

Mecânica Quântica — 7600025

Lista 2 — teste no dia 2/10/2018

N massas m podem mover-se ao longo de um trilho retilíneo sem atrito. As massas estão presas a paredes e entre si por molas de constantes k , como na situação discutida em classe. Na posição de equilíbrio, cada massa está a uma distância a de suas vizinhas, e as massas das pontas estão a distância a das paredes.

1. Considere $N = 3$. Encontre as equações de movimento.
2. Ainda com $N = 3$, suponha que os deslocamentos das posições de equilíbrio são $u_j(t) = u_j e^{pt}$ e mostre que esse procedimento resulta numa equação de autovalores, da forma

$$M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0,$$

onde M é uma matriz com elementos que dependem de p , k e m .

3. Encontre a equação para p^2 que garante solução não-trivial da equação matricial no problema anterior.
4. Mostre que, com $p^2 = -\omega_q^2$, as frequências

$$\omega_q = 2\omega_0 \sin\left(\frac{qa}{2}\right),$$

onde q é o vetor de onda encontrado em classe, que aqui pode tomar três valores distintos, são soluções da equação encontrada no problema anterior.

5. Desenhe em gráfico $u_j \times x_j$ (onde os x_j são as posições de equilíbrio das massas) os três modos normais que vibram com as frequências ω_q .
6. Sejam u_j^q ($j = 1, 2, 3$) os deslocamentos correspondentes a um dado q . Podemos considerar um sistema cartesiano com os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} e definir o vetor

$$\vec{u}_q = u_1^q \hat{i} + u_2^q \hat{j} + u_3^q \hat{k}.$$

Mostre explicitamente que dois \vec{u}_q associados a q s distintos são ortogonais.

7. Considere agora $N = 4$. Encontre as frequências dos quatro modos normais a partir da expressão na questão 4.
8. Ainda com $N = 4$, encontre os u_j^q para os quatro modos normais.
9. Mostre que, com $N = 4$, os u_j^q também formam vetores (com quatro componentes) que são ortogonais entre si.
10. Encontre a maior frequência de modo normal no limite $N \rightarrow \infty$. Interprete fisicamente. *Sugestão: faça um desenho para mostrar os deslocamentos das massas nesse limite e siga a linha de pensamento que adotamos em classe no caso do modo respiratório para duas massas.*