PNV3324: Fundamentos de Controle em Engenharia

NOTAS DE AULA

Prof. Helio Mitio Morishita

6 ESTABILIDADE

6.1 Introdução

Uma das características que, necessariamente, deve ser analisada durante o projeto do controlador é a estabilidade do sistema em malha fechada em torno de um ponto de equilíbrio. Sem rigor, um sistema pode ser dito estável se a sua resposta a qualquer excitação “razoável” não sai do controle, isto é, não vai ao infinito. Uma definição precisa e única de estabilidade é difícil pois, em alguns casos, um ponto de equilíbrio do sistema pode ser estável e em outros não. Por exemplo, se um motor elétrico estiver acionando uma bomba com rotação constante, o sistema é estável. No entanto, se o mesmo motor estiver acionando, por exemplo, uma antena, e aumentar a sua posição angular continuamente, o sistema é considerado instável.

Coexistem na literatura duas abordagens para se definir a estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema:

a) Para sistemas não forçados.
Neste caso analisa-se a resposta do sistema deslocando-o da sua posição de equilíbrio. Se a resposta do sistema estiver dentro de uma determinada faixa em torno do ponto de equilíbrio é dito que o sistema é estável. Se a resposta do sistema se afastar indefinidamente o ponto de equilíbrio é dito instável. Dentro deste conceito pode-se considerar, por exemplo, um pêndulo que possa girar em 360^0 no plano vertical com a base móvel. Admita que o sistema tem um certo amortecimento. Não é difícil perceber que este sistema tem dois pontos de equilíbrio que são os ângulos iguais a 0^0 e 180^0. Também é intuitivo que no caso do equilíbrio de 180^0, qualquer perturbação em torno deste ponto fará que o pêndulo não retorne à sua posição de equilíbrio. Este ponto de equilíbrio é dito instável. Já para a posição de equilíbrio 0^0 havendo perturbação, o sistema volta ao ponto de equilíbrio. Este ponto é dito estável.

b) Para sistema forçados
Esta definição é baseada na capacidade do sistema de produzir uma saída limitada para uma entrada limitada. Uma função de tempo $f(t)$ é limitada quando existe uma constante positiva *M* tal que $|f(t)| \leq M < \infty$ para todo *t*.

No caso de sistemas não lineares as duas abordagens podem levar a conclusões distintas. Mas no caso de sistemas lineares invariantes no tempo as duas abordagens são muitas vezes equivalentes. Neste curso será considerada a segunda abordagem com a seguinte definição de estabilidade:

Um sistema é estável se, e somente se, qualquer entrada limitada resultar em uma saída limitada.

A estabilidade do sistema neste segundo caso pode ser averiguada a partir da resposta do sistema obtida através da integral de convolução entre o sinal de entrada e a resposta do sistema a um impulso, isto é,

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

Se o sinal de entrada $x(t)$ é limitada tem-se

$$|y(t)| \le \int_0^t |x(\lambda)h(t-\lambda)|d\lambda \le M\int_0^t |h(t-\lambda)|d\lambda$$

Portanto, a estabilidade do sistema dependerá da resposta a um impulso do sistema. Esta resposta pode ser obtida a partir da expansão em séries de frações parciais da sua função de transferência, onde no denominador comparecem os pólos do sistema. Ao examinar estes pólos conclui-se que:

- Um sistema é *estável* se todos os pólos apresentarem parte real negativa.
- Um sistema é *instável* se apresentar ao menos um pólo com parte real positiva.
- Se houver pólos imaginários puros, porém não repetidos e nenhum pólo com parte real positiva então o sistema é *marginalmente estável*.(aqui se a entrada for uma senóide, que é limitada, com freqüência igual ao do pólo a saída será não limitada).
- Se houver pólos com partes reais nulas múltiplos então o sistema é sempre instável.

Obs. Referências adicionais para o estudo de estabilidade de sistemas:

Dorf, R. C. e Bishop, R. H. (1995) Modern Control System, Addison-Wesley Publishing Company,

Friedland, B. (1986), Control System Design - An Introduction to State-Space Methods, Dover Publications, Inc, Minesota, New York.

Schwarz R. J. e Friedland, B. (1972) Sistemas lineares, Ao Livro Técnico S. A. e Editôra da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro.

Exemplos:

a) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$

$s_1 = -a$

$Y(s) = \dfrac{1}{s+a}\dfrac{1}{s}$

$y(t) = 1 - e^{-at}$

Se raiz $s_1 = -a$ for positivo ($a < 0$) o sistema será instável.

b) $G(s) = \dfrac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Os pólos são $s_{1,2} = -a \pm \omega j$

$$Y(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \frac{1}{s}$$ (sinal de entrada limitado)

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{(s+a-\omega j)} + \frac{\alpha_2}{s+a+\omega j)} + \frac{\alpha_3}{s}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{2(aj+\omega)} \frac{1}{(s+a-\omega j)} - \frac{1}{2(-aj+\omega)} \frac{1}{s+a+\omega j)} + \frac{\omega}{a^2+\omega^2} \frac{1}{s}$$

$$y(t) = -\frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}\left(a \operatorname{sen} \omega t + \omega \cos \omega t\right) + \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

Portanto para $a > 0$ ($\operatorname{Re}(s_1) < 0$) o sistema é estável e instável em caso contrário.

c) $G(s) = \dfrac{a^2}{s^2 + a^2}$

Os pólos deste sistema são: $s_{1,2} = \pm aj$

$$Y(s) = \frac{a^2}{s^2+a^2} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$ (o sinal de entrada é uma senóide e portanto limitado)

$$y(t) = \frac{a\omega}{-a^2+\omega^2} \operatorname{sen} a\,t - \frac{a^2}{-a^2+\omega^2} \operatorname{sen} \omega t$$

Portanto, para $\omega \neq a$ o sinal de saída é limitado. Para $\omega = a$ tem-se:

$$Y(s) = \frac{a^3}{(s^2+a^2)^2}$$

$$y(t) = \frac{a}{2}(\frac{1}{a} \operatorname{sen} at - t \cos at)$$

Ou seja para $\omega = a$,embora o sinal de entrada seja limitado, o sinal de saída tende para infinito. O sistema é *marginalmente estável.*

d) $G(s) = \dfrac{a^4}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Os pólos do sistema são: $s_1 = s_2 = \omega j$; $s_3 = s_4 = -\omega j$

$$Y(s) = \frac{a^4}{(s^2+\omega^2)^2}\frac{1}{s}$$

$$y(t) = a^4[-\frac{1}{a^4}\cos(at) - \frac{1}{a^3}t\,sin(at) + \frac{1}{a^4}]$$

ou seja o sinal de saída não é limitado para $t \to \infty$

6.2 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Foi visto que a estabilidade de um sistema é determinada pela parte real dos pólos da função de transferência. No entanto, durante o projeto do sistema de controle, é desejável estudar a estabilidade do sistema em função de um determinado parâmetro de controle. Por exemplo, considere o controle de um sistema com função de transferência de malha aberta dada por $KG(s)G_{sen}(s)$. A sua função de transferência em malha fechada é portanto dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)G_{sen}(s)} \qquad 1$$

Normalmente os pólos (e, por conseguinte, a estabilidade) de $G(s)G_{sens}(s)$ podem ser obtidos facilmente, mas o mesmo não pode ser dito quanto às raízes de $1+KG(s)G_{sen}(s)=0$. Entretanto, para analisar a estabilidade, não é necessário determinar o valor dos pólos, mas sim saber se algum pólo apresenta parte real positiva. Esta análise pode ser efetuada, de modo simples, utilizando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, a partir dos coeficientes do polinômio da equação característica $1+KG(s)G_{sen}(s)=0$.

De um modo geral a equação característica pode ser escrita como:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots.. + a_{n-1}s + a_n = 0 \qquad 6.2$$

Admita que a equação 6.2 possua *p* pólos reais $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_p$ e *q* pares de pólos complexos $-\beta_1 \pm j\gamma_1, -\beta_2 \pm j\gamma_2, \ldots.., -\beta_q \pm j\gamma_q$. Neste caso $A(s)$ pode ser escrita como:

$$A(s) = a_0(s+\alpha_1)\ldots.(s+\alpha_p)(s^2+2\beta_1 s+\beta_1^2+\gamma_1^2)\ldots.(s^2+2\beta_q s+\beta_q^2+\gamma_q^2) \qquad 6.3$$

Para que o sistema seja *assintoticamente estável* é necessário que todos os valores de α e β sejam positivos. Um polinômio que têm todas as raízes com partes reais negativas é chamado de polinômio de Hurwitz. Expandindo a equação 6.3 e comparando-a com 6.2 conclui-se que a condição de que todos os α e β sejam positivos obriga que todos os coeficientes a_i sejam não nulos e que todos tenham o mesmo sinal. **Esta é a condição necessária para a estabilidade, mas não é suficiente**. Se o valor de um dos coeficientes a_i for negativo ou zero o sistema será instável. (Obs. Aqui é admitido que sistemas com um par de pólos imaginários puros são admitidos como instáveis)

Um critério mais elaborado que garante a estabilidade de sistemas lineares é a de Routh-Hurwitz. Este critério é baseado na construção da Tabela de Routh-Hurwitz que é constituída da seguinte maneira:

Considere um polinômio dado por:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n = 0 \; , \; a_n \neq 0$$

e a tabela de Routh-Hurwitz formado por:

linha					
1	s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
2	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
3	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
4	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
n-1	s^1	y_1	y_2		
n	s^0	z_1			

Onde

$$b_1 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de raízes da equação 6.2 com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna da tabela de Routh ($\left[a_0 \; a_1 \; b_1 \; c_1 \; \ldots y_1 \; z_1\right]^T$). Desta forma a condição necessária e suficiente para que todas as raízes do polinômio dado por 6.2 tenham parte real negativa é que não haja mudança do sinal da primeira coluna da tabela de Routh-Hurwitz.