Instituto de Física - USP - 2018
4300430 - Introdução à Cosmologia Física
Prof. Raul Abramo

Lista 2 – Data de entrega: 10 de outubro

---

1. **Matéria escura em galáxias: curvas de rotação**

   Vamos considerar uma galáxia cuja massa *bariônica* total é $M_b = 10^{11} M_\odot$ e cuja densidade de massa (bariônica) é dada por

   $$\rho_b(r) = \frac{M_b}{4\pi R_0^2 r} e^{-r/R_0},$$

   onde $R_0 = 10$ kpc é o raio característico do disco da galáxia. Por simplicidade, vamos assumir que essa galáxia roda em torno do eixo z como um corpo rígido e que a sua distribuição de massa tem simetria esférica.

   (a) [**0.5**] Encontre a velocidade de rotação de uma partícula no plano $z = 0$ como função da distância r ao eixo. Obtenha a expressão aproximada para $r \ll R_0$ e para $r \gg R_0$.

   (b) [**1.0**] Digamos que as observações da curva de rotação dessa galáxia indiquem que, para $r > 2R_0$, a velocidade é aproximadamente constante. Encontre a distribuição de massa não-bariônica que falta para explicar essa velocidade constante.

2. **Matéria escura em aglomerados de galáxias: teorema do virial**

   Em 1933, o astrônomo suíço-americano Fritz Zwicky, baseando-se em medidas publicadas por Hubble e Humason em 1931, observou que a dispersão na velocidade radial (i.e. a componente da velocidade ao longo da linha de visada) de oito galáxias individuais do aglomerado de Coma era da ordem de 10^3 km s^{-1}, excedendo a dispersão observada em outros aglomerados de galáxias. Tal fato já havia sido notado por Hubble e Humason, mas foi Zwicky quem aplicou o teorema do virial para estimar a massa do aglomerado.

   (a) [**0.5**] Argumente porque é razoável supor que o aglomerado de Coma encontra-se em equilíbrio. Pode ser útil assumir que seu raio e idade são da ordem de ~ 3 Mpc e $\sim 10^{10}$ anos, respectivamente.

   (b) [**1.0**] Trate o aglomerado de galáxias como sendo uma esfera homogênea de massa M e raio R. Mostre que a energia potencial total é dada por

   $$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}$$

   (c) [**0.75**] Uma vez que o sistema pode ser tratado como estando em equilíbrio, utilize o teorema do virial para expressar a dispersão de velocidades do aglomerado em termos da sua massa M e raio R. Com os valores de raio e dispersão de velocidades assumidos para o aglomerado de Coma, estime a massa do aglomerado. Compare seu resultado com os valores da massa estelar $M_\star \approx 3 \times 10^{13} M_\odot$ e da massa em forma de gás $M_{\rm gas} \approx 2 \times 10^{14} M_\odot$ medidos para o aglomerado.

3. **Abundância de partículas no universo primordial**

   Em sala de aula vimos que partículas em equilíbrio térmico obedecem à distribuição de Fermi-Dirac (FD, "+"), se elas são férmions (i.e. possuem spin semi-inteiro) ou à distribuição de Bose-Einstein (BE, '´-") se elas são bósons, i.e. possuem spin inteiro:

   $$F_\pm(E,T) = \frac{g_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{\exp\left[E/T \pm 1\right]} \equiv \frac{g_i}{(2\pi)^3} f_\pm, \tag{1}$$

onde $f_\pm \equiv 1/\exp[E/T \pm 1]$. Note que adotamos o sistema de unidades naturais, no qual $\hbar = c = k_B = 1$. Isso significa que a temperatura T e a massa m ficam expressas em unidades de energia. Neste exercício, 1 keV $= 10^{-6}$ GeV é uma unidade conveniente para expressar a energia.

(a) **[1.0]** Consideremos então partículas em equilíbrio térmico com um certo ambiente a temperatura T. A densidade volumétrica de partículas com momento entre $p + dp$ é dada por $dn = F_\pm(E,T)d^3p$. Como $E^2 = m^2 + p^2$ e, portanto, $pdp = EdE$, integre sobre a energia E para mostrar que, para tais partículas em equilíbrio térmico a temperatura T, a densidade numérica é dada por

$$n_i = g_i \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3, & \text{BE} \quad T \gg m \\ \frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3, & \text{FD} \quad T \gg m \\ \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T}, & \text{BE \& FD} \quad m \gg T \end{cases}$$

onde $\zeta(n)$ é a função Zeta de Riemann e g_i é o número de graus de liberdade da partícula em questão ($g_i = 2$ no caso de elétrons, prótons, nêutrons e fótons)[1].

(b) **[0.5]** Faça um gráfico aproximado do número de partículas como função da temperatura[2].

(c) **[0.5]** Considere o caso dos elétrons ($m_e = 511$ keV). Assumindo que vale a hipótese de equilíbrio térmico, qual seria a densidade em número dos elétrons quando o universo tem uma temperatura de 1 keV? Lembrando que $n_e = n_p \approx 0.2\ \text{m}^{-3}$ hoje ($T \approx 3\times10^{-4}$ eV) e considerando que $T \sim a^{-1}$, verique que o número estimado está errado por **muitas** ordens de magnitude. Note que tal resultado implica a hipótese do equilíbrio térmico é incoerente!

(d) **[0.5]** A resposta do item anterior evidencia que, em algum momento, o número de elétrons deve ter saído do equilíbrio com o ambiente. Extrapolando a densidade atual de elétrons para o passado e a densidade de elétrons calculada sob a hipótese de equilíbrio térmico para o futuro, mostre que os elétrons devem ter saído de equilíbrio por volta de $T \sim 20$ keV.

(e) **[0.5]** Analogamente ao item anterior, mostre que os prótons devem ter saído de equilíbrio quando o universo tinha uma temperatura da ordem de $T \sim 0.1$ GeV.

(f) **[1.0]** Qual conclusão você tira dos resultados acima? O que você espera que deve acontecer com o número de elétrons no universo quando a temperatura cai de centenas de keV para alguns keV? E para os prótons: o que acontece quando a temperatura cai de muitos GeV para uma fração de GeV?

[1] Por sinal, a última linha é quase a distribuição de Maxwell-Boltzmann, mas elas não são idênticas. O livro da Barbara Ryden faz um pouco de confusão sobre isso: para recuperar a distribuição de Maxwell-Boltzmann você deve tomar fazer a aproximação não-relativística, $f_\pm \to e^{-E/T} \to e^{-(m+p^2/2m)/T}$. Porém, note que a distribuição de Maxwell-Boltzmann "clássica" não carrega o fator exponencial com a massa de repouso, $e^{-m/T}$! De fato, ela não diz nada sobre o "número de partículas", apenas sobre a distribuição de velocidades de um gás ideal clássico.

[2] Se você ficar em dúvida quanto às unidades naturais, olhe a equação (9.21) do livro da Barbara Ryden.

4. **Distribuição de corpo negro da radiação**

   [**1.0**] Vimos em sala de aula que, mesmo para energias/temperaturas bem menores do que 13.6 eV (a energia de ligação do átomo de Hidrogênio), há um grande número de fótons com energias superiores a esse valor, devido ao enorme número de fótons para cada bárion do universo ($\approx 5 \times 10^9$). Calcule quantos fótons por bárion possuem energias superiores a 13.6 eV quando a temperatura dos fótons é *(a)* $T = 1$ eV e *(b)* $T = 0.1$ eV.

5. **Distância até a Superfície de Último Espalhamento (SUE)**

   Digamos que o modelo "padrão" da Cosmologia está correta, ou seja, que hoje temos aproximadamente $\Omega_m = 0.25$, $\Omega_\Lambda = 0.75$, $\Omega_r \sim 10^{-4}$ e $\Omega_k = 0$. A Superfície de Último Espalhamento (SUE) marca o instante quando os fótons desacoplaram da matéria bariônica, o que, neste modelo, deve ter ocorrido em redshift $z_{\rm SUE} = 1100$.

   (a) [**0.25**] Encontre a distância comóvel até a SUE.

   (b) [**0.25**] Encontre a distância luminosidade a SUE.

   (c) [**0.25**] Encontre a distância diâmetro angular até a SUE.

   (d) [**0.5**] Calcule o horizonte de Hubble na época da SUE, i.e. $h_{\rm SUE} = cH^{-1}(z_{\rm SUE})$. Em seguida, usando a distância diâmetro angular calculada no item (c), encontre o ângulo no céu que corresponde a um objeto em $z = z_{\rm SUE}$, cujo tamanho é igual a $h_{\rm SUE}$.