

Mecânica Quântica I - 4300403

5^a lista

- 1) a) Mostre que a soma de dois operadores hermitianos é também hermitiano.
b) Suponha que $\hat{Q}$ seja hermitiano e que α seja um número. Mostre que $\alpha\hat{Q}$ é hermitiano se α for real.
c) Mostre que o produto dois operadores é hermitiano quando os dois operadores comutam.
d) Mostre que o operador posição e o operador hamiltoniano, para $V(x)$ real, são hermitianos.
- 2) O operador hermitiano conjugado, ou adjunto, de um operador $\hat{Q}$ é o operador $\hat{Q}^\dagger$, tal que

$$\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f|g\rangle$$

- a) Calcule os adjuntos dos operadores x , i e d/dx .
- b) Mostre que o adjunto do operador levantamento do oscilador harmônico

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x)$$

é o operador abaixamento, ou seja:

$$a_+^\dagger = a_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x)$$

- c) Mostre que $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$.

3) Considere o operador $\hat{Q} = d^2/d\phi^2$, no qual ϕ é o ângulo azimutal das coordenadas polares, e que as funções, nesse espaço estão sujeitas à condição $f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$.

- a) $\hat{Q}$ é hermitiano?
- b) Encontre as autofunções e os autovalores de $\hat{Q}$.
- c) O espectro é degenerado?

4) Suponha que f e g são duas autofunções de $\hat{Q}$ com o mesmo autovalor q .

- a) Mostre que qualquer combinação linear de f e g é também autofunção de $\hat{Q}$ com o mesmo autovalor.
- b) Verifique que $f(x) = \exp(x)$ e $g(x) = \exp(-x)$ são autofunções do operador d^2/dx^2 com o mesmo autovalor. Monte duas combinações lineares de f e g que sejam ortogonais no intervalo $(-1, 1)$.

5) a) Verifique que os autovalores do operador hermitiano $\hat{Q} = id/d\phi$ são reais. Demonstre que as autofunções, para auto-valores distintos, são ortogonais.

- b) Faça o mesmo com o operador do problema 3.

6) Considere um espaço vetorial tridimensional gerado por uma base ortonormal $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$. Os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são dados por:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle), \quad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(i|1\rangle + 2|3\rangle).$$

- a) Monte os “bras” $\langle\alpha|$ e $\langle\beta|$ correspondentes.

b) Mostre que $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = 1$.

c) Calcule $\langle \alpha | \beta \rangle$ e $\langle \beta | \alpha \rangle$ e mostre que $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$

d) Calcule os nove elementos de matriz do operador $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ nos termos dessa base. Esse operador é hermitiano?

7) O Hamiltoniano para determinado sistema de dois níveis é:

$$\hat{H} = \epsilon(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

em que $|1\rangle, |2\rangle$ é a base ortonormal e ϵ é um número real com dimensão de energia. Qual é a matriz que representa $\hat{H}$ nessa base? Encontre os autovalores e autovetores de $\hat{H}$ nessa base.

8) Um operador anti-hermitiano é igual a menos o seu hermitiano conjugado: $\hat{Q} = -\hat{Q}^\dagger$.

a) Demonstre que o valor esperado de um operador anti-hermitiano é imaginário.

b) Demonstre que o comutador de dois operadores hermitianos é anti-hermitiano. O que é o comutador de dois operadores anti-hermitianos?

9) Considere um espaço de dimensão dois, e sejam $\hat{A}, \hat{B}$ dois operadores hermitianos nesse espaço. Se os autovalores e autovetores desses operadores são:

$$\hat{A}|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle, \quad \hat{B}|\phi_i\rangle = b_i|\phi_i\rangle, \quad i = 1, 2.$$

Na base de $\hat{B}$ temos: $|\psi_1\rangle = (3|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle)/5$, $|\psi_2\rangle = (4|\phi_1\rangle - 3|\phi_2\rangle)/5$.

a) Se numa medida de $\hat{A}$ se obtém a_1 , em que estado o sistema se encontra logo após a medida?

b) Se imediatamente após a medida de $\hat{A}$ se mede $\hat{B}$, quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?

c) Se imediatamente após a medida de $\hat{B}$ se mede novamente $\hat{A}$, qual a probabilidade de se medir a_1 ?

10) Mostre que se $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ têm um conjunto completo de auto-funções comuns, então $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$.

11) Mostre que

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p \rangle|.$$

O que essa relação nos diz para estados estacionários?

12) Use a relação :

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \rangle$$

nos seguintes casos especiais: a) $\hat{Q} = 1$; b) $\hat{Q} = \hat{H}$; c) $\hat{Q} = \hat{x}$; d) $\hat{Q} = \hat{p}$; e) $\hat{Q} = \hat{x}\hat{p}$. Comente o resultado em cada caso tentando relacioná-lo com alguma lei de conservação. No caso do item d) o cálculo fornece:

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle,$$

que é o **Teorema de Ehrenfest**.

No caso do item e) o cálculo fornece:

$$\frac{d}{dt}\langle xp \rangle = 2\langle T \rangle - \langle x \frac{\partial V}{\partial x} \rangle,$$

em que T é a energia cinética ($H = T + V$). Em um estado estacionário o lado esquerdo é zero (por quê?) e obtem-se

$$2\langle T \rangle = \langle x \frac{\partial V}{\partial x} \rangle,$$

que é conhecido como **Teorema do virial**. Mostre que no caso particular dos estados estacionários do oscilador harmônico tem-se $\langle T \rangle = \langle V \rangle$.

13) Teste o princípio de incerteza “energia-tempo para o observável x ”:

$$\sigma_H \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle x \rangle}{dt} \right|,$$

calculando σ_x , σ_H e $d\langle x \rangle/dt$ diretamente para a função de onda:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar} \right),$$

onde $\psi_n(x)$ e E_n são as autofunções e autovalores do poço quadrado infinito para $n = 1$ e 2 .

14) O Hamiltoniano e o operador $\hat{A}$, para um determinado sistema de três níveis, são representados pelas seguintes matrizes

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde ω e λ são números reais positivos.

- Esses operadores são compatíveis?
- A é observável?
- Quais são os autovalores e autovetores normalizados de H e A ?
- Se numa medida de H se obtém $E = \hbar\omega$, em que estado o sistema se encontra logo após a medida?
- Se imediatamente após a medida de H se mede A , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?
- Se numa medida de A se mede 2λ e se imediatamente após essa medida se mede novamente H , quais valores podem ser obtidos e quais as probabilidades?
- Usando o estado

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcule σ_E e σ_A e verifique que o princípio de incerteza generalizado

$$\sigma_E \sigma_A \geq \frac{1}{2} |\langle [H, A] \rangle|$$

é válido.

15) O estado fundamental do poço quadrado infinito é uma autofunção do operador momento? Se sim, qual o seu momento? Se não, explique porque temos E_1 fixo sem ter p definido, já que para $V(x) = 0$ temos $E = p^2/2m$?

16) a) Calcule a função de onda no espaço dos momentos:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

para uma partícula no estado fundamental do oscilador harmônico.

b) Mostre que a probabilidade de encontrar a partícula com momentos fora do intervalo clássico: $|p| > \sqrt{m\omega\hbar}$, é:

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-z^2} dz.$$

17) Mostre que

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p) dp$$

onde $\phi(p)$ é a função de onda no espaço dos momentos. A interpretação do resultado acima é de que no espaço dos momentos o operador posição é dado por

$$\hat{X} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

18) Usando o resultado do exercício 16 a) para a função de onda no espaço dos momentos para o estado fundamental do oscilador harmônico

$$\phi(p) = \frac{1}{(m\pi\hbar\omega)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}}$$

calcule $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ usando o fato de que no espaço dos momentos

$$\langle p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi^*(p) p^n \phi(p).$$

Compare seu resultado com o obtido no exercício 4 da lista 3.