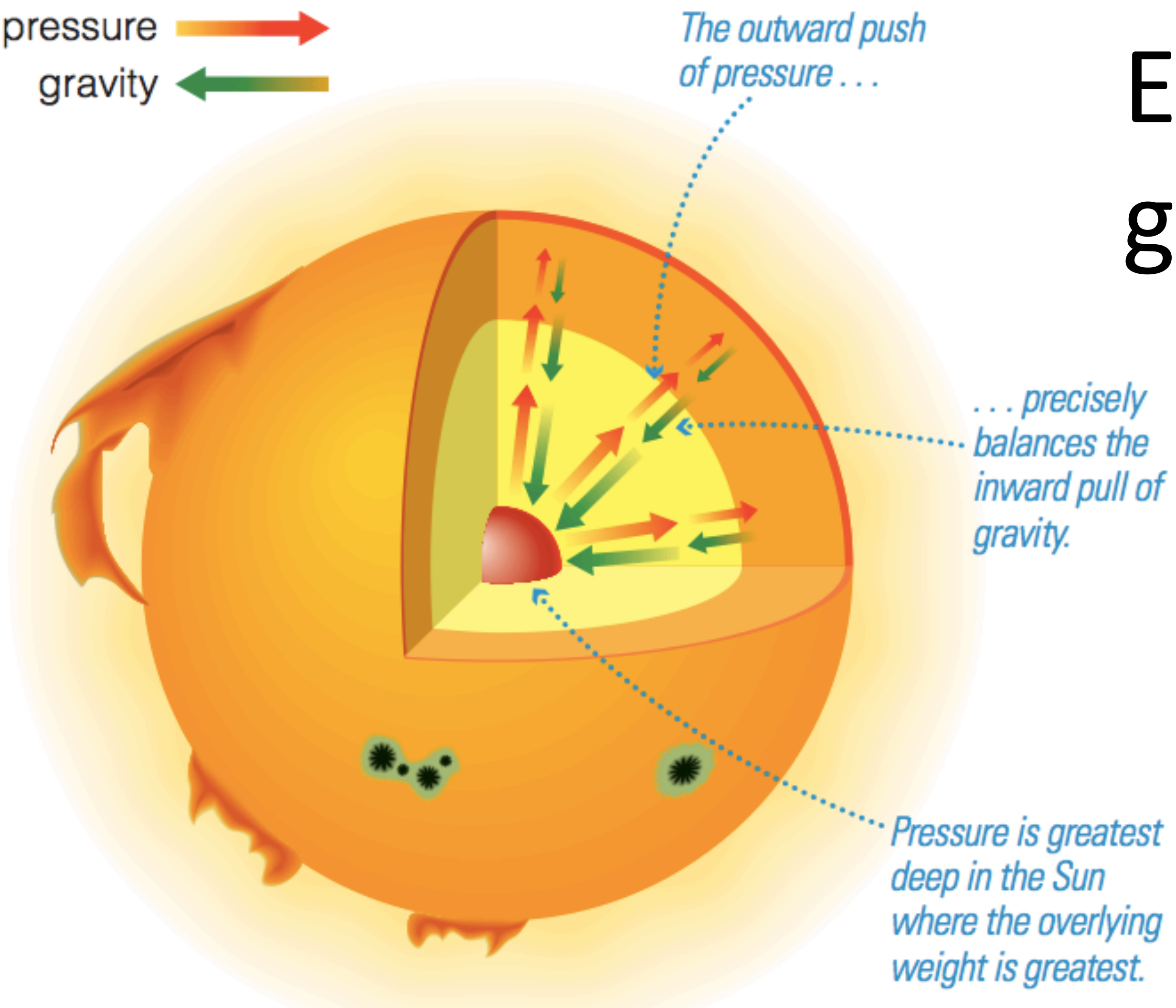
Cap. 10. Interiores Estelares.

Equilíbrio Hidrostático;
Equação de estado da Pressão

AGA 0293, Astrofísica Estelar

Jorge Meléndez

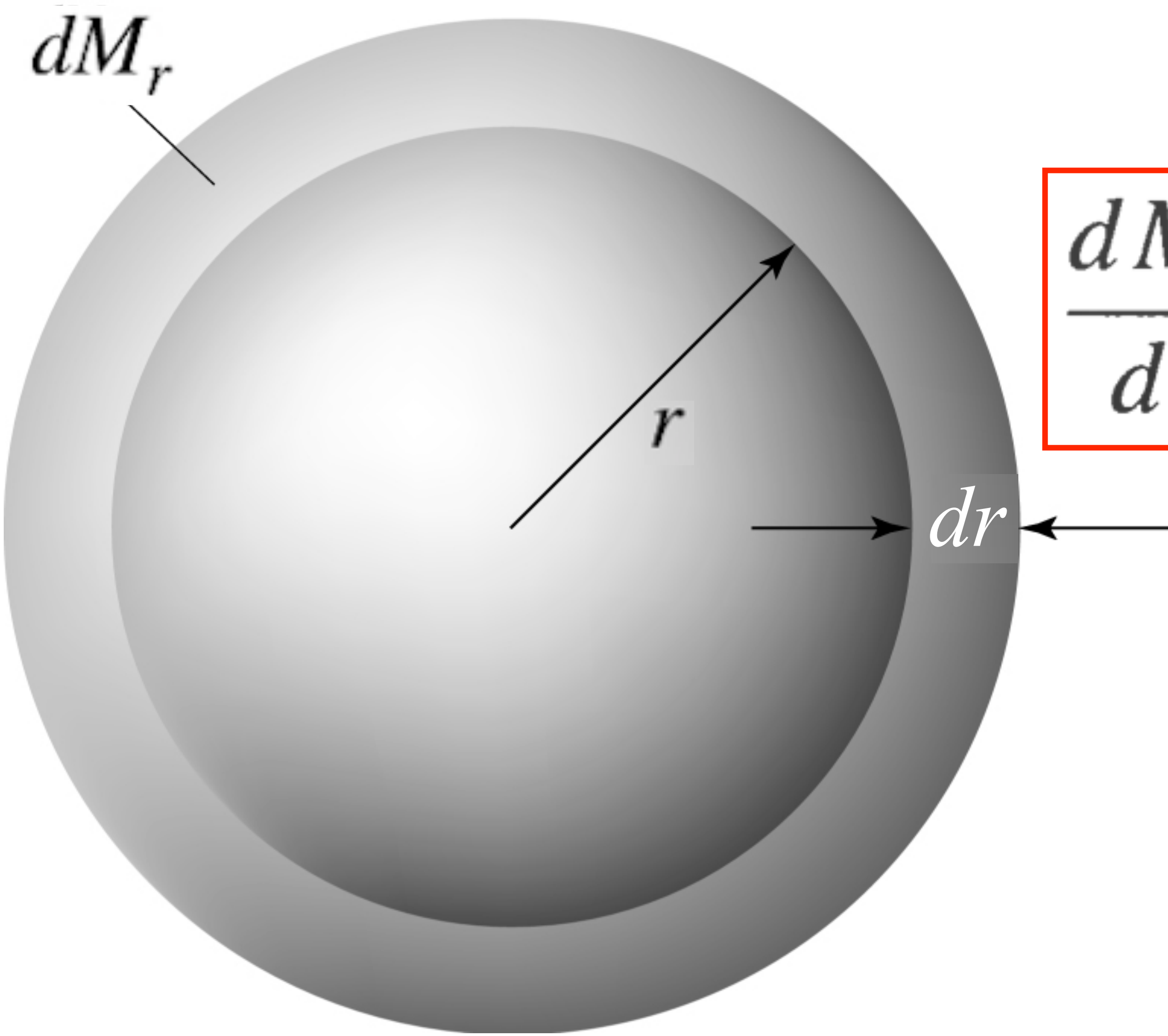
Equilíbrio gravitacional



No interior das estrelas, temos o equilíbrio entre a força de pressão para fora e a gravidade para dentro

© Cosmic Perspective

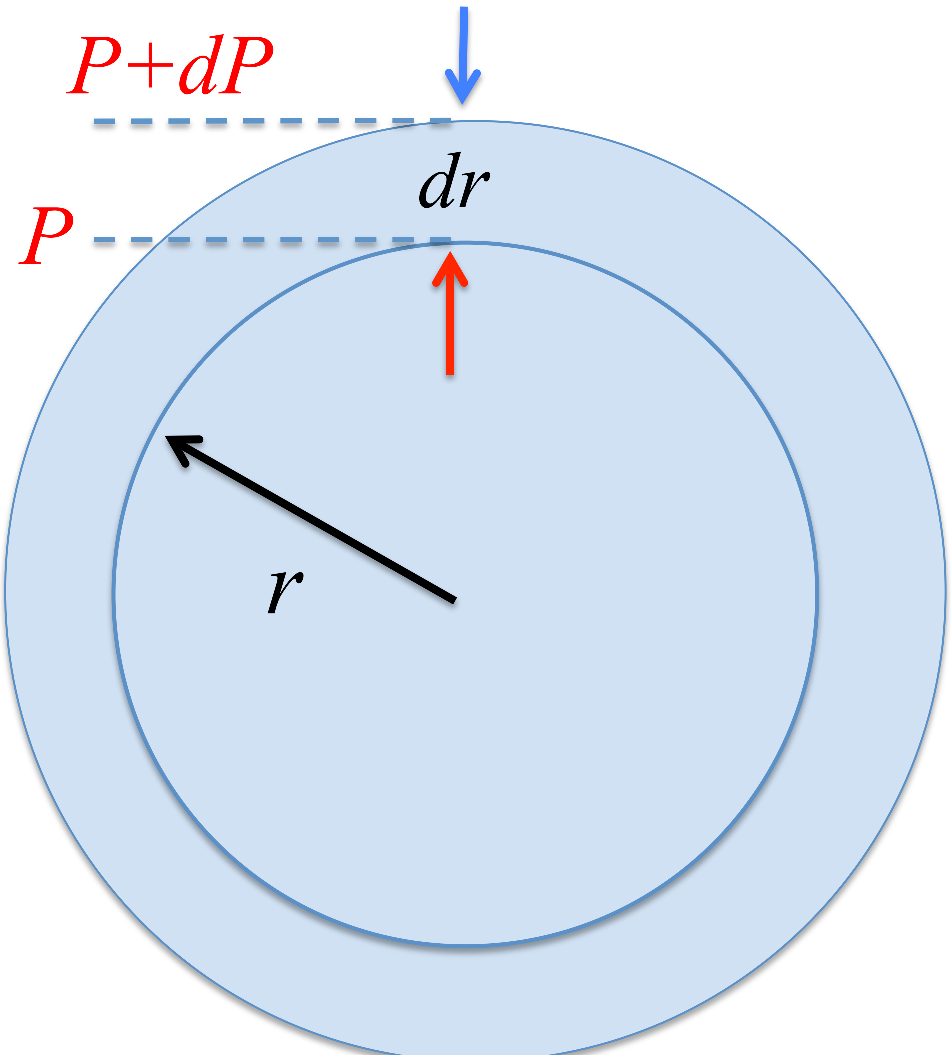
Equação de Conservação de Massa

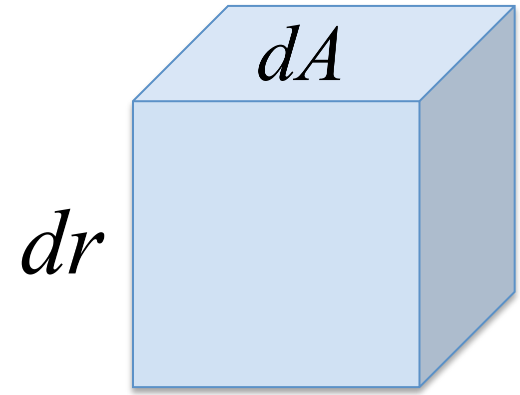


$$dM_r = \rho\, dV$$

$$\boxed{\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho}$$

Equilíbrio hidrostático

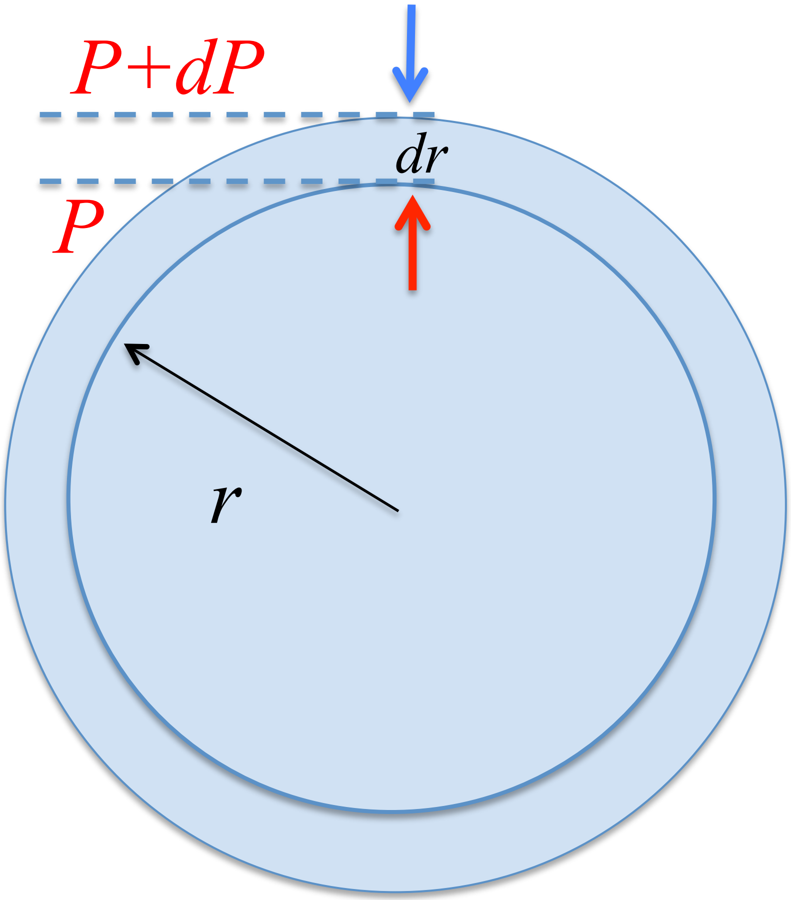


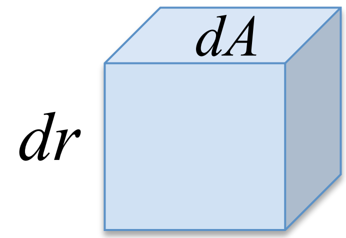


$$dV = dA\, dr$$

$$dM = \rho\, dV$$

Equilíbrio hidrostático





$$dV = dA\, dr$$
$$dM = \rho\, dV$$

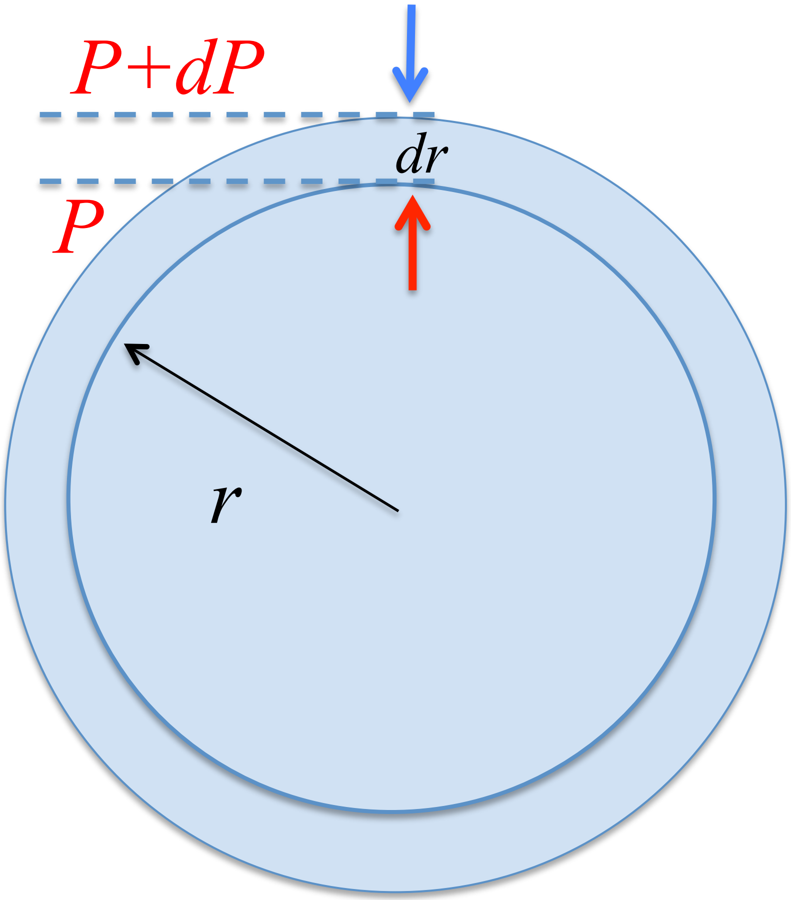
$$F_{\text{grav}} = -dM \times g = -\rho\, dV\, g$$

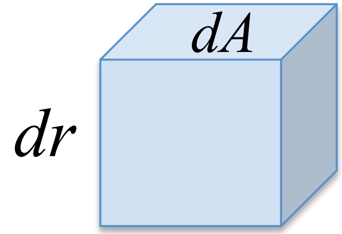
$$F_{\text{pressão}} = dP \times dA = dP\, dV/dr$$

$$\rightarrow dP\, dV/dr = -\rho\, dV\, g$$

$$dP/dr = -\rho\, g$$

Equilíbrio hidrostático





$$dV = dA\, dr$$
$$dM = \rho\, dV$$

$$dP/dr = -\rho\, g$$

$$g \equiv G M_r / r^2$$

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2}}$$

Ex. 10.1.1. Obter uma estimativa da pressão no centro do Sol

Example 8.2.1. The Sun, a G2 main-sequence star, has a mass of $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg and a radius of $R_\odot = 6.95508 \times 10^8$ m. Its average density is thus

$$\overline{\rho}_\odot = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} = 1410\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{P_s - P_c}{R_s - 0} \sim -\frac{P_c}{R_\odot}$$

Ex. 10.1.1. Obter uma estimativa da pressão no centro do Sol

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{P_s - P_c}{R_s - 0} \sim -\frac{P_c}{R_\odot} \sim G\frac{M_\odot \overline{\rho}_\odot}{R_\odot^2}$$

$$P_c \sim G\frac{M_\odot \overline{\rho}_\odot}{R_\odot} \sim 2.7 \times 10^{14}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

Valor aproximado da pressão no centro do Sol

$$P_c \sim G\frac{M_\odot \bar{\rho}_\odot}{R_\odot} \sim 2.7 \times 10^{14}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

Valor mais preciso integrando:

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

$$\int_{P_s}^{P_c} dP = P_c = -\int_{R_s}^{R_c} \frac{G M_r \rho}{r^2}\, dr.$$

$$P_c = 2.34 \times 10^{16}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$
$$= 2.3 \times 10^{11}\ \mathrm{atm!}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^{5}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

Qual a origem da pressão?

Precisamos uma "equação de estado" do material, por exemplo da lei do gás ideal:

$$PV = NkT$$

V: volume do gás,
N: número de partículas,
k: cte. Boltzmann,
T: temperatura

$$\boxed{P_g = nkT}$$

$$n \equiv N/V$$

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\boxed{P_g = nkT}$$

$$n \equiv N/V$$

$$\boxed{P_g = \frac{\rho k T}{\overline{m}}}$$

$\overline{m}$: massa média

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}}$$

μ: peso molecular médio

m_H: massa H

$$m_H = 1.673532499 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$\boxed{P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}}$$

$$\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}$$

Peso molecular médio μ depende do grau de ionização, pois os e- livres entram na massa média $\overline{m}$

Ou seja, precisamos usar a equação de Saha para calcular os números relativos de ionização

Para um gás completamente neutro:

$$\overline{m}_n = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j}$$

m_j : massa do átomo j
N_j : número de átomos j

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}}$$

dividindo por m_H

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

$$\boxed{A_j \equiv m_j / m_H}$$

Para um gás completamente neutro:

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

$$\boxed{A_j \equiv m_j/m_H}$$

Para um gás completamente ionizado:

$$\mu_i \simeq \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j(1+z_j)}$$

$1 + z_j$: número de núcleos e elétrons livres

where $1 + z_j$ accounts for the nucleus plus the number of free electrons that result from completely ionizing an atom of type j. (Do not confuse z_j with Z, the mass fraction of metals.)

Peso molecular médio em função das frações de massa X_J (e.g., X, Y, Z)

$$X_J = \frac{\text{Total mass of chemical element } j}{\text{Total mass of gas}}$$

$$X \equiv \frac{\text{total mass of hydrogen}}{\text{total mass of gas}}$$

$$\sum_j X_J = 1$$

$$Y \equiv \frac{\text{total mass of helium}}{\text{total mass of gas}}$$

$$X + Y + Z = 1$$

$$Z \equiv \frac{\text{total mass of metals}}{\text{total mass of gas}}.$$

Provinha

Se temos as frações de massa $X = 0,75$ e $Y = 0,25$, qual a fração (em número de partículas) de hidrogênio e de hélio?

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j

$$\frac{1}{\mu_n m_H} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j}$$

$$= \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{\text{number of particles from } j}{\text{mass of particles from } j} \cdot \frac{\text{mass of particles from } j}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j$$

$$= \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_n} = \sum_j \frac{1}{A_j} X_j$$

Em função das frações de massa X_j:

$$\frac{1}{\mu_n} = \sum_j \frac{1}{A_j} X_j$$

$$A_j \equiv m_j / m_H$$

Para um gás completamente neutro:

$$\frac{1}{\mu_n} \simeq X + \frac{1}{4} Y + \left\langle \frac{1}{A} \right\rangle_n Z$$

$\langle 1/A \rangle_n$ é a média ponderada de todos os elementos mais pesados que He. Para abundâncias solares, $\langle 1/A \rangle_n \sim 1/15.5$

Para um gás completamente ionizado:

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_j \frac{1 + z_j}{A_j} X_j$$

Incluindo explicitamente hidrogênio (X) e He (Y):

$$\frac{1}{\mu_i} \simeq 2X + \frac{3}{4} Y + \left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i Z$$

If we assume that $X = 0.70$, $Y = 0.28$, and $Z = 0.02$, a composition typical of younger stars, then with these expressions for the mean molecular weight, $\mu_n = 1.30$ and $\mu_i = 0.62$.

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

A energia cinética média de uma partícula é ½*kT* por grau de liberdade.

Pressão de radiação: $$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$$

Pressão total: $$P_t = \frac{\rho kT}{\mu m_H} + \frac{1}{3}aT^4$$

Pressão total: $$P_t = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4$$

Example 10.2.1. Using the results of Example 10.1.1, we can estimate the central temperature of the Sun. Neglecting the radiation pressure term, the central temperature is found from the ideal gas law equation of state to be

$$T_c = \frac{P_c \mu m_H}{\rho k}$$

Using $\overline{\rho}_\odot$, a value of $\mu_i = 0.62$ appropriate for complete ionization,[3] and the estimated value for the central pressure, we find that

No centro do Sol, $P_C \sim 2\text{x}10^{16}$ N m^{-2}

→ $T_C \sim 1{,}5\text{x}10^{7}$ K

which is in reasonable agreement with more detailed calculations. One solar model gives a central temperature of 1.57×10^7 K. At this temperature, the pressure due to radiation is only 1.53×10^{13} N m^{-2}, 0.065% of the gas pressure.