

**Universidade de São Paulo  
Instituto de Física**

# **FÍSICA MODERNA I**

---

## **AULA 09**

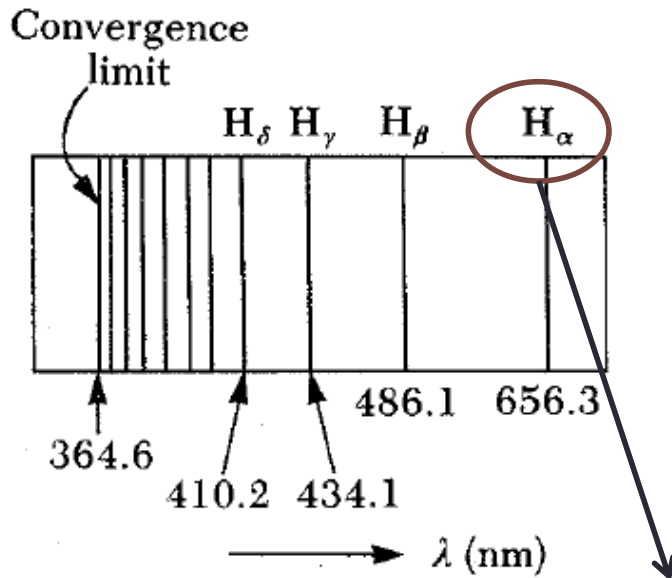
**Profa. Márcia de Almeida Rizzutto  
Pelletron – sala 220  
rizzutto@if.usp.br**

**2o. Semestre de 2018  
Monitor: Felipe Prado**

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=64495>

# Espectro Hidrogênio

- Espectro de emissão do átomo de Hidrogênio (átomo + simples) possui linhas discretas na **região visível e ultravioleta**:



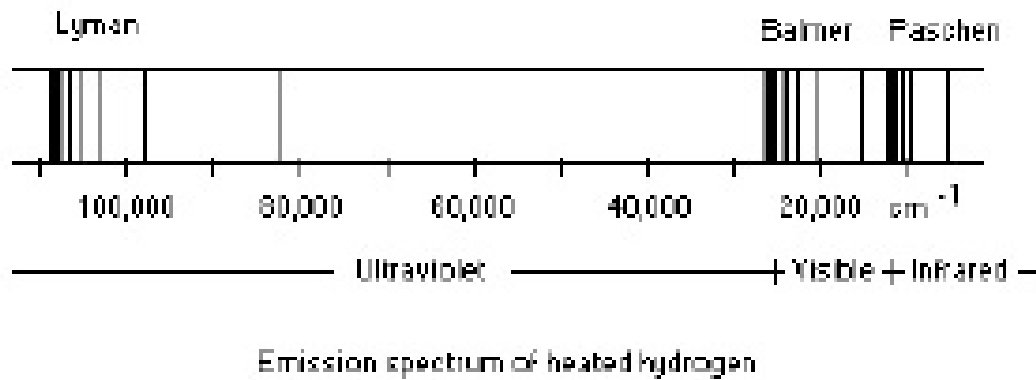
1885: J. Balmer descobriu que as linhas do espectro de hidrogênio podiam ser calculadas através de fórmula empírica:

$$\lambda_m = 3646 \frac{m^2}{m^2 - 4}, m = 3, 4, 5$$

Corresponde a  $m=3$

# Espectro Hidrogênio

- Balmer previu que uma expressão mais geral que pudesse explicar as outras séries:



- 1890 Rydberg finalmente encontra uma formulação mais geral para as séries observadas:

$$K = \frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), m = 1, 2, 3, \dots, n > m$$

$$R_H = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

# Espectro Hidrogênio

$$R_H = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Constante de Rydberg para o H

$$K = \frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), m = 1, 2, 3, \dots, n > m$$

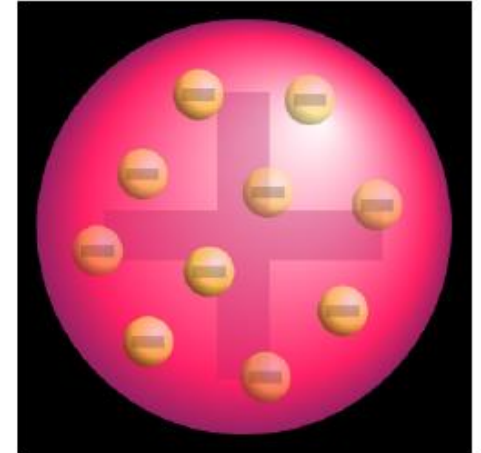
Nome	Faixa de comprimentos de onda	Fórmulas	
Lyman	Ultravioleta	$\kappa = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, 4, \dots$
Balmer	Ultravioleta próximo e visível	$\kappa = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, 5, \dots$
Paschen	Infravermelho	$\kappa = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, 6, \dots$
Brackett	Infravermelho	$\kappa = R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 5, 6, 7, \dots$
Pfund	Infravermelho	$\kappa = R_H \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 6, 7, 8, \dots$

# Modelo atômico

## 1º Proposta:

Thomson em 1904: esfera de carga positiva embebida por elétrons – carga total nula

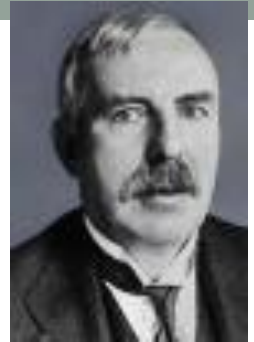
MODELO CHAMADO DE “PUDIM DE PASSAS”



## Problema:

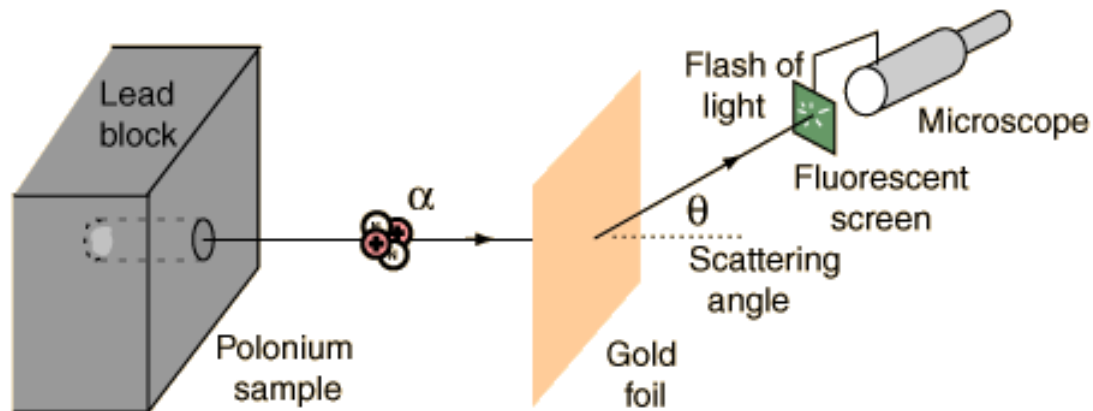
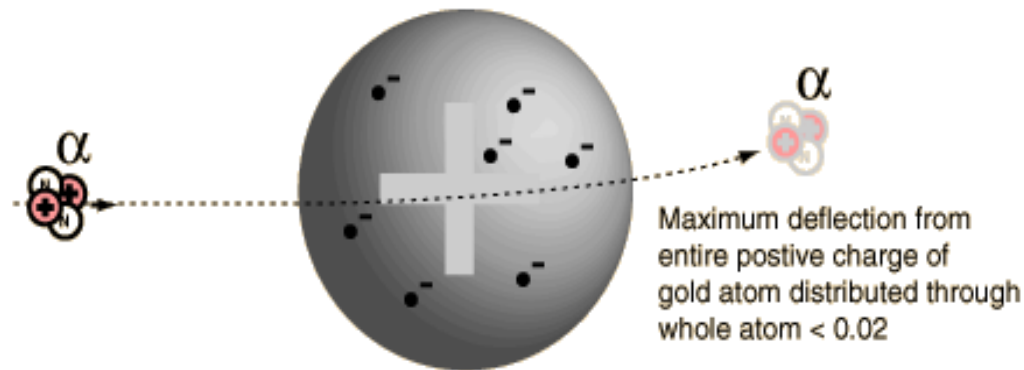
- Forças eletrostáticas não são suficientes para manter o sistema em equilíbrio
  - Cargas deveria, ter movimento (acelerado) já que se mantinham dentro do átomo
  - Cargas (aceleradas) em movimento – irradiar energia continuamente
- ↓ Não observado
- Neste modelo, quando o átomo era aquecido, os elétrons poderiam vibrar em torno de sua posição de equilíbrio produzindo radiação eletromagnética - no entanto, não consegui calcular o espectro de luz observado

# Estrutura do átomo



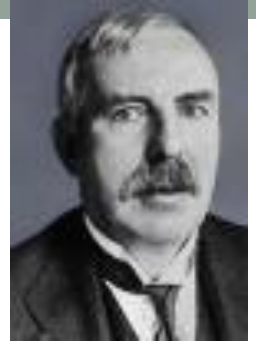
- As primeiras experiências de espalhamento

Modelo de Thomson: previa deflexão pequena das partículas  $\alpha$

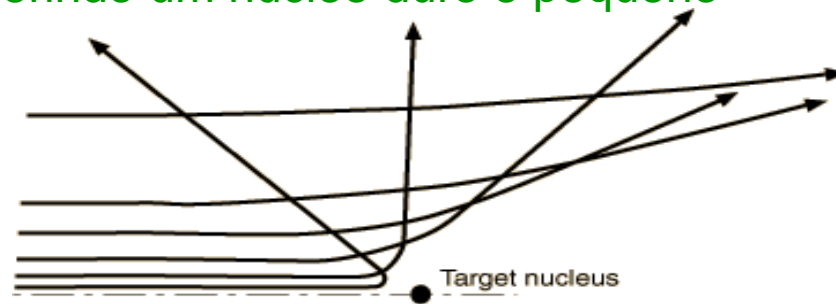


## Estrutura do átomo

- As primeiras experiências que determinaram a estrutura do átomo foram as de espalhamento e Rutherford em 1911 propõe um novo modelo



Rutherford observou grandes deflexões, sugerindo um núcleo duro e pequeno

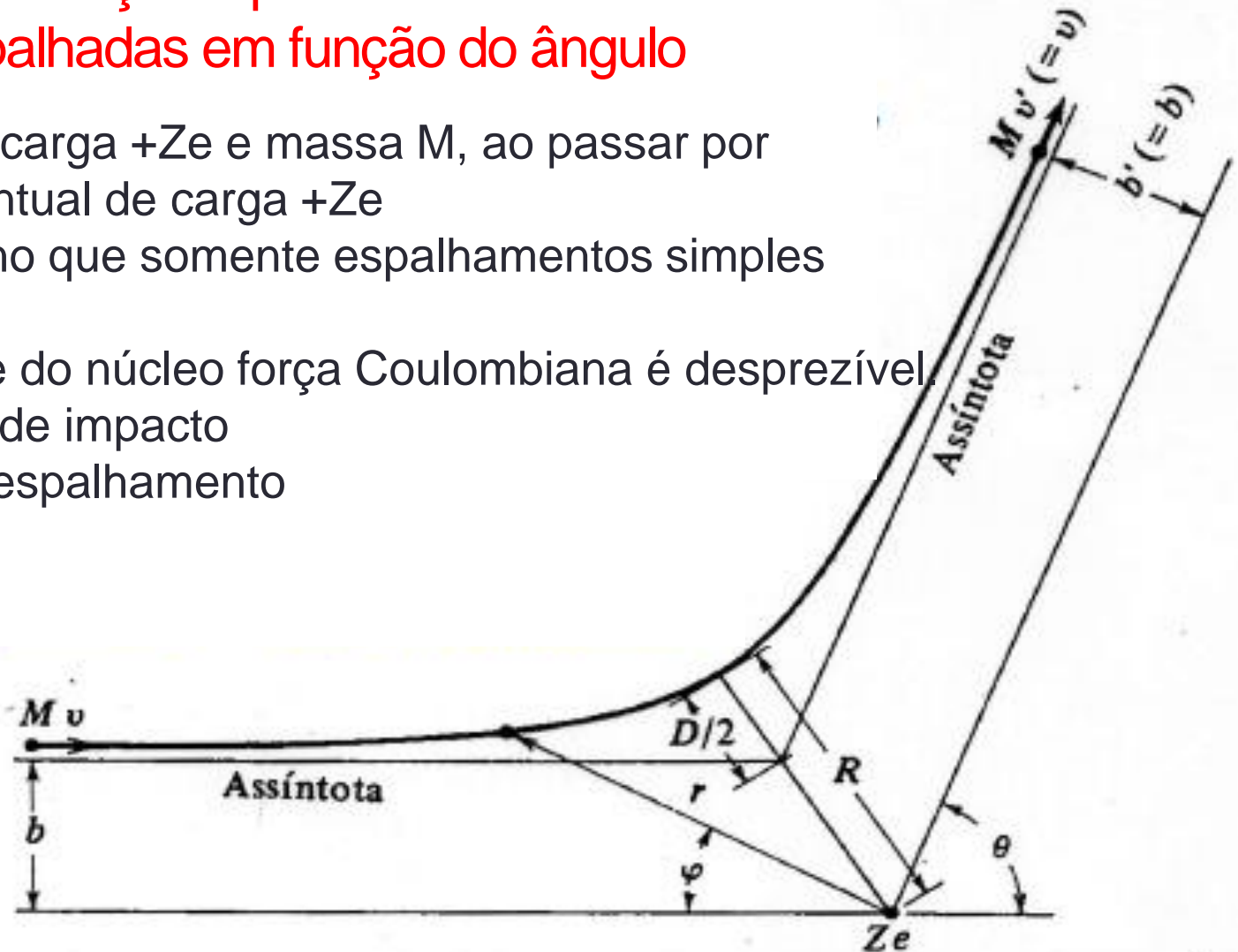


- Ernest Rutherford: experimento com um feixe de partículas  $\alpha$  descobriu a **estrutura nuclear** do átomo. Primeiro experimento de colisão de partículas subatômicas.

# ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

Melhor caracterização é preciso calcular o número de partículas espalhadas em função do ângulo

- Partícula  $\alpha$  de carga  $+Ze$  e massa  $M$ , ao passar por um núcleo pontual de carga  $+Ze$
- O alvo é tão fino que somente espalhamentos simples ocorrem
- Partícula longe do núcleo força Coulombiana é desprezível.
- $b$  – parâmetro de impacto
- $\theta$  – ângulo de espalhamento





- O número de partículas  $\alpha$  espalhadas em um ângulo sólido  $d\Omega$  em torno de um ângulo de espalhamento  $\theta$

$$dN = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{Int}{\sin^4 \theta / 2} d\Omega$$

Pontos importantes:

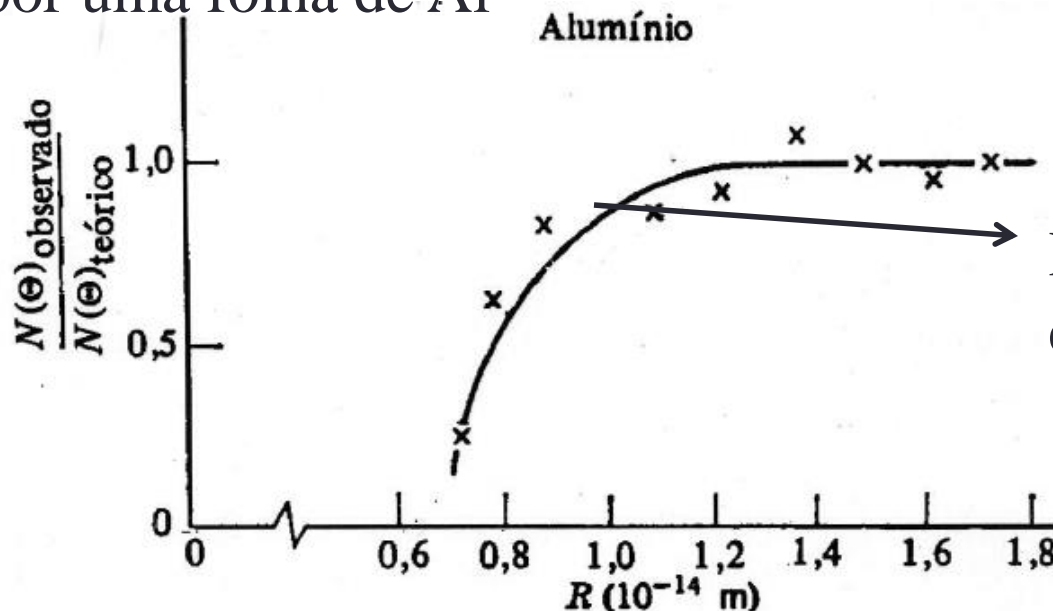
- O espalhamento é proporcional a  $Z_1^2$  e  $Z_2^2$
- O termo  $Mv^2$  é a energia cinética da partícula incidente, e o espalhamento é inversamente proporcional a energia cinética desta partícula
- O espalhamento é inversamente proporcional a 4 potencia de  $\sin(\theta/2)$
- O espalhamento é proporcional a espessura da folha de metal  $n$

$$dN \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot I \cdot n \cdot t \cdot d\Omega \quad \begin{array}{l} \text{Secção de choque de} \\ \text{Rutherford} \end{array}$$

## Secção de choque diferencial de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

Fornece o número de partículas espalhadas em um dado elemento de ângulo sólido  $d\Omega$ . Dados obtidos pelo grupo de Rutherford para o espalhamento de partículas  $\alpha$  de várias energias a um ângulo fixo grande por uma folha de Al



Raio do núcleo de Al  
é aproximadamente  
 $10^{-14}\text{m} = 10\text{F}$

## Modelo de Rutherford

De acordo com o modelo de Rutherford o número de partículas espalhadas  $\alpha$  por núcleo observadas na tela de um cintilômetro de área  $A$  será a uma distância  $r$  da folha espalhadora:

$$\Delta N = \text{Int} \left( \frac{A}{r^2} \right) \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{\text{sen}^4 \theta / 2}$$

Intensidade do feixe  $\alpha$

é o número de núcleos por unidade de área (átomos/cm<sup>2</sup>)

partículas  $\alpha$

Partículas espalhadoras

Energia cinética das partículas

Fator devido a área do  $\alpha$  antes do espalhamento  
cintilômetro e a distância  
deste da folha espalhadora

# Exercício: Espalhamento de partículas $\alpha$

- Partículas  $\alpha$  são produzidas pela desintegração do  $^{226}\text{Ra}$  e 450 partículas por minuto são produzidas em um cintilômetro para um ângulo  $\theta = 45^\circ$ . Se as condições experimentais forem mantidas e o detector for deslocado de modo a observar as partículas no ângulo de  $90^\circ$ , qual será o número de partículas observadas por minuto?

$$\Delta N = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} \left( \frac{A}{r^2} \right)$$

$$\Delta N = C \frac{1}{\text{sen}^4 \theta / 2}$$

Quando deslocamos o detector para  $90^\circ$ ,

$$\Delta N = C \frac{1}{\text{sen}^4 90 / 2}$$

$$450 = C \frac{1}{\text{sen}^4 45 / 2}$$

$$\Delta N = 450 \frac{\text{sen}^4 45 / 2}{\text{sen}^4 90 / 2} = 450 \frac{0.021}{0.25}$$

$$C = 450 * \text{sen}^4 (45 / 2)$$

$$\Delta N = 37.8 \approx 38 \text{particulas/ min}$$

# Exercício: Espalhamento de partículas $\alpha$

- Um feixe de partículas  $\alpha$  com  $E_k = 6,0\text{MeV}$  incide em uma folha de prata com  $1,0\mu\text{m}$  de espessura. A corrente do feixe é de  $1,0\text{nA}$ . Quantas partículas  $\alpha$  serão contadas por um pequeno cintilômetro com  $5\text{mm}^2$  de área situado a  $2,0\text{cm}$  da folha com um ângulo de  $75^\circ$ ? (dados: Ag:  $Z=47$ ,  $\rho=10,5\text{g/cm}^3$ ,  $M=108\text{g/mol}$ )

$$\Delta N = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} \left( \frac{A}{r^2} \right)$$

1) Intensidade do feixe de  $\alpha$

$$I = \frac{i}{q} = \frac{1\text{nA}}{2e} = \frac{1 \times 10^{-9} (\text{C/s})}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{C}}$$

2) Número de núcleos (átomos por unidade de volume)

$$I = 0,312 \times 10^{10} = 3,12 \times 10^9 \frac{\text{alfas}}{\text{s}}$$

$$n = \frac{\rho (\text{g/cm}^3) \cdot N_A (\text{átomos/mol})}{M (\text{g/mol})}$$

$$n = \frac{10,5 (\text{g/cm}^3) \cdot 6,02 \times 10^{23} (\text{átomos/mol})}{108 (\text{g/mol})}$$

$$n = \frac{\rho N_A \text{ átomos}}{M \text{ cm}^3}$$

$$n = 5,85 \times 10^{22} \frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3} = 5,85 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3}$$

## Exercício: Espalhamento de partículas $\alpha$

- Um feixe de partículas  $\alpha$  com  $E_k = 6,0\text{MeV}$  incide em uma folha de prata com  $1,0\mu\text{m}$  de espessura. A corrente do feixe é de  $1,0\text{nA}$ . Quantas partículas  $\alpha$  serão contadas por um pequeno cintilômetro com  $5\text{mm}^2$  de área situado a  $2,0\text{cm}$  da folha com um ângulo de  $75^\circ$ ? (dados: Ag:  $Z=47$ ,  $\rho=10,5\text{g/cm}^3$ ,  $M=108\text{g/mol}$ )

$$\Delta N = \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} * \left( \frac{A}{r^2} \right) * \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \right)^2 \left( \frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2$$

3) Correção área do cintilômetro

$$\frac{A}{r^2} = \frac{5\text{mm}^2}{(2\text{cm})^2} = \frac{5 \times 10^{-6} \text{m}^2}{(2 \times 10^{-2})^2 \text{m}^2}$$

$$\Delta N = \frac{3,12 \times 10^9 \times 5,85 \times 10^{28} \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{0,137 \times (2 \times 10^{-2})^2} \times \left( \frac{9 \times 10^9 \times 47 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{2 \times 6 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}} \right)^2$$

$$\Delta N = \frac{91,26 \times 10^{25}}{0,137 \times 4 \times 10^{-4}} \times (56,4)^2 \times (10^{-16})^2$$

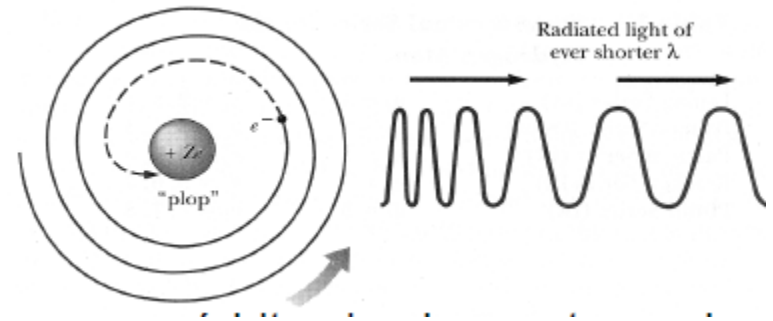
$$\Delta N = 529 \times 10^3 \times 10^{-3}$$

$$\Delta N = 529 \text{ alfas} / \text{s}$$

## E a estabilidade do átomo proposto por Rutherford ?

- ❑ Este modelo proposto por Rutherford tinha um sério problema conceitual:
  - ❑ Como elétrons que estavam orbitando ao redor do núcleo poderia manter o sistema estável?
  - ❑ Elétron acelerado devido ao movimento circular em torno do núcleo.
  - ❑ Da teoria eletromagnética clássica temos que uma carga acelerada irradia energia continuamente (radiação eletromagnética).
  - ❑ Energia do sistema deve decrescer.
  - ❑ R decresce – órbitas irão diminuir o sistema deveria colapsar – elétron cair no núcleo

$$\Delta t \sim 10^{-12} \text{ s}$$



- ❑ Como resolvemos este problema?
- ❑ Além do mais havia a emissão de comprimentos de luz discretos por alguns gases, que não havia ainda sido explicado

# O Modelo de Bohr

- ❑ Em 1913, Niels Bohr propõe um modelo baseado nas ideias de Rutherford – artigo “On the constitution of atoms and molecules”:
  - ❑ Considerou que o elétron se move em torno do núcleo (muito + massivo) e com carga positiva

## POSTULADOS:

- ❑ O elétron em um átomo se move em uma órbita circular em torno do núcleo sob a influência da atração Coulombiana entre o elétron e o núcleo, obedecendo as leis da mecânica clássica.
- ❑ Em vez de infinitas orbitas que seriam possíveis segundo a mecânica clássica, o elétron só pode se mover em certas órbitas na qual seu momento angular orbital  $L$  é um múltiplo inteiro de  $\hbar$  ( $h/2\pi$ )

$$L=n\hbar \quad , \quad n=1,2,3....$$



# O Modelo de Bohr

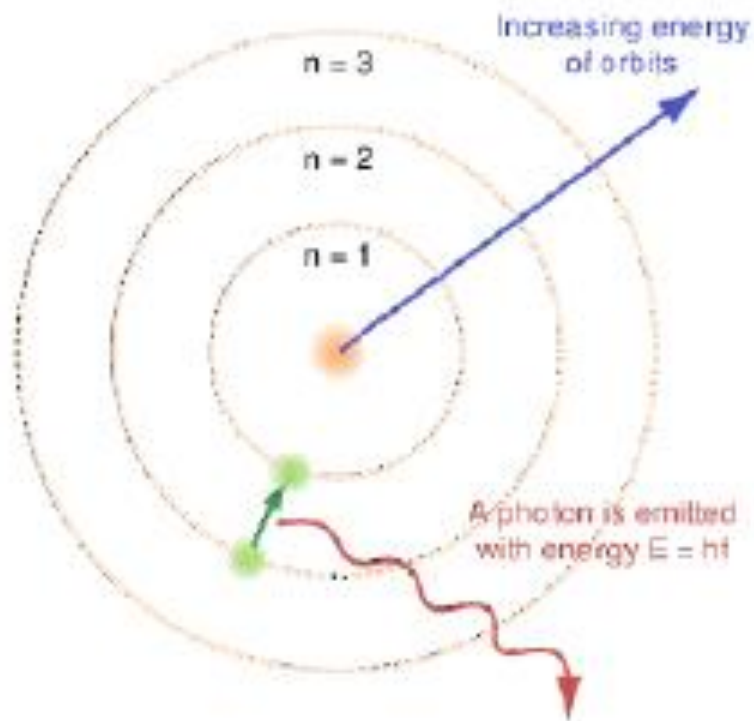
## POSTULADOS:

- ❑ Apesar dos elétrons estarem acelerados, um elétron que se move em uma destas órbitas possíveis não emite radiação eletromagnética. Portanto a energia total  $E$  permanece constante. (não emissão contraria a eletromagnetismo clássico).
- ❑ É emitida radiação eletromagnética se um elétron se move inicialmente sobre uma órbita de energia  $E_i$  e depois muda seu movimento descontinuamente de forma a se mover em uma órbita  $E_f$ . A frequência da radiação emitida  $\nu$  é igual a:

$$h\nu = E_i - E_f$$

o elétron pode transitar de uma órbita permitida para outra “num salto” emitindo um fóton e conservando energia do sistema

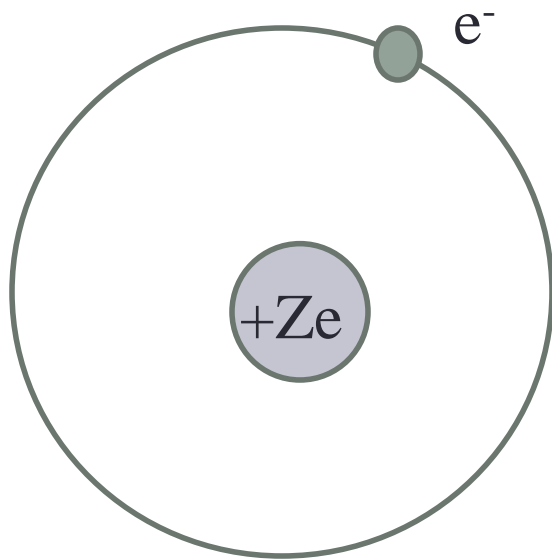
# O Modelo de Bohr



- Orbita circular
- $L = n\hbar$
- Energia total constante

- $$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$

# O Modelo de Bohr



- Átomo com núcleo de carga  $Ze$  e massa  $M$  e elétron com carga  $-e$  e massa  $m_e$
- $m_e$  desprezível em relação a  $M$
- Estabilidade mecânica
- Força centrípeta = Força Coulombiana

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Momento angular

$$\left. \begin{array}{l} L = n\hbar \\ L = mvr \end{array} \right\}$$

$$mvr = n\hbar$$

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

# O Modelo de Bohr – raio e velocidade

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ v &= \frac{n\hbar}{mr} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Ze^2 &= 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{mv^2}{r} = 4\pi\epsilon_0 r m v^2 \\ Ze^2 &= 4\pi\epsilon_0 r m \left( \frac{n\hbar}{mr} \right)^2 \\ Ze^2 &= 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{mr} \end{aligned}$$

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 m} \rightarrow a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad \text{Raio de Bohr} = 0,529 \text{ \AA}$$

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{n\hbar}{m} \frac{Ze^2 m}{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$$

H=1, Z=1, n=1  
 $r_1 = 0,05 \text{ nm}$   
 $v_1 \sim 2,2 \times 10^6 \text{ m/s}$

Raio atômico é quantizado

# O Modelo de Bohr – Energia

- A energia de um elétron atômico se movendo em uma das órbitas possíveis
- A energia cinética do sistema é devido ao elétron
- $K = \frac{1}{2} mv^2$
- O núcleo é massivo comparado com o elétron ( $m_{\text{próton}} = 1836m_e$ ) e o núcleo pode ser considerado em repouso.

- A energia potencial  $V$  é 
$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- A energia mecânica total: 
$$E = K + V = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Temos que 
$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad E = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Força centrípeta = Força Coulombiana

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

# O Modelo de Bohr – Energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para o H

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4 m}{\hbar^2}$$

$$E_0 = -13,6\text{eV}$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 a_0}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{Z^2 e^4 m}{\hbar^2 n^2}$$

$$E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

Energia  
quantizada

O estado de energia mais baixo:

$$n=1 \quad E_1 = E_0$$

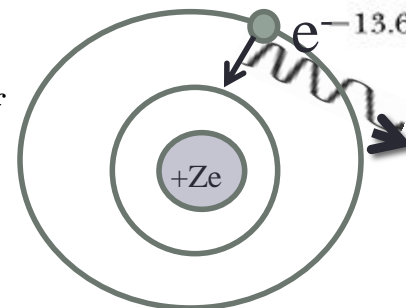
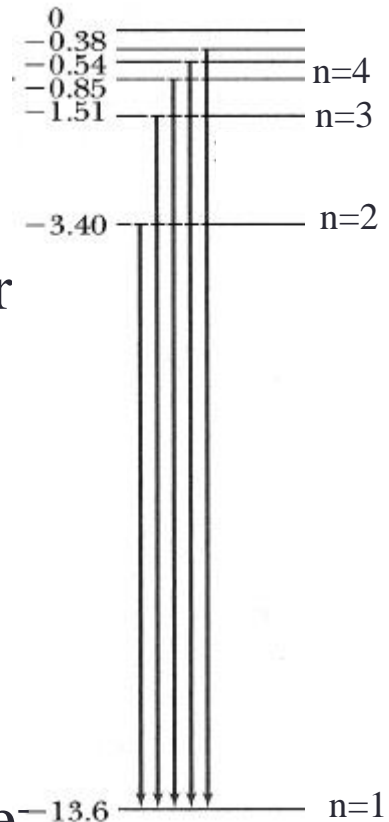
menor raio

# Postulados do Modelo de Bohr

- A quantização do momento angular orbital do elétron implica na quantização da energia
- $n=1$  estado fundamental – menor energia
- Hidrogênio
- Níveis discretos de energia
- Os elétrons se movem em certas órbitas sem irradiar energia
- átomo só pode existir em “estados estacionários” com energias quantizadas,  $E_n$ , definidas
- Átomos irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro.
- A frequência da radiação emitida esta relacionadas às energias das órbitas:

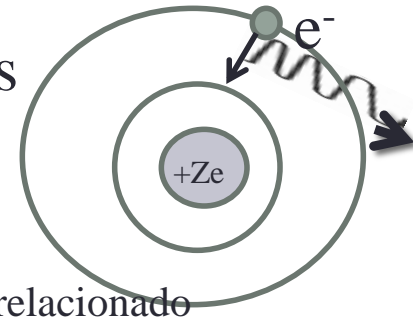
$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

$$h\nu = E_{ni} - E_{nf}$$



# Modelo de Bohr

- A frequência da radiação emitida está relacionada às energias das órbitas:



$$h\nu = E_{n_i} - E_{n_f} \quad E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

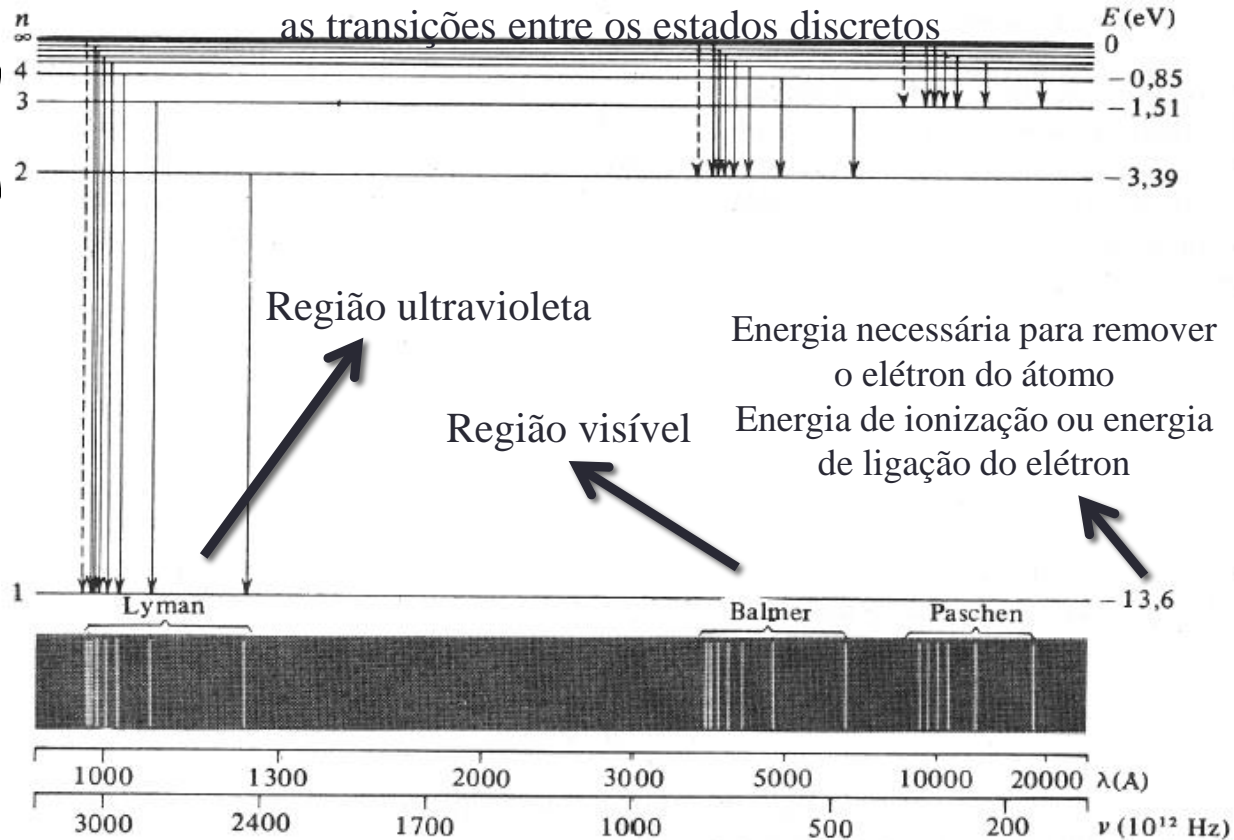
Para o átomo de H: espectro está relacionado

$$h\nu = -E_0 \frac{Z^2}{n_i^2} - \left( -E_0 \frac{Z^2}{n_f^2} \right)$$

$$\nu = \frac{E_0 Z^2}{h} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

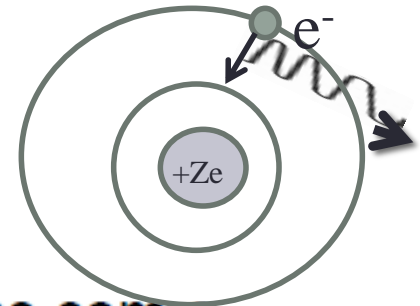
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0 Z^2}{hc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Valor teórico obtido por Bohr para a constante de Rydberg  
Calculou  $R = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$





# Modelo de Bohr



1.  $n = 1 \Rightarrow$  estado fundamental (menor energia)
2. Excitação  $\Rightarrow$  transições para  $n$  maior ( $n > 1$ )
3. Volta para o estado fundamental: emissão de fótons com a diferença de energia entre os estados. Caso particular do H:  
 $Z = 1$  e  $n_f = 2$  ( $n_i > n_f \Rightarrow$  desexcitação)

$$\kappa = R_\infty \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_\infty \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R_n = \frac{E_0}{hc} = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3}$$

Espectro de Balmer, se  $R_H = R_\infty$ . Bohr obteve valor bastante próximo.

Correção para massa nuclear finita  $\Rightarrow$  massa reduzida no lugar da massa do  $e^-$ .

$$m = m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

e

$$M = m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

Na suposição de Bohr o núcleo estava imóvel (significa que sua massa era considerada infinita)