$

Comprovando a continuidade de $f \circ g$ em a.

c.q.d.

Exemplo 4.19: " Campos escalares contínuos:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x^2 y)$

é contínua em todo o plano.

(b) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

é contínua em todos os pontos do plano menos na origem

(c) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$, $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y}$

é contínua em todos os pontos do plano menos na reta $y=-x$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{P}\}$, $f(x,y) = \log[\cos(x^2+y^2)]$

é contínua em todos os pontos do plano menos na família de círculos: $x^2+y^2 = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{P}$. "