

Estatística aplicada a ensaios clínicos

Luís Vicente Garcia
Disciplina de Anestesiologia



Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo



Aula 7

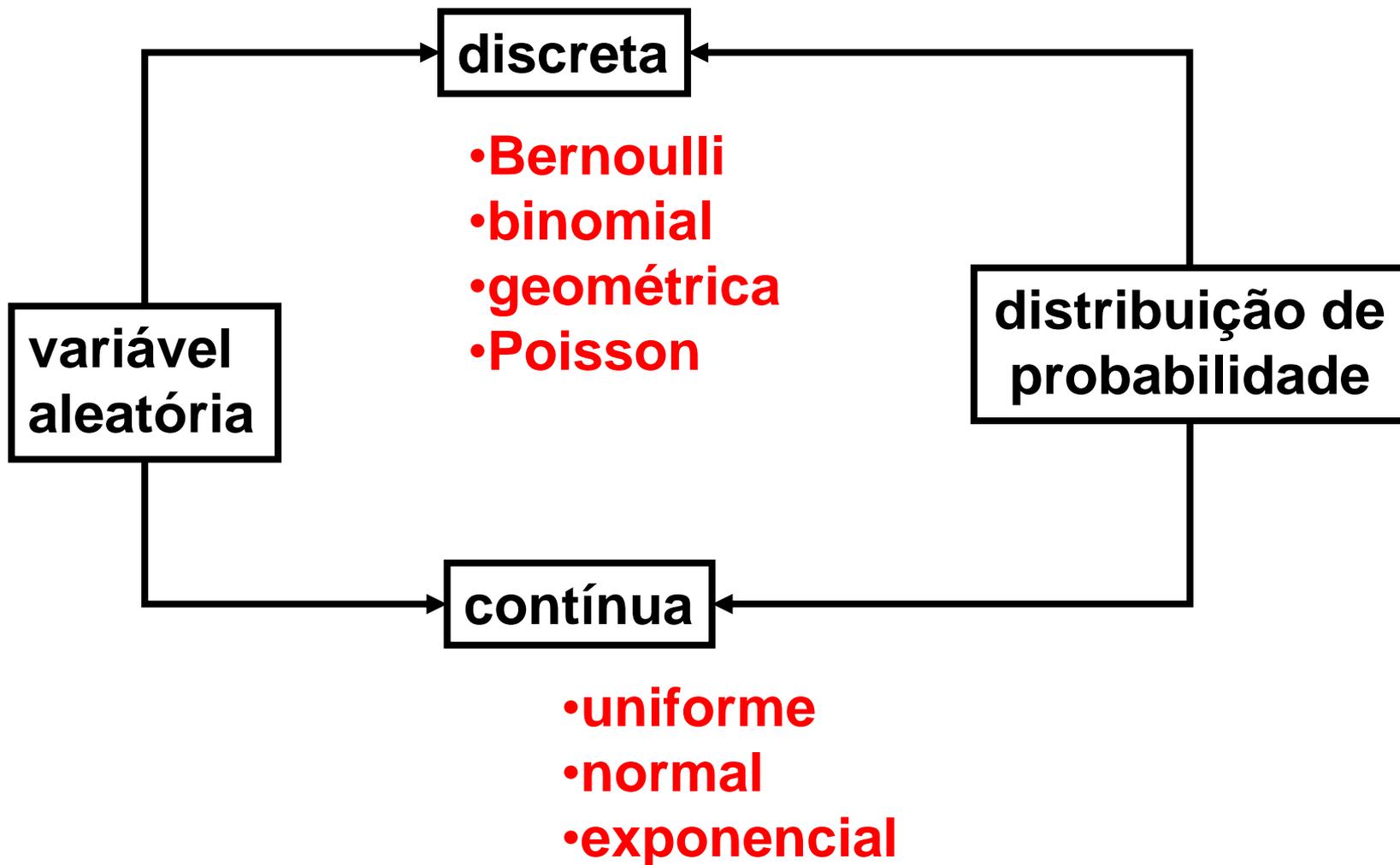
Luís Vicente Garcia
lv Garcia@fmrp.usp.br



Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo



distribuição de probabilidade



distribuição de probabilidade

Discretas

- Bernoulli**
- Binomial**
- geométrica**
- Poisson**

distribuição discretas de probabilidade

x = número de respostas corretas

x = número de chegadas pontuais

x = número de pontos feitos num jogo

distribuição discreta de probabilidade

Uma **distribuição discreta de probabilidade** enumera cada valor possível da variável aleatória, bem como sua probabilidade.

distribuição discreta de probabilidade

	x	$P(x)$
número de filhos em cada família	0	0,004
	1	0,435
	2	0,355
	3	0,206



distribuição discreta de probabilidade

Propriedades

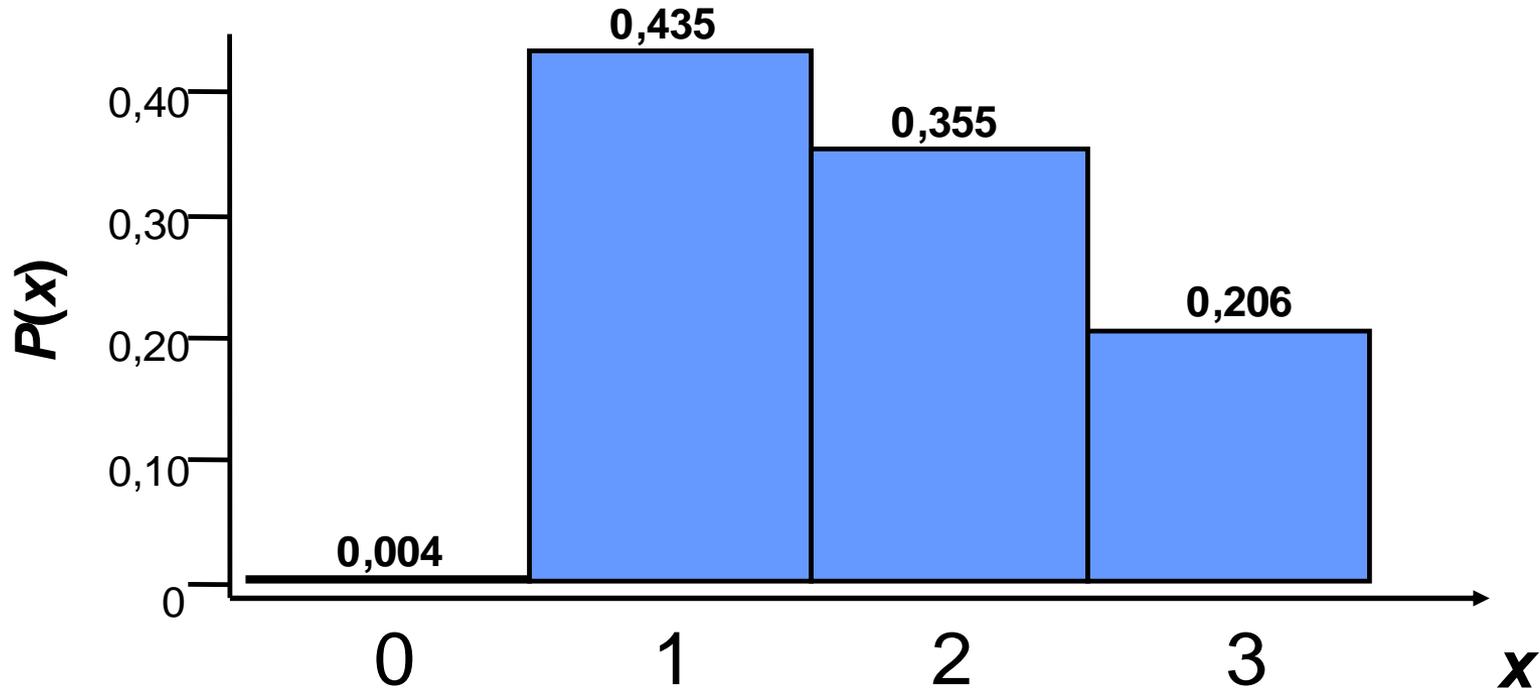
- Cada probabilidade precisa estar entre 0 e 1, inclusive.
- A soma de todas as probabilidades é 1.

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

$$\sum P(x) = 1$$

Histograma de probabilidade

Número de filhos



distribuição discreta

A média

$$\mu = \sum x \cdot P(x)$$

A variância

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 \cdot P(x)$$

O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

média

Calcule a média: $\mu = \sum x \cdot P(x)$

Multiplique cada valor por sua probabilidade. Some os produtos.

x	$P(x)$	$xP(x)$
0	0,004	0
1	0,435	0,435
2	0,355	0,71
3	0,206	0,618
		1,763

O valor esperado (a média) é de 1,763 FILHOS.

variância e desvio-padrão

A média é de 1,763 FILHOS. $\sigma^2 = \sum(x - \mu)^2 \cdot P(x)$

x	P(x)	x - μ	(x - μ) ²	(x - μ) ² P(x)
0	0,004	-1,763	3,108	0,012
1	0,435	-0,763	0,582	0,253
2	0,355	0,237	0,056	0,020
3	0,206	1,237	1,530	0,315
				0,601

$$\sigma \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,661} = 0,775$$

variância

O desvio padrão é de 0,775 FILHOS.

distribuição binomial

Características

- O número de tentativas é fixo (n).
- As n tentativas são independentes e repetidas em condições idênticas.
- Para cada tentativa há dois resultados possíveis,
 $S = \text{sucesso}$ ou $F = \text{fracasso}$.

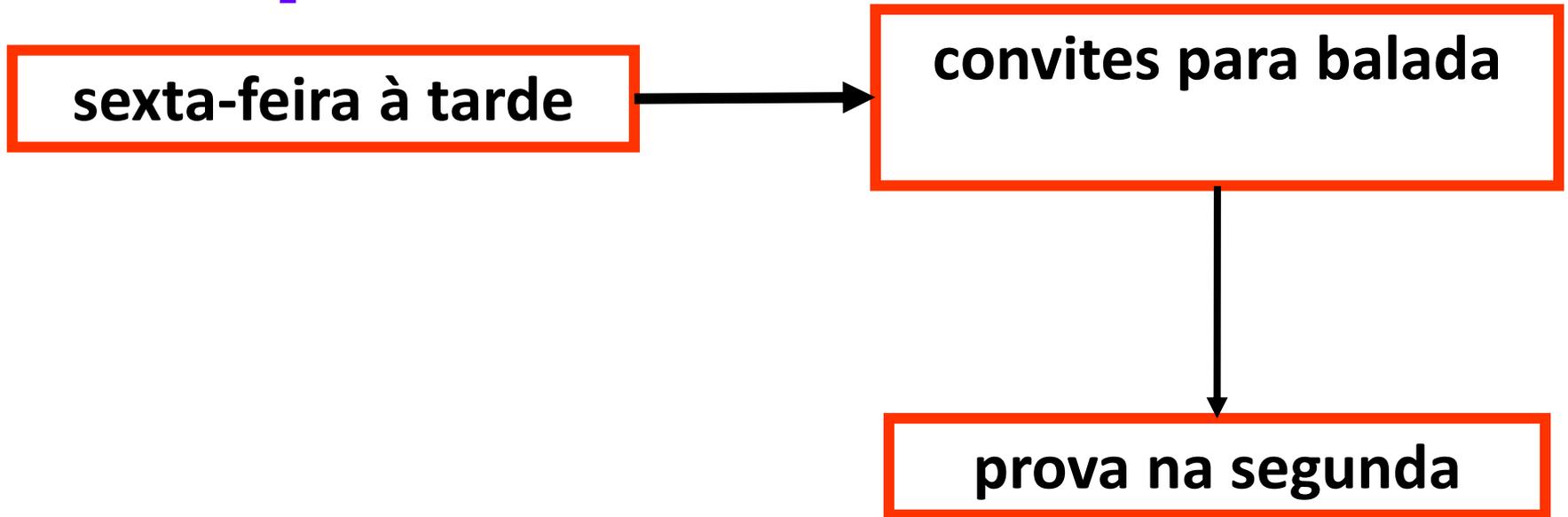
distribuição binomial

Características

- A probabilidade de sucesso numa tentativa única é p . $P(S) = p$
- A probabilidade de fracasso é q . $P(F) = q$, onde $p + q = 1$
- O problema central está em determinar a probabilidade de x sucessos em n tentativas, sendo $x = 0$ ou 1 ou $2 \dots n$.

A variável aleatória x é uma contagem do número de sucessos em n tentativas.

Experimentos binomiais



Prova:

3 questões
5 alternativas cada
acerto mínimo = 2

teste

1 – Importante Primeiro Ministro da China – Mao Tsé:

- a) Tang
- b) Teng
- c) Ting
- d) Tong
- e) Tung

2 – Importante cidade do oriente – Bag__:

- a) dá
- b) dé
- c) di
- d) dó
- e) du

3 – Média é:

- a) Leite + café
- b) Leite + açúcar
- c) valores extremos/2
- d) Soma dos valores/número valores
- e) puxa-saquismo

Probabilidades binomiais

P de 2 questões em três (5 alternativas)

CCC **CEE**
CCE **ECE**
CEC **EEC**
ECC **EEE**

P (acerto) = 0,2

P (erro) = 0,8

	EEE	CEE ECE EEC	CCE CEC ECC	CCC
certas	0	1	2	3
P(x)	0,512	0,384	0,096	0,008

$$P(x=3) = P(3 \text{ certas}) = 0,2^3 = 0,008$$

$$P(x=2) = P(2 \text{ certas}) = 3 \times 0,2^2 \times 0,8 = 0,096$$

$$P(x=1) = P(1 \text{ certa}) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$$

$$P(x=0) = P(0 \text{ certa}) = 0,8^3 = 0,512$$

Probabilidades binomiais

P de 2 questões em três (5 alternativas)

CCC
CCE
CEC
ECC
CEE
ECE
EEC
EEE

P (acerto) = 0,2

P (erro) = 0,8

	EEE	CEE ECE EEC	CCE CEC ECC	CCC
certas	0	1	2	3
P(x)	0,512	0,384	0,096	0,008

0,104

Resultados do teste

número de questões corretas = X

Por que esse foi um experimento binomial?

Quais são os valores de n , p e q ?

Quais são os valores possíveis de x ?

Um teste de múltipla escolha tem 5 questões, cada qual com cinco alternativas, uma delas correta. Você quer saber qual a probabilidade de 'chutar' certo em exatamente 3 questões. Determine n , p , q e x .

$$n = 5 \quad p = 1/5 \quad q = 4/5 \quad x = 3$$

Um médico lhe diz que certa cirurgia é bem-sucedida em 80% das vezes. Se a cirurgia for realizada sete vezes, determine a probabilidade de ser bem-sucedida em exatamente seis. Determine n , p , q e x .

$$n = 7 \quad p = 0,80 \quad q = 0,20 \quad x = 6$$

distribuição binomial

a probabilidade de ocorrerem exatamente x sucessos em n tentativas é de:

$$P(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

distribuição binomial

Teste com cinco questões e quatro alternativas

calcular a probabilidade de alguém não acertar nenhuma questão, exatamente uma, duas, três, quatro ou todas as cinco questões do teste.

$$P(0) = {}_5C_0 p^0 q^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} (0,25)^0 (0,75)^5 = 0,237$$

$$P(1) = {}_5C_1 p^1 q^{5-1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} (0,25)^1 (0,75)^4 = 0,396$$

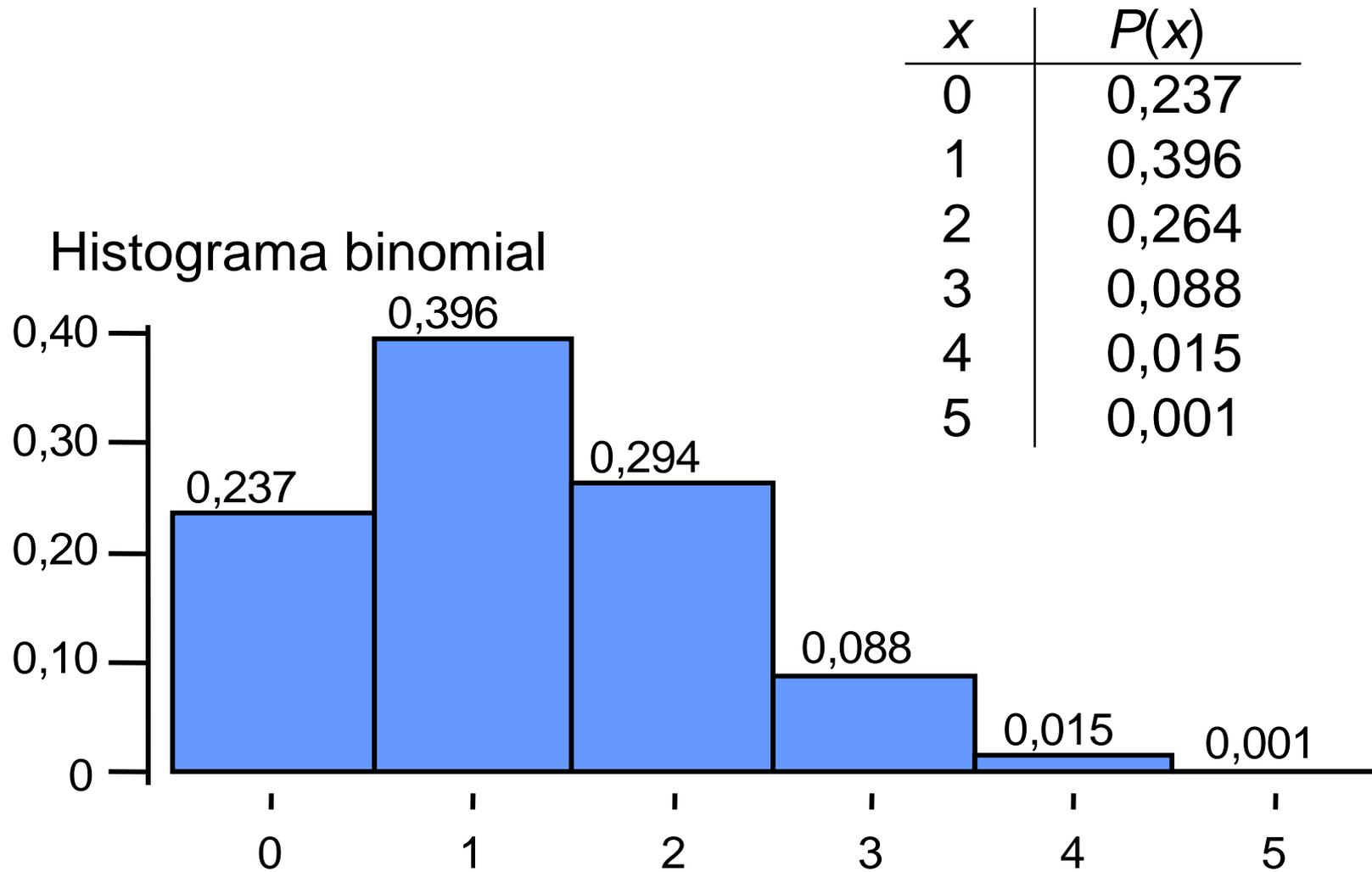
$$P(2) = {}_5C_2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} (0,25)^2 (0,75)^3 = 0,264$$

$$P(3) = 0,088$$

$$P(4) = 0,015$$

$$P(5) = 0,001$$

distribuição binomial



x

parâmetros para um experimento binomial

Média: $\mu = np$

Variância: $\sigma^2 = npq$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq}$

distribuição geométrica

distribuição geométrica é uma distribuição discreta de probabilidade da variável aleatória x com as seguintes condições:

- *A tentativa é repetida até que o sucesso ocorra.*
- *As sucessivas tentativas são independentes entre si.*
- *A probabilidade de sucesso é a mesma a cada tentativa*

A probabilidade de que o primeiro sucesso ocorra na tentativa número x é: $P(x) = (q)^{x-1}p$, onde $q = 1 - p$.

distribuição geométrica

Segundo uma pesquisa de mercado, a probabilidade de que cada pessoa que entra em determinada loja faça uma compra é de 0,30.

- A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela primeira pessoa que entrar na loja é de 0,30. Ou seja: $P(1) = 0,30$.
- A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela segunda pessoa que entrar na loja é de $(0,70)(0,30)$.
Logo, $P(2) = (0,70)(0,30) = 0,21$.
- A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela terceira pessoa que entrar na loja é de $(0,70)(0,70)(0,30)$.
Logo, $P(3) = (0,70)(0,70)(0,30) = 0,147$.

A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela pessoa número x é de

$$P(x) = (0,70)^{x-1}(0,30)$$

distribuição geométrica

Um fabricante de cereais colocou uma peça premiada nas embalagens de seu produto. A probabilidade de ganhar um prêmio é de um para quatro. Determine a probabilidade de que você:

a) *ganhe seu primeiro prêmio na quarta compra;*

$$P(4) = (0,75)^3 \cdot (0,25) = 0,1055$$

b) *ganhe seu primeiro prêmio na segunda ou terceira compra;*

$$P(2) = (0,75)^1(0,25) = 0,1875 \text{ e}$$

$$P(3) = (0,75)^2(0,25) = 0,1406$$

$$\text{Logo, } P(2 \text{ ou } 3) = 0,1875 + 0,1406 = 0,3281$$

c) *não ganhe nenhum prêmio nas quatro primeiras compras.*

$$1 - (P(1) + P(2) + P(3) + P(4))$$

$$1 - (0,25 + 0,1875 + 0,1406 + 0,1055)$$

$$= 1 - 0,6836 = 0,3164$$

distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta de probabilidade de uma variável aleatória x com as seguintes condições:

1. O experimento consiste em contar o número de vezes, x , que um evento ocorre num intervalo de tempo, área ou espaço.
2. A probabilidade de que o evento ocorra é a mesma em cada intervalo.
3. O número de ocorrências em um intervalo independe do número de ocorrências em outro.

A probabilidade de exatamente x ocorrências em um intervalo é

$$P(x) = \frac{m^x e^{-\mu}}{x!}$$

e é um número irracional aproximadamente igual a 2,71828.
 μ é o número médio de ocorrências por intervalo.

distribuição de Poisson

Estima-se que, em todo o mundo, os tubarões matem dez pessoas por ano. Determine a probabilidade:

- a) de que três pessoas sejam mortas por tubarões este ano

$$P(3) = \frac{10^3 (2,71828)^{-10}}{3!} = 0,0076$$

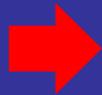
- b) de que duas ou três pessoas sejam mortas por tubarões este ano

$$P(2) = \frac{10^2 (2,71828)^{-10}}{2!} = 0,0023$$

$$P(3) = 0,0076$$

$$P(2 \text{ ou } 3) = 0,0023 + 0,0076 = 0,0099$$

distribuição de probabilidade

 **Contínuas**

uniforme

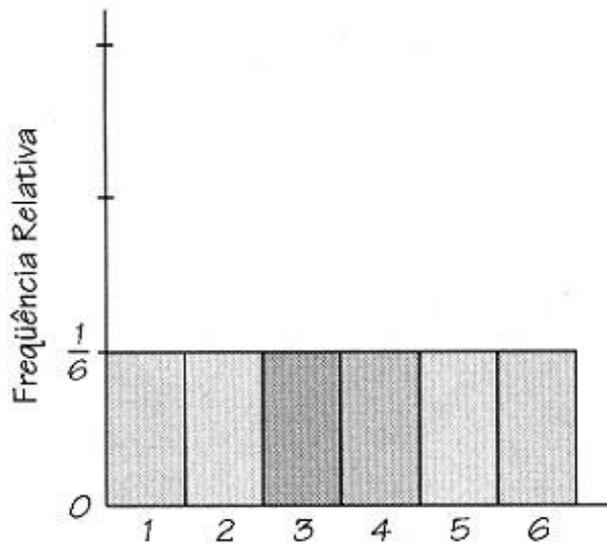
Normal

Exponencial

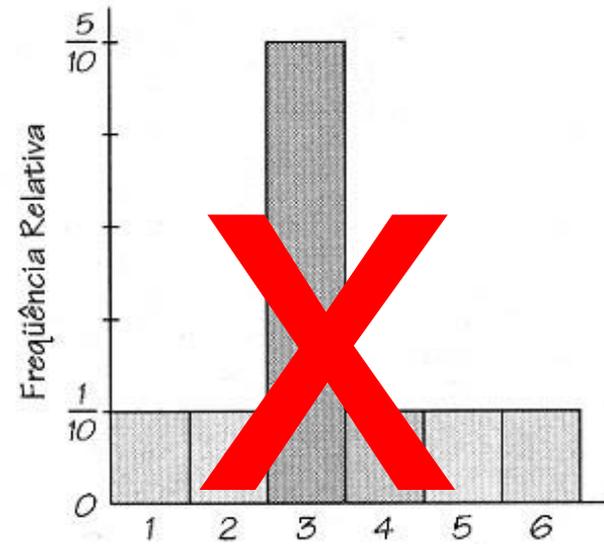
distribuição de probabilidade

◇ CONTÍNUAS

□ Uniforme



(a)

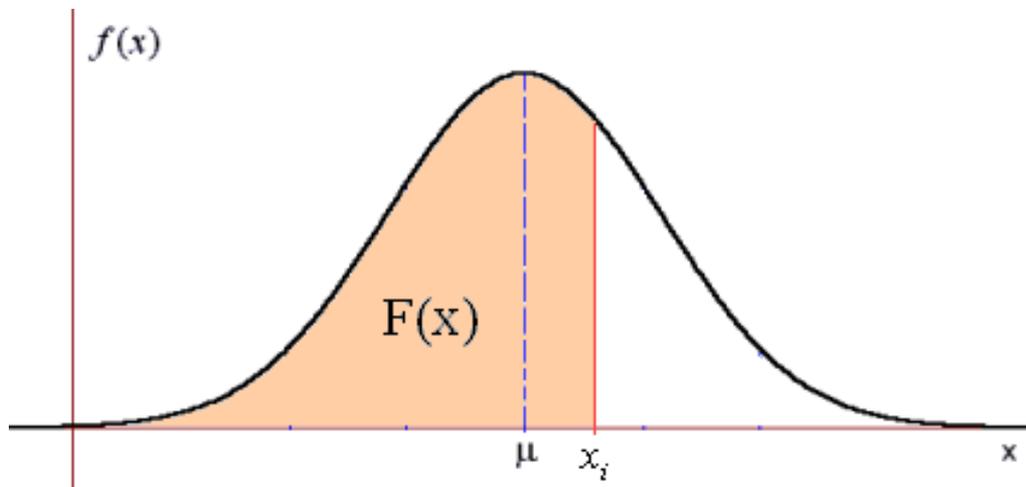


(b)

distribuição de probabilidade

◇ CONTÍNUAS

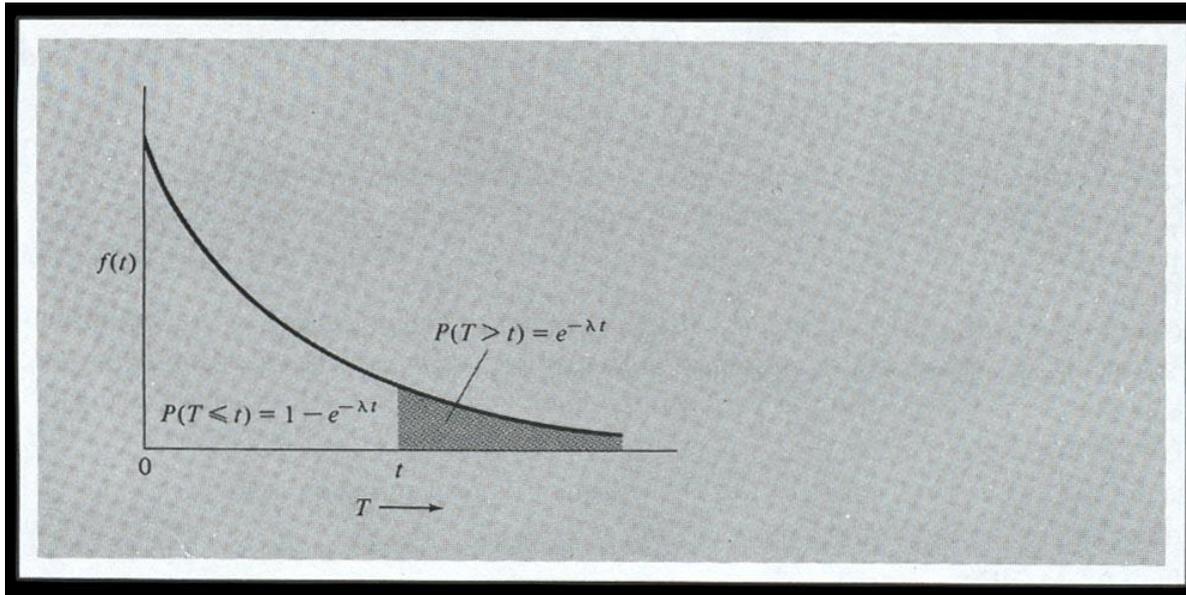
□ Normal



distribuição de probabilidade

◇ CONTÍNUAS

□ Exponencial



Teorema de Chebychev

A proporção (ou fração) de **qualquer** conjunto de dados a menos de k desvios-padrão a contar da média é sempre ao menos $1 - 1/K^2$

K é um número positivo maior do que 1

Teorema de Chebychev

Consequências para $k = 2$ e $k = 3$

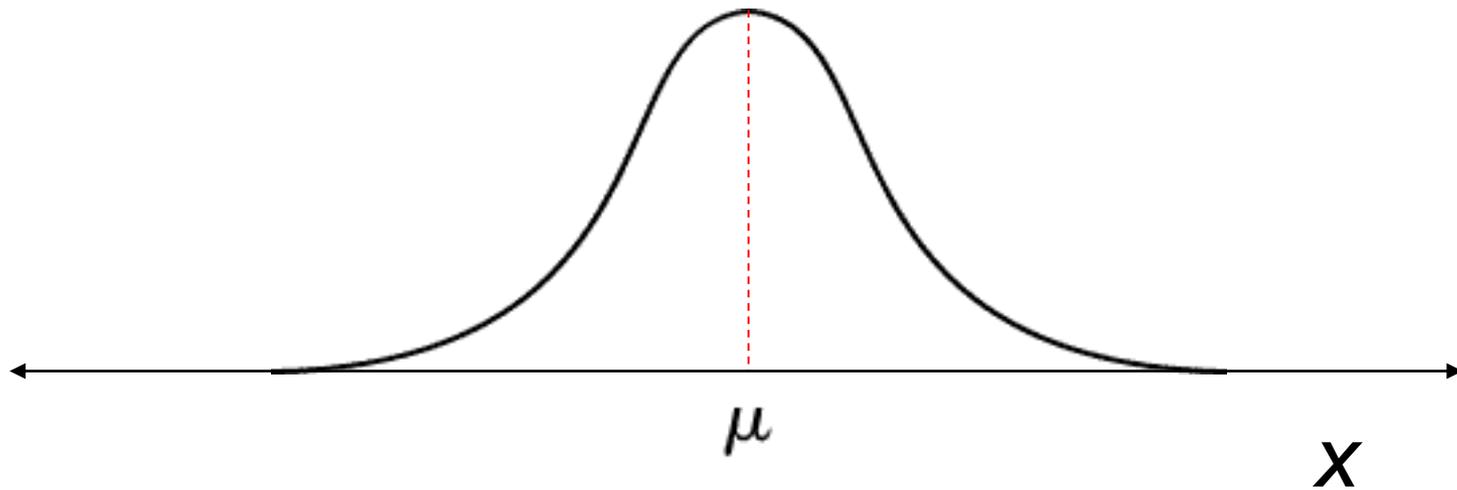
Ao menos $\frac{3}{4}$ (75%) de todos
os valores estão
no intervalo entre -2 e $+2$ desvios-padrão

Teorema de Chebychev

Consequências para $k = 2$ e $k = 3$

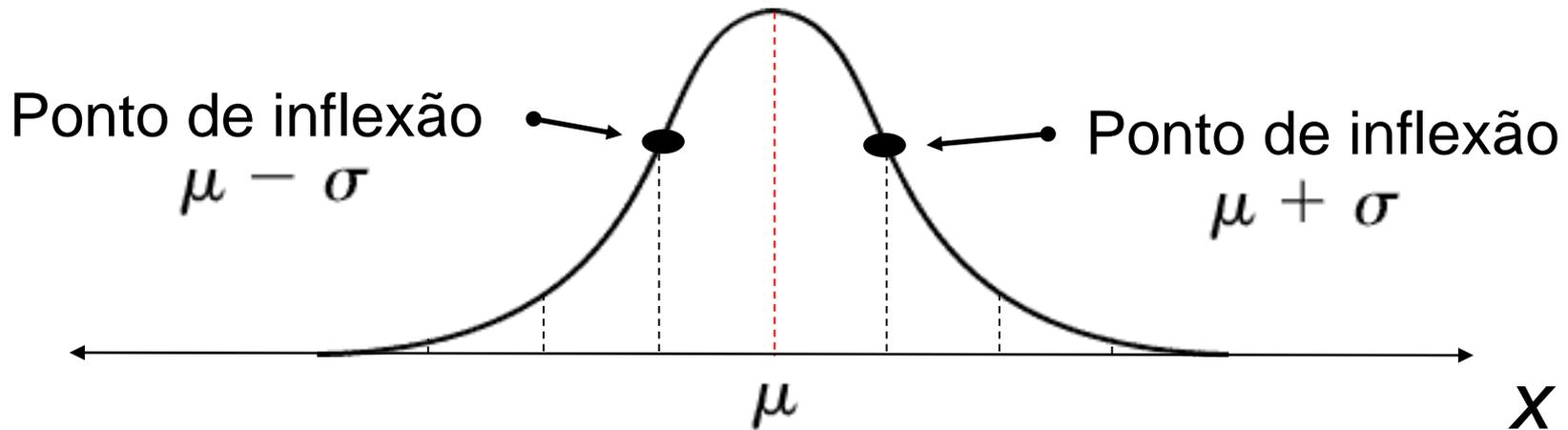
Ao menos $8/9$ (89%) de todos
os valores estão
no intervalo entre -3 e $+3$ desvios-padrão

curva normal



- Suas média, mediana e moda são iguais.
- Tem forma de sino e é simétrica em torno da média.
 - A área total sob a curva é de 100%.

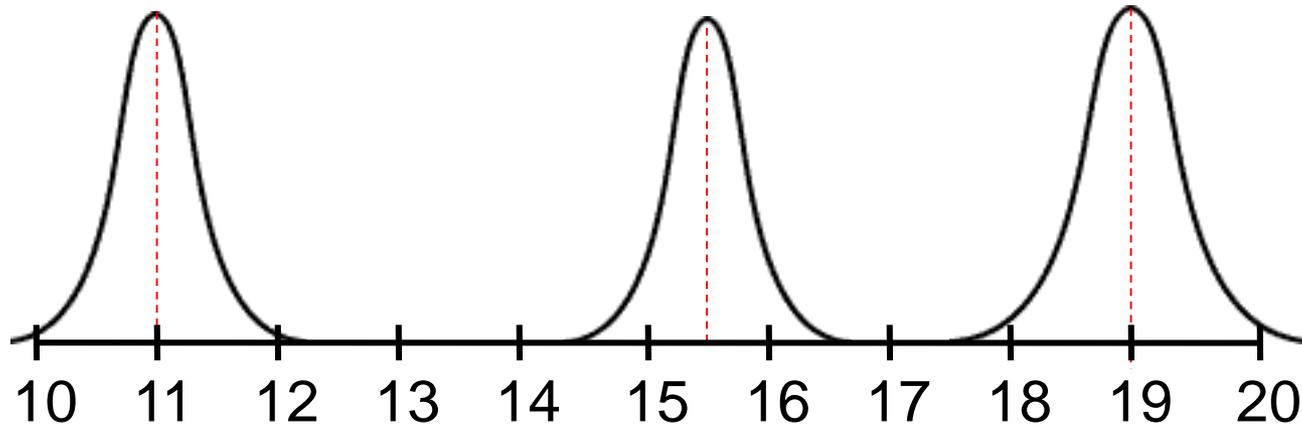
curva normal



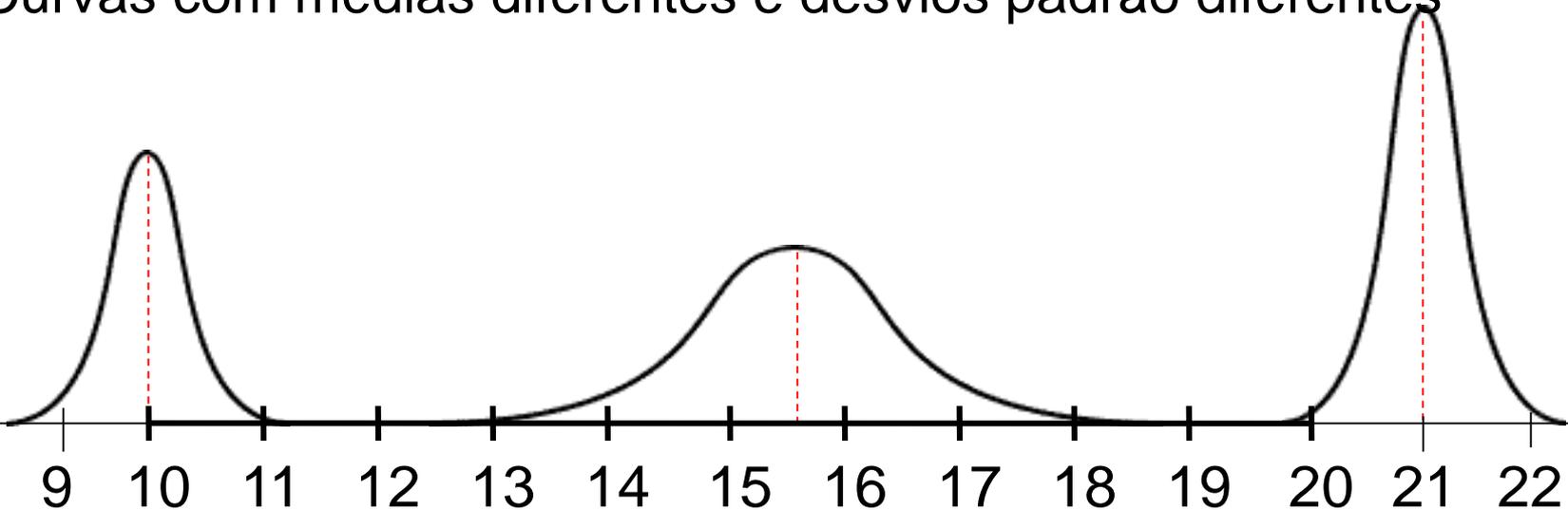
- À medida que a curva se afasta da média, aproxima-se cada vez mais do eixo x , mas nunca o toca.
- Os pontos em que a curvatura muda são chamados pontos de inflexão. O gráfico curva-se para baixo entre os pontos de inflexão e, para cima, à esquerda e à direita deles.

Médias e desvios-padrão

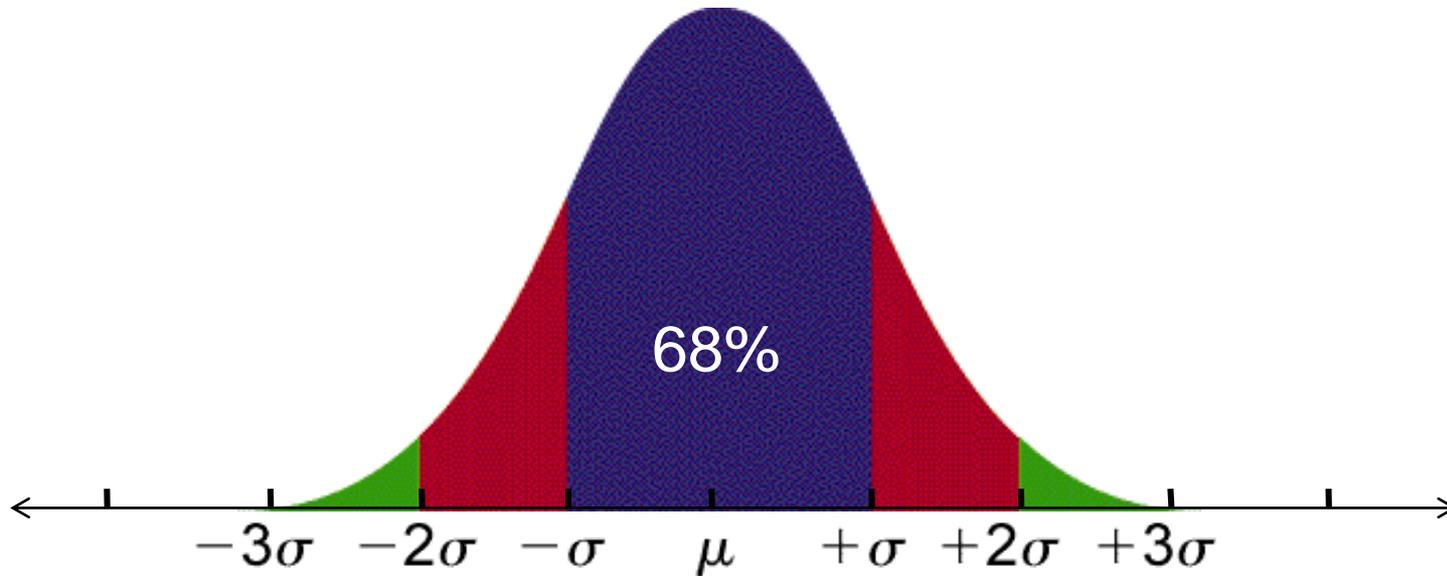
Curvas com médias diferentes e o mesmo desvio padrão



Curvas com médias diferentes e desvios padrão diferentes

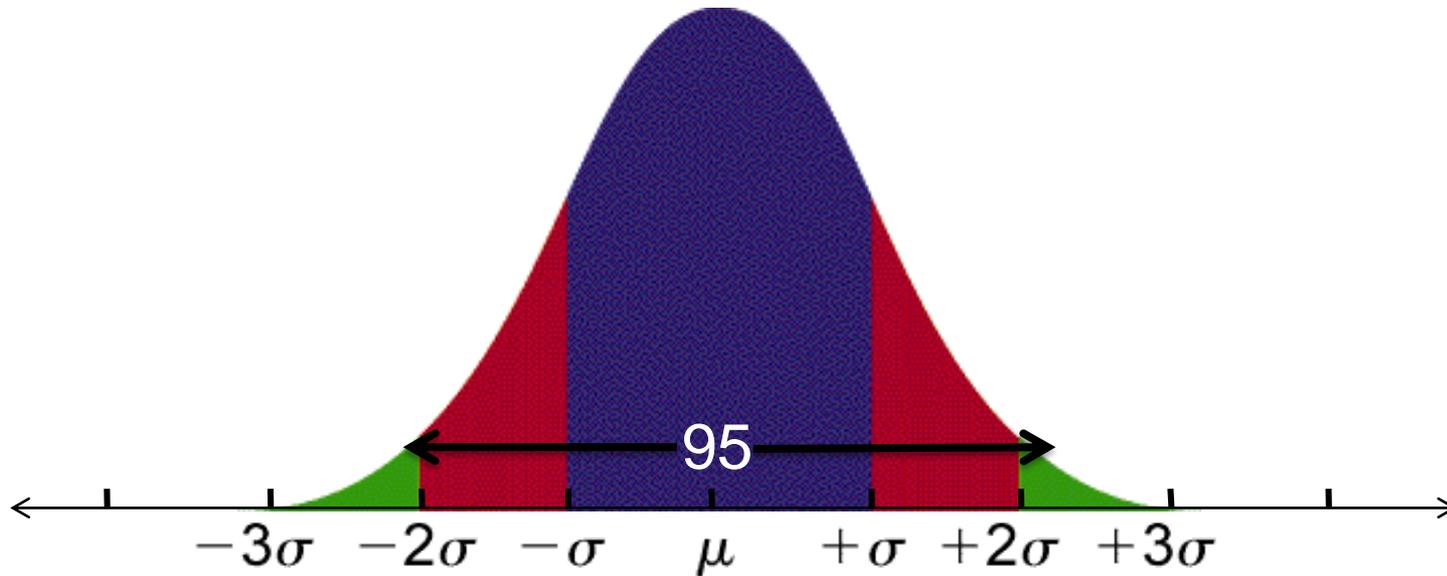


Regra Empírica



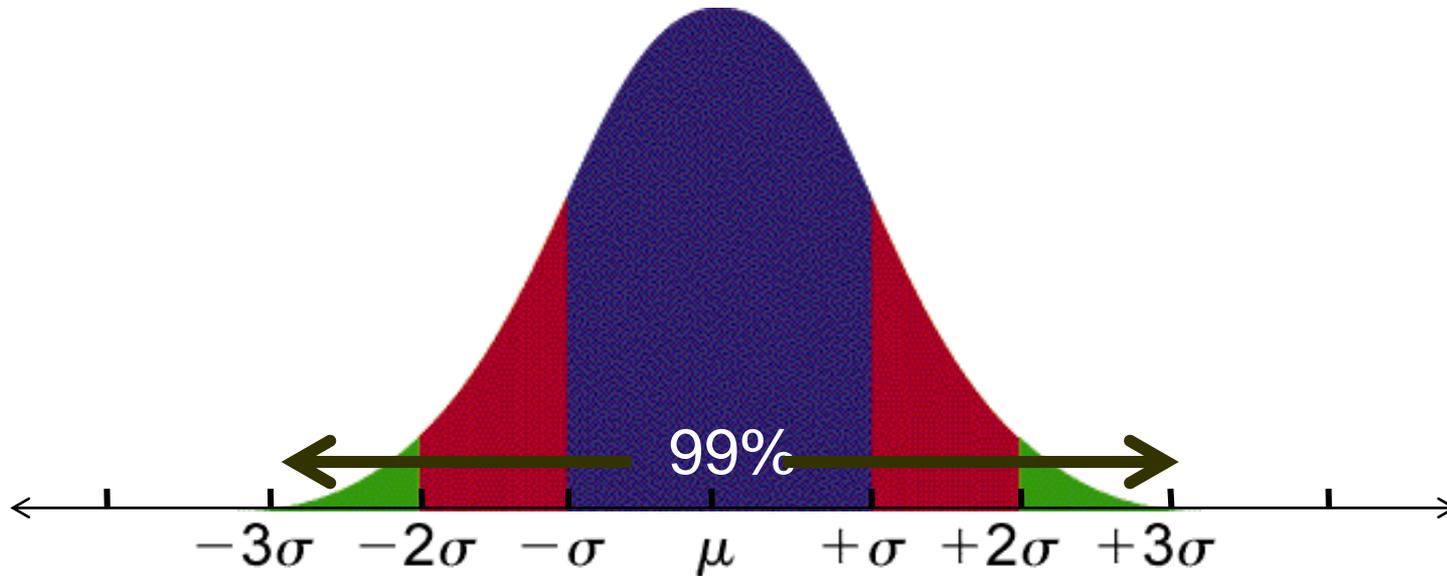
a área entre (-1σ) e $(+1\sigma)$ é de
cerca de 68%

Regra Empírica



**a área entre $(- 2dp)$ e $(+2dp)$ é de
cerca de 95%**

Regra Empírica

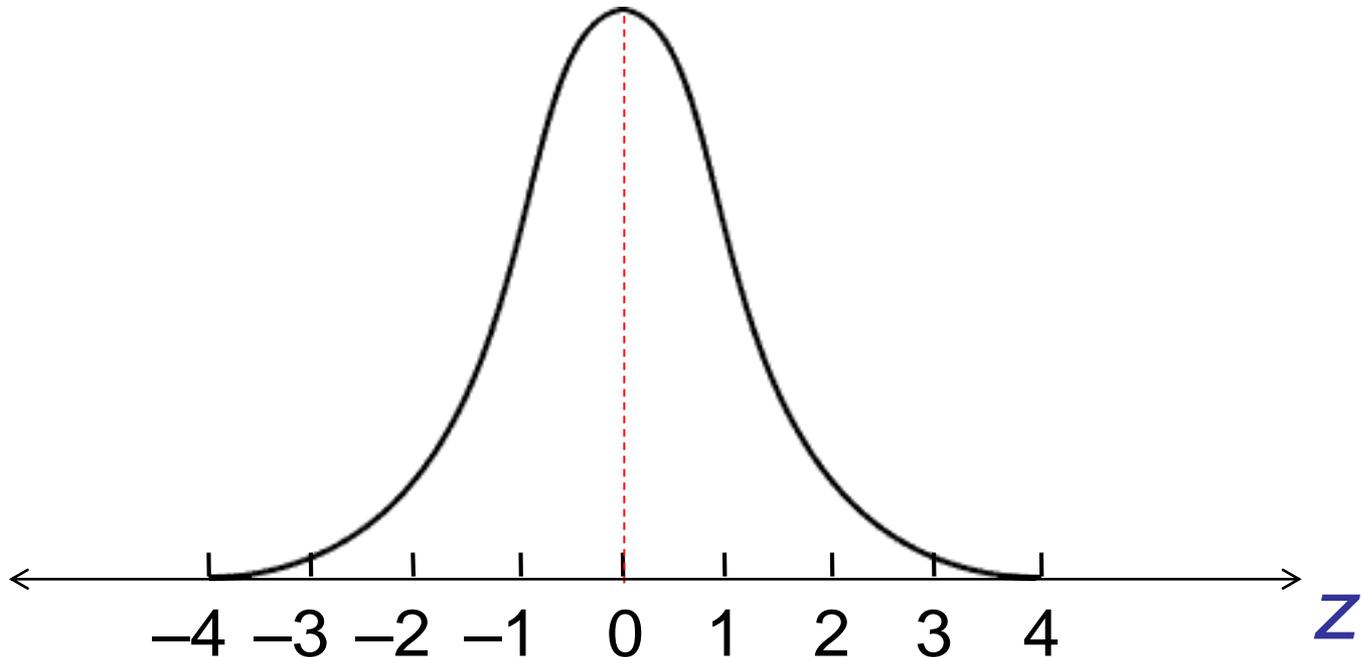


**a área entre (-3σ) e $(+3\sigma)$ é de
cerca de 99,7%**

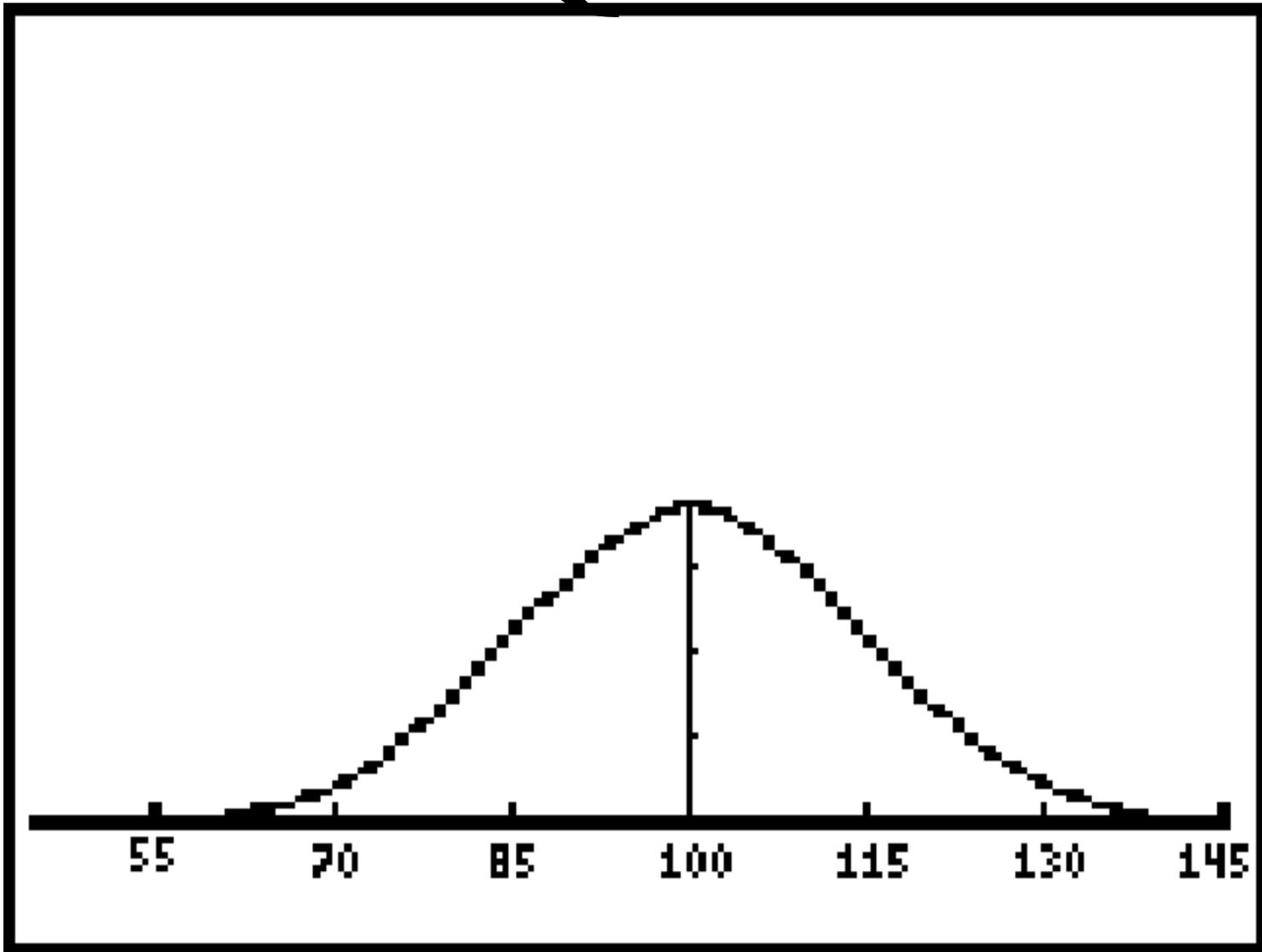
A distribuição normal padrão

A distribuição normal padrão tem média 0 e desvio padrão de 1.

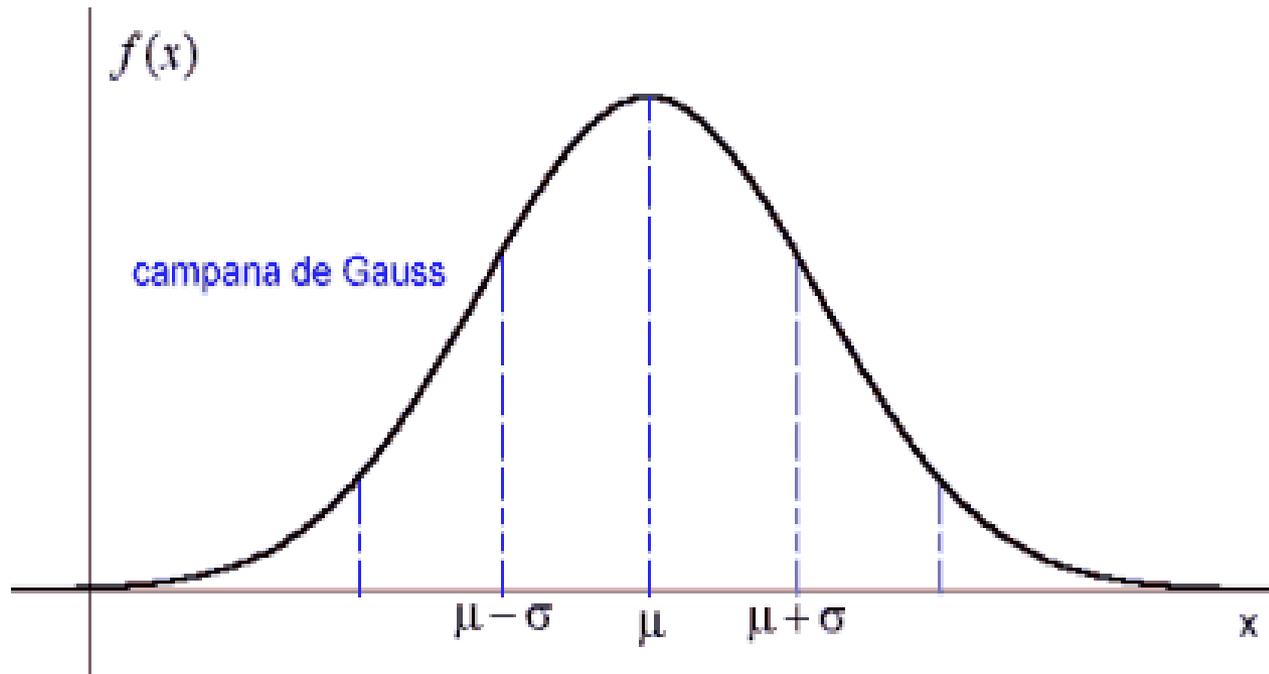
Se usar escores z , você pode transformar qualquer distribuição normal numa distribuição normal padrão.



QI



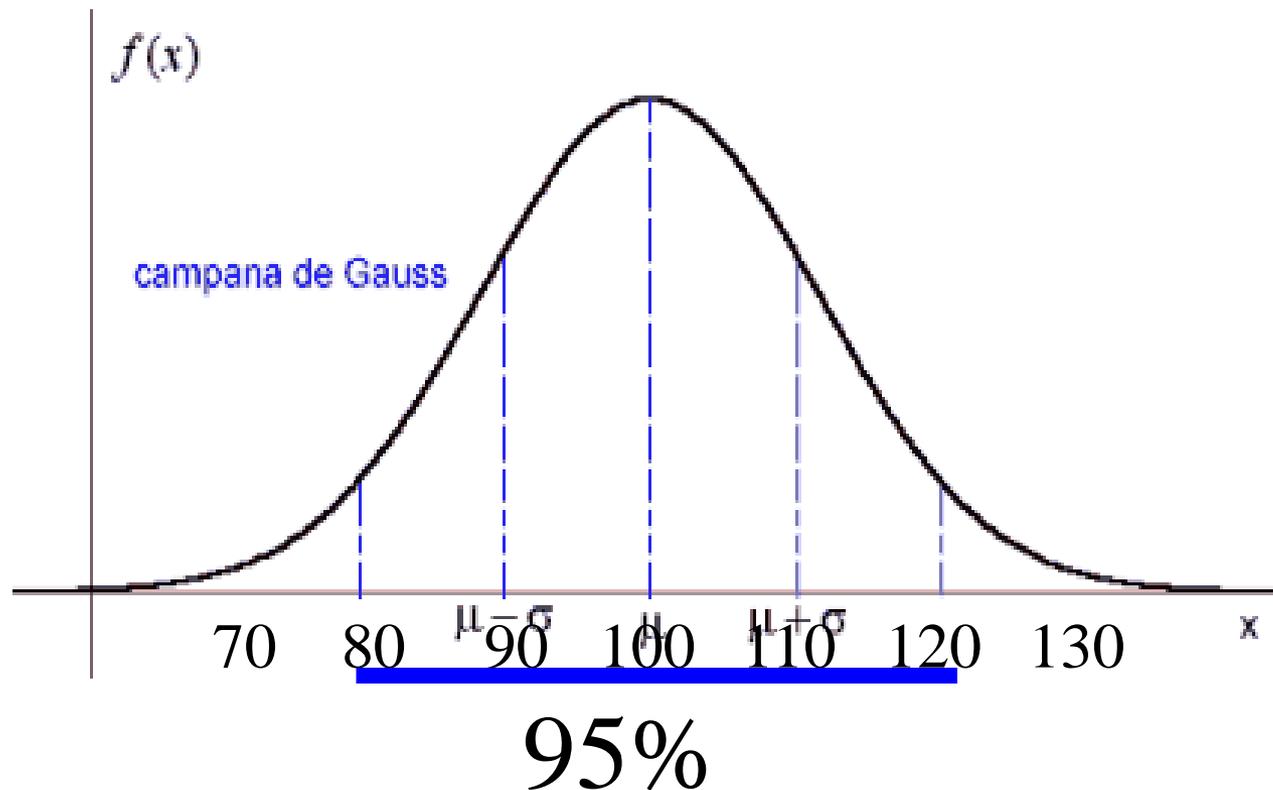
QI masculino: $dp = 10$



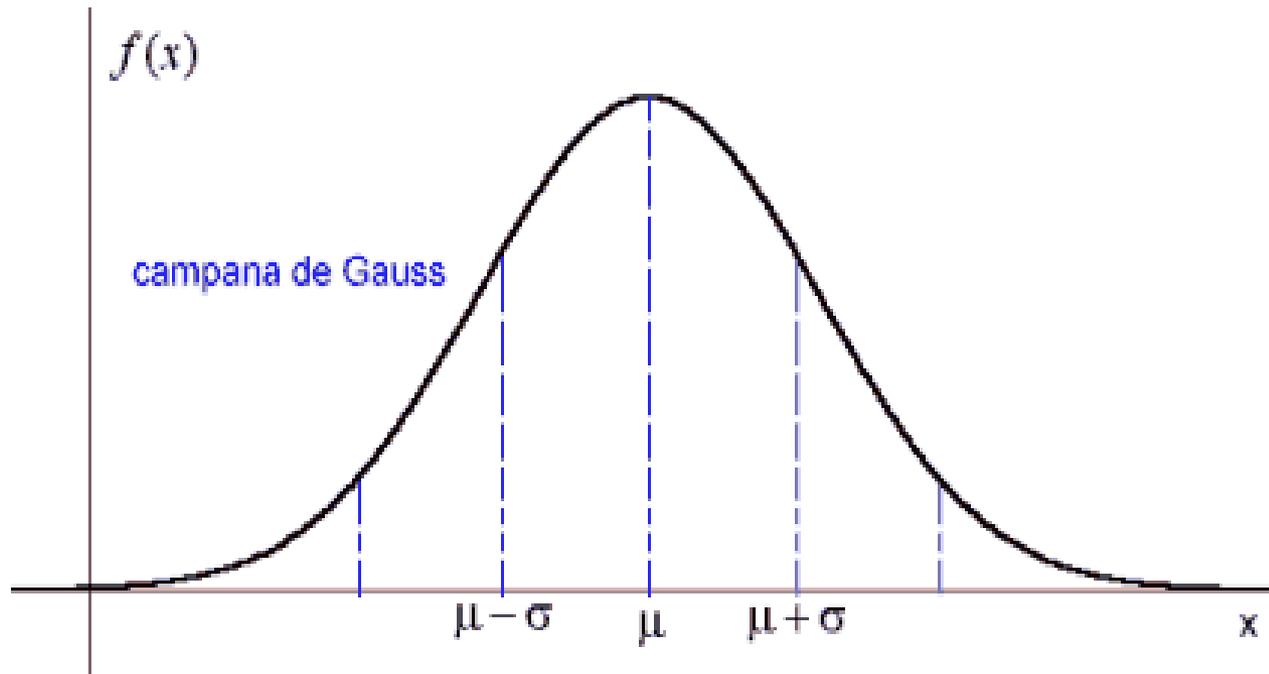
70 80 90 100 110 120 130

68%

QI masculino: $dp = 10$



QI masculino: $dp = 10$



70 80 90 100 110 120 130

99%

