

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

## **ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS**

***NOTAS DE AULAS***

***Capítulo III (Plasticidade unidimensional)***

*Sergio Persival Baroncini Proença*

Prof. Titular

São Carlos, setembro de 2018.

## 1. Considerações gerais sobre o comportamento elasto-plástico

Plasticidade e encruamento são fenômenos associados tipicamente à resposta de materiais metálicos, os quais podem ser identificados nos gráficos da relação tensão-deformação obtidos em ensaios experimentais de tração ou compressão uniaxial. Ambos os fenômenos se manifestam para além do regime elástico. A plasticidade se caracteriza pelo aparecimento de deformações irrecuperáveis, ou permanentes, enquanto que o encruamento fica evidenciado pelo ganho de resistência com o crescimento da deformação.

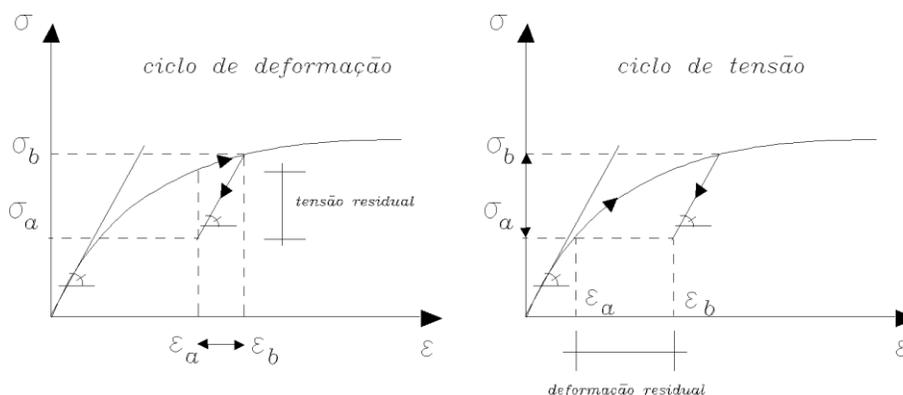
Estudos da microestrutura dos metais indicam que o mecanismo físico responsável pela plastificação é a movimentação irreversível de “discordâncias” (defeitos nas seqüências das ligações atômicas) sem que haja perda de coesão ou rupturas internas. Já o encruamento pode decorrer de processos físicos distintos. Um primeiro é o acúmulo de discordâncias ocasionado pela presença de uma barreira física, como uma inclusão ou um vazio, que por sua vez induz uma concentração de tensões. Em outro processo, o encruamento é induzido por incompatibilidades na acomodação das deformações dos grãos da rede cristalina, as quais se localizam nas superfícies que definem suas fronteiras comuns. Tal processo também proporciona concentrações de tensões, particularmente em pontos angulares dessas fronteiras.

Todavia, em escala macroscópica, na qual se pressupõe a validade da hipótese de continuidade do meio, não se observa o arranjo micro estrutural, ou mesmo a geometria da rede cristalina que o compõe. Além disso, na macro escala os processos físicos de plastificação e encruamento que ocorrem na micro-escala são levados em conta mediante medidas macroscópicas equivalentes inseridas nos modelos constitutivos ditos elastoplásticos com encruamento. Assim sendo, por coerência com a abordagem contínua, diz-se que a resposta constitutiva descrita possui representatividade puramente fenomenológica.

Uma consequência importante da modelagem contínua é que, criteriosamente, os modelos elasto-plásticos podem ser estendidos inclusive aos materiais não-metálicos, desde que esses materiais apresentem respostas macroscópicas evidenciadas experimentalmente com características tipicamente elasto-plásticas. É o caso, por exemplo, do concreto em compressão. De fato, fenomenologicamente o concreto comprimido pode apresentar tanto deformação residual quanto encruamento, apesar de estas respostas macroscópicas decorrerem de processos físicos que ocorrem na microescala de natureza bastante distinta daqueles dos metais; é o caso da microfissuração, por exemplo.

Conceitualmente, o comportamento fenomenológico elasto-plástico, incluindo plastificação e encruamento, fica evidenciado pelo aparecimento de deformações ou tensões residuais quando se operam ciclos de tensão ou deformação, respectivamente (Figura 1).

Chama-se a atenção que em qualquer dos ciclos, o descarregamento (de  $\sigma_b$  para  $\sigma_a$ ) se dá segundo uma reta com inclinação igual à da resposta elástica inicial.



**Figura 1** – Ciclos de deformação e de tensão

A característica de irreversibilidade das deformações permanentes pode ser contextualizada mecanicamente numa análise de balanço de energia envolvida no processo de deformação. Nesse balanço, a parcela de energia movimentada na formação da deformação plástica não fica acumulada no meio, mas sim liberada para o ambiente na forma de calor, portanto, irrecuperável.

Ainda do lado conceitual, o modelo mecânico aqui descrito desconsidera qualquer dependência da resposta constitutiva em relação à velocidade da deformação. Esta restrição implica que efeitos viscosos não são considerados e, portanto, a certo incremento de deformação corresponde, imediatamente, um incremento de tensão. Tal resposta impera nos processos de carregamento e solicitação ditos quase estáticos. Quando a sensibilidade do material à velocidade de deformação passar a ser um fenômeno importante a considerar, a descrição do processo evolutivo de plastificação pode ser modelado no âmbito da elasto-viscoplasticidade.

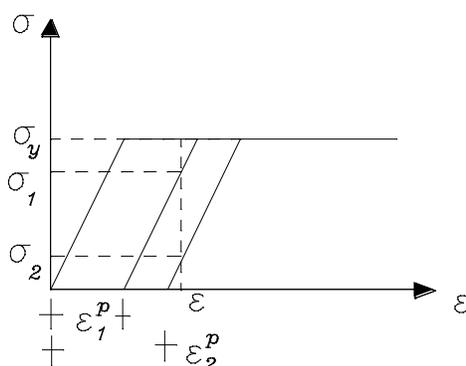
## 2. Relação constitutiva elasto-plástica unidimensional

A versão unidimensional do modelo matemático que descreve a relação constitutiva de um meio elasto-plástico é de formulação mais simples e

permite evidenciar aspectos conceituais importantes para a compreensão da modelagem bi e/ou tridimensional.

Enquanto nos modelos elásticos a relação tensão-deformação é biunívoca, no sentido que a cada nível de deformação ( $\varepsilon$ ) está sempre associado um único nível de tensão ( $\sigma$ ), valendo a recíproca, nos modelos elasto-plásticos é necessário conhecer a ‘história prévia’ da deformação plástica ( $\varepsilon^p$ ) para se determinar a intensidade de tensão correspondente a certa intensidade de deformação. Justifica-se esse importante aspecto no que segue.

Na Figura 2 apresenta-se, por simplificação, um modelo elasto-plástico perfeito, assim denominado por se caracterizar pela ausência de encruamento. Idealmente, uma vez atingida e mantida a sollicitação no nível limite de tensão  $\sigma_y$  o material pode escoar indefinidamente (um regime de resposta, a rigor, *visco-plástica*). Por esse motivo  $\sigma_y$  é denominada tensão de escoamento.



**Figura 2** – Possíveis níveis de tensão em correspondência a certa deformação dada

Ainda considerando-se a Figura 2, admita-se que inicialmente o material tenha sido sollicitado até a intensidade de tensão  $\sigma_y$  e mantido neste nível de sollicitação durante algum tempo; por consequência, caracteriza-se um regime de escoamento. Numa etapa seguinte, considerem-se duas possibilidades de descarregamento a partir de intensidades arbitrárias de deformação, ao final das quais correspondam deformações plásticas  $\varepsilon_1^p$  e  $\varepsilon_2^p$ .

Tendo-se em vista as possibilidades descritas de descarregamento, seja, agora, a questão da determinação da tensão correspondente a uma dada deformação  $\varepsilon$  (indicada na Figura 2). Em princípio, qualquer intensidade de tensão,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ou  $\sigma_y$ , poderia ser compatível com aquela deformação, o que caracterizaria uma multiplicidade de soluções. Entretanto, se for acrescentado o dado que o nível de deformação plástica decorrente da história prévia de

deformação é  $\varepsilon_1^p$ , então a unicidade é restabelecida, pois o nível de tensão correspondente somente poderá ser  $\sigma_1$ .

Justifica-se, dessa forma, a colocação anterior sobre a importância do conhecimento da ‘história prévia’ da deformação plástica.

Nota-se, por outro lado, que a diferença entre  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_1^p$  define a parcela de deformação elástica que poderia ser recuperada se houvesse descarregamento a partir de  $\sigma_1$ . Evidencia-se, assim, um aspecto fundamental: *no regime elasto-plástico a deformação total é sempre composta de uma parcela elástica e outra plástica.*

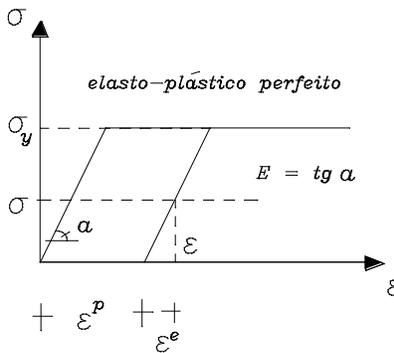
Ainda em caráter preliminar, pode-se adiantar que no material com encruamento, o regime elástico, inicialmente limitado pela tensão  $\sigma_y$ , varia. Como se verá mais adiante, a variação desse limite também é função da história prévia da deformação plástica.

### 1.1 Relação constitutiva para elasto-plasticidade perfeita

Tendo-se em vista os comentários anteriores e o diagrama tensão-deformação idealizado para este comportamento, mostrado na Figura 3, valem as relações:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \sigma &= E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)\end{aligned}\tag{1a,b}$$

Observa-se que em (1b) a tensão é determinada em função da deformação total e da parcela de deformação plástica (*trata-se da chamada formulação no espaço das deformações*).



**Figura 3** – Comportamento elasto-plástico perfeito

A presença da deformação plástica empresta à relação constitutiva um caráter não-linear, uma vez que ela decorre da história prévia de deformação e, portanto, não pode ser determinada exclusivamente com a configuração atual.

Em outras palavras, a deformação plástica total num certo processo de deformação será determinada mediante o acúmulo dos diferenciais de deformação plástica ao longo do processo, isto é:

$$\varepsilon^p = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon^p \quad (1 \text{ c})$$

Para melhor entender a não-linearidade intrínseca ao modelo elasto-plástico, considere-se, por exemplo, uma situação em que o material esteja solicitado por um nível de tensão correspondente ao patamar de escoamento (intensidade de tensão  $\sigma_y$  na Figura 3). Seguem duas possibilidades de resposta imediata, a depender do sinal da variação de deformação imposta. Tais possibilidades se denominam ‘*carregamento plástico*’ ou ‘*descarregamento elástico*’, se a elas corresponderem acréscimos imediatos, ou não, da deformação plástica, respectivamente. No primeiro caso o material continuará em processo de escoamento, com aumento da deformação plástica; no segundo o descarregamento virá acompanhado de recuperação elástica.

É importante que o modelo matemático inclua essas possibilidades de modo a registrar corretamente a história de deformação plástica. Nesse sentido, é necessário exprimir a relação constitutiva em termos de variações (*infinitesimais*) de tensão e deformação, forma que será adotada no que segue (adianta-se que para fins de implementação computacional será necessário introduzir uma estratégia de verificação do modelo em *passo finito*, isto é, com incrementos finitos de deformação, estratégia que será detalhada ainda neste capítulo).

Admitindo-se, então, continuidade para as funções que descrevem  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon^p$ , quando a resposta imediata implicar em  $d\varepsilon^p \neq 0$  as deformações irreversíveis passam a existir, se ainda não existiam, ou, se já existiam, sofrem alteração. Neste caso, diz-se que a resposta imediata produz deformações plásticas. Ainda como consequência da continuidade assumida, a relação tensão-deformação pode ser expressa em termos diferenciais por:

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (2)$$

Por outro lado, considerando-se o mesmo diagrama representativo da relação tensão-deformação, mostrado na Figura 3, e supondo que o material apresente resposta simétrica na compressão, verifica-se que a tensão em valor absoluto não pode ser maior que  $\sigma_y$  ( $\sigma_y > 0$ ). Portanto, os estados admissíveis de tensão (ou compatíveis com o modelo idealizado) devem sempre obedecer à seguinte condição:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (3)$$

Essa relação tem um papel importante no modelo matemático, pois estabelece um critério, denominado critério de plastificação, que serve para identificar a natureza dos regimes de resposta imediata, se elástica ou plástica.

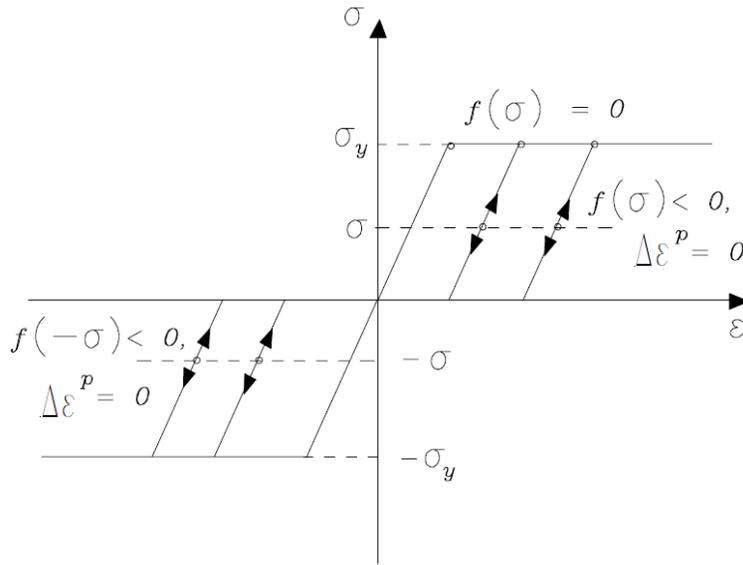
Como exemplo de funcionalidade do critério, se o nível atual de tensão for tal que:  $f(\sigma) < 0$  a resposta imediata será puramente elástica. Isto também pode ocorrer quando o estado atual de tensão corresponder a:  $f(\sigma) = 0$ . De fato, se o novo estado for tal que:  $f(\sigma + d\sigma) < 0$ , então, configura-se descarregamento e a resposta imediata não terá proporcionado alteração na deformação plástica acumulada até então, ou seja:  $d\varepsilon^p = 0$ . Portanto, em correspondência a  $d\sigma$  haverá um descarregamento elástico.

Como em ambos os casos exemplificados  $d\varepsilon^p = 0$ , a relação (2) assume uma forma particular que indica, claramente, que o incremento de deformação tem natureza puramente elástica, isto é:

$$d\sigma = E(d\varepsilon^e + d\varepsilon^p) = E d\varepsilon^e = E d\varepsilon \quad (4)$$

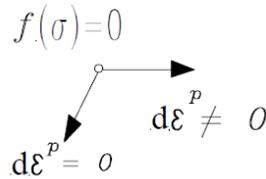
A Figura 4 ilustra outros estados de tensão cujas respostas imediatas têm correspondência com essa situação.

Na outra hipótese de funcionalidade do critério, considere-se um estado atual de tensão tal que:  $f(\sigma) = 0$ . Pode-se supor a possibilidade que o novo estado continue verificando o critério, isto é:  $f(\sigma + d\sigma) = 0$ . Trata-se, no modelo elasto-plástico perfeito, de se manter sobre o nível de tensão de escoamento. Segue que nessa hipótese a resposta imediata associada a uma variação na deformação total virá acompanhada de um acréscimo na deformação plástica acumulada.



**Figura 4** – Respostas imediatas sem variação da deformação plástica

Assim,  $f(\sigma) = 0$  se configura como condição necessária para que possa ocorrer variação da deformação plástica. A Figura 5 ilustra essa condição, pressupondo um ponto sobre o patamar de escoamento e as possibilidades de existência ou não de variação imediata para a deformação plástica.



**Figura 5** – Possibilidades de evolução da deformação plástica

Seja, então,  $d\lambda > 0$  o valor absoluto, ou medida do incremento de deformação plástica, se ela ocorrer. Levando-se em conta que a evolução da deformação plástica pode-se dar, ou não, tanto na tração quanto na compressão, segue que:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon^p &= d\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = \sigma_y (> 0) \\
 d\varepsilon^p &= -d\lambda \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -\sigma_y (< 0)
 \end{aligned}
 \tag{5a,b}$$

Observando-se que o sinal de  $d\varepsilon^p$  coincide com o de  $\sigma$ , pode-se introduzir o operador de sinal,  $sign(\cdot)$ , e reunir essas duas relações numa única. Assim, por definição:

$$sign(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (7)$$

e, portanto,

$$d\varepsilon^p = d\lambda sign(\sigma) \quad \text{se } f(\sigma) = 0 \quad \text{com } d\lambda \geq 0 \quad (6)$$

Obs.: no modelo elasto-plástico perfeito a condição  $f(\sigma) = 0$  é verificada em dois pontos:  $\sigma = \sigma_y$  e  $\sigma = -\sigma_y$ . Adianta-se que em situações mais complexas, 'estados de tensão' que verificam o critério de plastificação pertencem à uma região limite do espaço das tensões denominada 'superfície de plastificação'.

Do que foi visto, observa-se que  $d\lambda$  e  $f(\sigma) = 0$  verificam certas condições complementares em termos de sinal, isto é:  $d\lambda \geq 0$  e  $f(\sigma) \leq 0$ . Além disso, se  $f(\sigma) = 0$  então  $d\lambda \geq 0$  e se  $f(\sigma) < 0$  então  $d\lambda = 0$ . Essas possibilidades podem ser reunidas na relação  $d\lambda f(\sigma) = 0$ , denominada *condição de complementaridade*.

Considerando-se a condição de complementaridade, para qualquer estado de tensão admissível (que verifique  $f(\sigma) \leq 0$ ) a lei de evolução da deformação plástica pode ser expressa como:

$$d\varepsilon^p = d\lambda sign(\sigma) \quad (8)$$

Nota-se que o incremento de deformação plástica possui sinal!

Mas falta ainda uma condição para a existência efetiva de  $d\lambda$ . Seja, então, um nível atual de tensão tal que  $f(\sigma) = 0$ . Admitindo-se que no próximo incremento exista  $d\lambda > 0$ , então o novo nível de tensão também deverá verificar o critério de plastificação, isto é:  $f(\sigma + d\sigma) = 0$ . Na hipótese de continuidade da função  $f$ , pode-se proceder a uma linearização dela em torno do nível  $\sigma$  e escrever que:  $f(\sigma + d\sigma) = f(\sigma) + df$ . Assim sendo,  $d\lambda > 0$

implica em  $df = \left( \frac{df}{d\sigma} \right) d\sigma = 0$ .

De acordo com essa análise, partindo-se de um estado onde  $f(\sigma) = 0$  as situações de carregamento ou descarregamento se caracterizam, respectivamente, como:  $d\lambda > 0$  se  $df = 0$  e  $d\lambda = 0$  se  $df < 0$ . Resulta daí uma nova condição:  $d\lambda df = 0$ , denominada de *condição de consistência*. Observa-se que a condição de consistência implica em  $df = 0$  na hipótese de  $d\lambda > 0$ .

Finalmente, as relações que definem a forma incremental do modelo constitutivo elasto-plástico perfeito (sem encruamento) são:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \rightarrow \text{critério de plastificação}$$

$$d\varepsilon^p = d\lambda \text{sign}(\sigma) \rightarrow \text{lei de plastificação}$$

$$d\lambda f = 0 \quad \text{com} \quad d\lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad f \leq 0 \rightarrow \text{condição de complementaridade}$$

$$d\lambda df = 0 \quad \text{com} \quad df \leq 0 \rightarrow \text{condição de consistência}$$

## 1.2 Comportamento elasto-plástico com encruamento linear positivo

O encruamento se caracteriza pela alteração, em tamanho e/ou em posição, do intervalo elástico inicial de tensões sempre que houver evolução da deformação plástica.

Observa-se, de início, que no modelo constitutivo elasto-plástico com encruamento as seguintes relações incrementais permanecem válidas:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \tag{9}$$

Há mais de uma maneira de modelar o encruamento. O modelo de encruamento linear *isótropo* é ilustrado na Figura 6<sup>(\*)</sup>. Neste caso, a expansão do intervalo elástico inicial de tensão ( $[-\sigma_y, \sigma_y]$ ), indicado no eixo das tensões, se dá simetricamente em relação ao seu centro e ocorre sempre que o passo implicar em evolução da deformação plástica.

<sup>(\*)</sup>Esse modelo teria correspondência física com o processo de acúmulo de discordâncias.



Adotando-se a hipótese de encruamento por deformação ( $d\alpha = |d\varepsilon^p|$ ) e sendo  $|d\varepsilon^p| = d\lambda$ , tem-se que  $d\alpha = d\lambda$ . Tendo-se em vista as considerações anteriores, a expressão do critério de plastificação passa a ser escrita na forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0 \quad (11)$$

observando-se que  $\sigma_y > 0$  e  $k > 0$  são constantes do material e que  $\alpha \geq 0$ . Mais uma vez, nota-se que a parcela ( $k\alpha$ ) altera a dimensão do intervalo elástico inicial.

Por outro lado, no modelo elasto-plástico com encruamento isótropo valem também as mesmas condições anteriores de complementaridade e consistência. A condição de consistência, em particular, permite obter uma relação explícita para  $d\lambda$ . De fato, admitindo-se uma linearização da função de plastificação em torno de certo nível de tensão e considerando-se que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$  e que  $d\varepsilon^p = d\lambda \text{sign}(\sigma)$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha \\ &= \text{sign}(\sigma) E (d\varepsilon - d\varepsilon^p) - k d\alpha \\ &= \text{sign}(\sigma) E d\varepsilon - \text{sign}(\sigma) E d\lambda \text{sign}(\sigma) - k d\lambda \\ &= \text{sign}(\sigma) E d\varepsilon - d\lambda (E + k) \leq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Impondo-se  $df = 0$ , o que possibilita  $d\lambda > 0$ , resulta:

$$d\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma) E d\varepsilon}{(E + k)} \quad (13)$$

Nota-se da relação anterior que a condição  $d\lambda > 0$  exige que  $\text{sign}(\sigma) d\varepsilon > 0$ . Assim, sendo  $f = 0$ , num regime de tração existirá  $d\lambda > 0$  se  $d\varepsilon > 0$ , enquanto que num regime de compressão existirá  $d\lambda > 0$  se  $d\varepsilon < 0$ .

Com a (13), obtém-se por substituição:

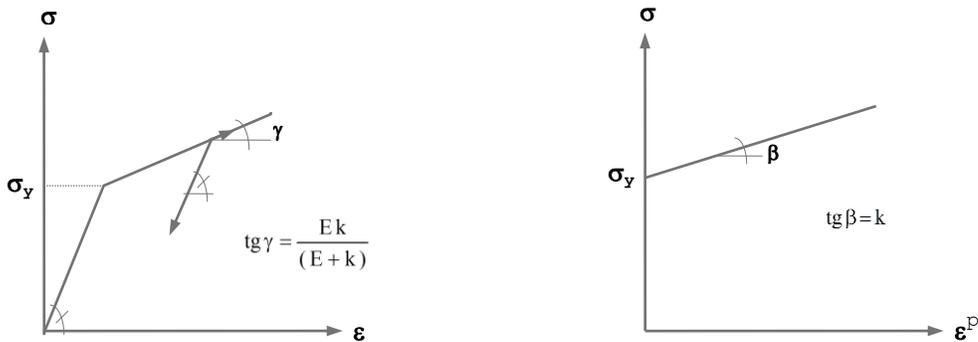
$$d\varepsilon^p = d\lambda \text{sign}(\sigma) = \frac{E d\varepsilon}{(E + k)} \quad (14)$$

$$d\sigma = E(d\varepsilon - \frac{E d\varepsilon}{(E+k)}) = \frac{Ek}{(E+k)} d\varepsilon \quad \text{se } d\lambda > 0 \quad (15)$$

onde  $\frac{Ek}{(E+k)}$  é denominado *módulo constitutivo elasto-plástico tangente*.

O desenvolvimento seguinte, ilustrado na Figura 7, permite dar uma interpretação para o módulo plástico de encruamento  $k$ :

Se  $d\lambda > 0$ :  $d\sigma = \frac{Ek}{(E+k)} d\varepsilon$  e  $d\varepsilon = \frac{(E+k)}{E} d\varepsilon^p$ ; então  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = k$ .



**Figura 7** – Parâmetro de encruamento linear isótropo

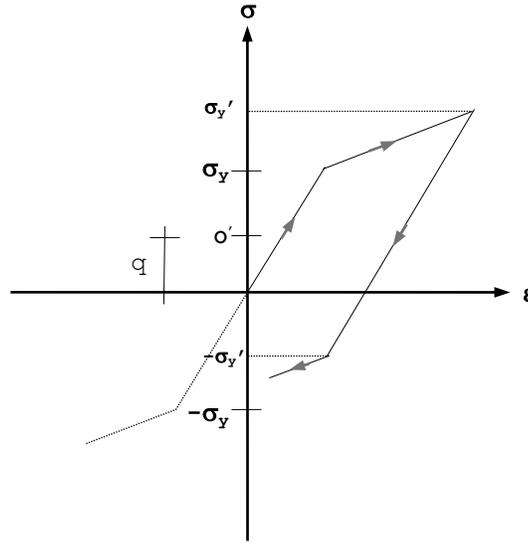
Outro modelo de encruamento é o *cinemático*<sup>(\*)</sup>. Neste caso, o intervalo elástico inicial não altera seu tamanho, porém muda de “posição” no eixo das tensões de acordo com a evolução do processo de plastificação. Postula-se, então, que o centro daquele intervalo se desloca em sentido governado pelo sinal da deformação plástica, de uma quantidade que também está relacionada com a deformação plástica. A Figura 8 ilustra esse modelo.

O deslocamento do centro do intervalo elástico fica identificado pela variável  $q$  e tem sua lei de evolução expressa por:

$$dq = H d\varepsilon^p \quad (16)$$

onde  $H$  é o *módulo de encruamento cinemático*.

<sup>(\*)</sup>Esse modelo tem correspondência física com o encruamento por incompatibilidades de deformações entre os contornos dos cristais.



**Figura 8** – Encruamento linear cinemático

Neste caso o critério de plastificação passa a ser dado por:

$$f(\sigma, q) = |\sigma - q| - \sigma_y \leq 0 \quad (17)$$

Por sua vez o incremento de deformação plástica passa a ser caracterizado pelas seguintes condições:

$$\left. \begin{array}{l} d\varepsilon^p = d\lambda \geq 0 \quad \text{se } \sigma - q = \sigma_y \ (>0) \\ d\varepsilon^p = -d\lambda \leq 0 \quad \text{se } \sigma - q = -\sigma_y \ (<0) \end{array} \right\} \therefore d\varepsilon^p = d\lambda \operatorname{sign}(\sigma - q) \quad (18)$$

se  $f(\sigma - q) = 0$  e com  $d\lambda \geq 0$ . Na última relação o operador de sinal introduzido apresenta a seguinte definição:

$$\operatorname{sign}(\sigma - q) = \begin{cases} +1 & \text{se } (\sigma - q) > 0 \\ -1 & \text{se } (\sigma - q) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Tendo-se em vista a relação para  $d\varepsilon^p$ , segue que:

$$dq = H d\varepsilon^p = d\lambda H \operatorname{sign}(\sigma - q) \quad (20)$$

É possível combinar os modelos de encruamento isótopo e cinemático num modelo misto. O critério de plastificação passa, nesse caso, a ser dado por:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0 \quad (21)$$

As outras relações que complementam o modelo misto são:

$$\begin{aligned} d\sigma &= E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \\ d\varepsilon^p &= d\lambda \operatorname{sign}(\sigma - q) \\ d\lambda f &= 0 \quad \text{com } d\lambda \geq 0 \text{ e } f \leq 0 \\ d\lambda df &= 0 \quad \text{com } df \leq 0 \\ dq &= d\lambda H \operatorname{sign}(\sigma - q) \\ d\alpha &= d\lambda \end{aligned} \quad (22)$$

Procedendo analogamente ao caso do encruamento isótopo, a condição de consistência permite obter uma relação para  $d\lambda$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha \quad (23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial |\sigma - q|} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial |\sigma - q|} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial q} \quad (24)$$

As derivadas dos módulos fornecem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial \sigma} &= \operatorname{sign}(\sigma - q); \\ \frac{\partial |\sigma - q|}{\partial q} &= \operatorname{sign}(q - \sigma). \end{aligned} \quad (25 \text{ a,b})$$

Observando-se ainda que:  $\operatorname{sign}(q - \sigma) = -\operatorname{sign}(\sigma - q)$ ,  $df$  passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} df &= \operatorname{sign}(\sigma - q)d\sigma - \operatorname{sign}(\sigma - q)dq - k d\alpha \\ &= \operatorname{sign}(\sigma - q) E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) - \operatorname{sign}(\sigma - q) d\lambda H \operatorname{sign}(\sigma - q) - k d\lambda \end{aligned}$$

$$= \text{sign}(\sigma - q) E d\varepsilon - d\lambda(E + H + k) \quad (26)$$

Na situação em que  $d f = 0$  obtém-se:

$$d\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma - q) E d\varepsilon}{(E + H + k)} \quad (27)$$

$$d\varepsilon^p = \frac{E d\varepsilon}{(E + H + k)} \quad (28)$$

Finalmente, a relação constitutiva em termos incrementais resulta:

$$\begin{aligned} d\sigma &= E d\varepsilon \quad \text{se} \quad d\lambda = 0 \\ d\sigma &= \frac{E(H + k)}{(E + H + k)} d\varepsilon \quad \text{se} \quad d\lambda > 0 \end{aligned} \quad (29)$$

## 2. Algoritmo para verificação em passo finito do modelo constitutivo elasto-plástico com encruamento isótropo linear

Nas simulações numéricas de estruturas em regime elasto-plástico pelo método dos elementos finitos, a análise se desenvolve em correspondência a um processo incremental, ou passo-a-passo, de força ou deslocamento controlado. Nesse caso, somente é possível dispor de incrementos finitos de deformação para a verificação do modelo constitutivo. A diferença conceitual, portanto, está justamente na forma incremental e não mais infinitesimal que o modelo constitutivo deve apresentar.

Como condição geral a ser verificada, impõe-se que havendo evolução da deformação plástica no passo, ao final do incremento o novo nível de tensão deve verificar com a igualdade o critério de plastificação.

Ocorre que a forma incremental acaba por relaxar certos requisitos essenciais da forma infinitesimal. Por exemplo,  $f(\sigma) = 0$  deixa de ser condição necessária para a evolução da deformação plástica no passo, pois, a depender do tamanho do incremento de deformação total imposto, a mesma pode ocorrer dentro do passo mesmo partindo-se de uma situação onde  $f(\sigma) < 0$ .

Segue que na chamada forma em *passo finito* as condições de complementaridade e consistência do modelo incremental são substituídas por uma condição única:  $\Delta\lambda f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$ . Garante-se, assim, que ao final do

passo tanto a lei quanto o critério de plastificação são verificados. Todavia, essa condição é implícita, pois  $f(\sigma + \Delta\sigma)$  não é conhecido à partida. Assim, para tratar a forma implícita, emprega-se dentro de cada passo uma estratégia iterativa, dita de previsão e correção, para a verificação do modelo constitutivo.

Considere-se, então, que sejam conhecidos, num certo passo  $n$  do procedimento de análise, a deformação total  $\varepsilon_n$ , a parcela de deformação plástica  $\varepsilon_n^p$ , a medida acumulada de encruamento  $\alpha_n$  e a tensão total  $\sigma_n$ . Admita-se que tenha sido imposto um novo passo de carregamento ( $n+1$ ) gerando um acréscimo de deformação total  $\Delta\varepsilon_{n+1}$ .

Naturalmente esse acréscimo implica em alteração do estado conhecido. O que se deseja determinar são os valores dos acréscimos  $\Delta\varepsilon_{n+1}^p$ ,  $\Delta\alpha_{n+1}$  e  $\Delta\sigma_{n+1}$ , de modo que as relações que governam o modelo constitutivo sejam verificadas no novo estado. Em outras palavras, representando-se os valores das variáveis de interesse ao final do novo passo por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1} \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon_{n+1}^p \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\alpha_{n+1} \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \Delta\sigma_{n+1}\end{aligned}\tag{30 a,b,c,d}$$

Os acréscimos devem ser tais que:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_y + k\alpha_{n+1}) \leq 0 \\ \Delta\varepsilon_{n+1}^p &= \Delta\lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \Delta\alpha_{n+1} &= \Delta\lambda_{n+1} \\ \Delta\lambda_{n+1} f_{n+1} &= 0\end{aligned}\tag{31 a,b,c,d,e}$$

Chama-se a atenção, em particular, para a condição (31c), que exige o conhecimento do estado de tensão ao final do passo para a determinação do incremento de deformação plástica (novamente, caracteriza-se uma *forma implícita*). Esse aspecto é que efetivamente justifica a estratégia iterativa, baseada em etapas de *previsão* e *correção*, para a determinação das incógnitas no passo.

Em síntese, na etapa de *previsão* calcula-se o incremento de tensão admitindo-se uma resposta puramente elástica no passo, portanto sem evolução das deformações plásticas. Mediante controle do sinal do critério de plastificação, no qual se considera a tensão total acumulada, incluindo-se o incremento de tensão, a hipótese adotada na previsão é confirmada, ou não. Um sinal negativo para o critério confirma a hipótese. Já um sinal positivo contraria a hipótese de resposta puramente elástica, e indica o aparecimento de deformação plástica no passo. Nessa condição, passa-se, então, à etapa de *correção*, calculando-se nela o acréscimo finito de deformação plástica e atualizando-se os valores totais da tensão e da variável de encruamento.

Pois bem, na etapa de previsão se admite, conforme mencionado, uma resposta puramente elástica e, portanto:  $\Delta\lambda_{n+1} = 0$  e  $\Delta\varepsilon_{n+1}^p = 0$ . De imediato, também se conclui pela (31c) que:  $\Delta\alpha_{n+1} = 0$ . Seguem, das relações (31a) e (31b), os valores de tensão total e da função de plastificação, ditos de previsão ou tentativa (o sobre índice  $t$  é usado para indicar este aspecto):

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^t &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \\ f_{n+1}^t &= |\sigma_{n+1}^t| - (\sigma_y + k\alpha_n)\end{aligned}\quad (32 \text{ a,b})$$

A hipótese da etapa de previsão se confirmará, ou não, a depender do valor de  $f_{n+1}^t$ . Caso este valor resulte negativo, ou nulo, a hipótese se confirma, ou seja,  $\Delta\varepsilon_{n+1}^p = 0$  no passo, e as variáveis de interesse podem ser atualizadas de acordo com as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n\end{aligned}\quad (33\text{a,b,c})$$

Porém, se o valor de  $f_{n+1}^t$  resultar positivo a hipótese não se confirma e o passo implica em acréscimo de deformação plástica, que precisa ser calculado. Nesta condição a determinação de  $\Delta\lambda_{n+1}$  resulta da imposição de  $f_{n+1} = 0$ , que no caso de encruamento isótropo linear se escreve:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_y + k\alpha_{n+1}) \quad (34)$$

Na relação anterior aparece  $|\sigma_{n+1}|$ . Uma maneira de determinar esse módulo consiste em partir da relação (31a) e reescrevê-la, considerando-se a (30b), na forma:

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E\Delta\varepsilon_{n+1}^p \quad (35)$$

Com a (31c) e representando  $\sigma_{n+1}$  como  $|\sigma_{n+1}| \text{sign}(\sigma_{n+1})$ , a relação anterior resulta:

$$|\sigma_{n+1}| \text{sign}(\sigma_{n+1}) = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E\Delta\lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (36)$$

Nota-se que a primeira parcela do lado direito da igualdade coincide com  $\sigma_{n+1}^t$ . Além disso, usando também para ele a representação  $|\sigma_{n+1}^t| \text{sign}(\sigma_{n+1}^t)$ , a (36) fornece:

$$\left(|\sigma_{n+1}| + E\Delta\lambda_{n+1}\right) \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^t| \text{sign}(\sigma_{n+1}^t) \quad (37)$$

Da relação anterior, conclui-se que:

$$\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^t)$$

$$|\sigma_{n+1}| = |\sigma_{n+1}^t| - E\Delta\lambda_{n+1} \quad (38 \text{ a,b})$$

Pode-se, agora, voltar à (34) e com a ajuda das (30c) e (31d), escrever:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}^t| - (\sigma_y + k\alpha_n) - E\Delta\lambda_{n+1} - k\Delta\lambda_{n+1} \quad (39)$$

Finalmente, reconhecendo na (39) uma parcela idêntica à (32b), e impondo-se a condição  $f_{n+1} = 0$ , segue que:

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^t}{(E + k)} \quad (40)$$

Assim sendo, combinando-se as relações (31c) e (38a), o incremento de deformação plástica resulta:

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \Delta \lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^t) \quad (41)$$

Todas as variáveis de interesse podem, então, ser atualizadas a partir do resultado anterior. Em particular, incremento de tensão no passo resulta:

$$\Delta \sigma_{n+1} = E \Delta \varepsilon_{n+1} - E \Delta \varepsilon_{n+1}^p \quad (42)$$

Com as relações (41), (40) e (32), e considerando-se que no passo  $n$  verifica-se a condição  $f_n=0$ , conclui-se que:

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \frac{E}{(E+k)} \Delta \varepsilon_{n+1} \quad (43)$$

Consequentemente, a relação (42) passa a ser dada na forma:

$$\Delta \sigma_{n+1} = \frac{Ek}{(E+k)} \Delta \varepsilon_{n+1} \quad (44)$$

A (44) representa a relação constitutiva incremental válida quando houver incremento da deformação plástica no modelo com encruamento isótropo linear.

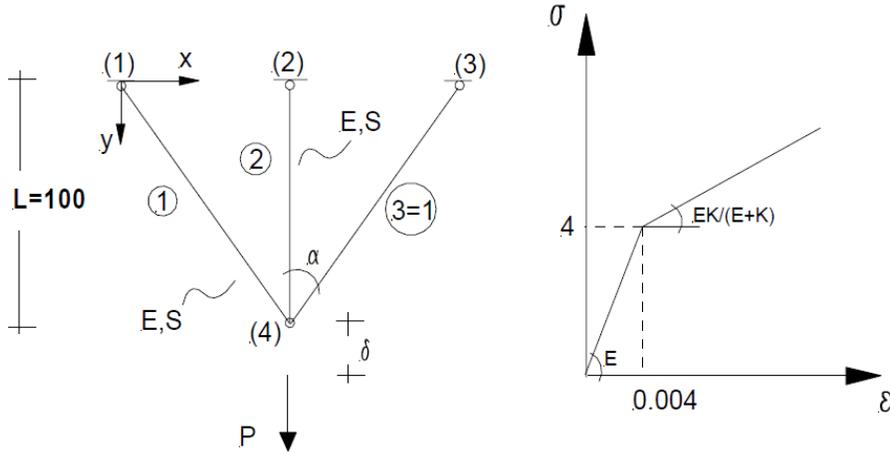
### 3. Exemplo de aplicação: caso unidimensional

Neste capítulo, procura-se ilustrar a aplicação do modelo constitutivo incremental mediante um exemplo simples de treliça plana.

Seja o arranjo estrutural simétrico indicado na Figura 9. O material das barras apresenta uma resposta elasto-plástica com encruamento isótropo linear, ilustrada na mesma figura. O que se pede é a representação do comportamento estrutural em termos do gráfico da força, ( $P$ ), contra o deslocamento do seu ponto de aplicação.

Dados complementares:

$$E = 1000; \quad \sigma_y = 4; \quad K = 111; \quad S = 1; \quad \alpha = 60^\circ; \quad \frac{EK}{(E+K)} = 100.$$



**Figura 9 – Treliça plana**

A resolução do problema será primeiramente apresentada impondo-se incrementos de deslocamento vertical ao nó livre da treliça, numa análise passo-a-passo. A força  $P$  resulta, então, como reação associada ao deslocamento imposto.

A opção por incremento de deslocamento, e não de força, é basicamente para ressaltar a integração do modelo constitutivo, sendo também consistente com uma análise convencional pelo MEF, aonde as deformações decorrentes do campo de deslocamentos são os dados de entrada para a determinação das tensões compatíveis com o modelo constitutivo.

As condições de equilíbrio e compatibilidade decorrem das representações indicadas na Figura 10 e se escrevem como:

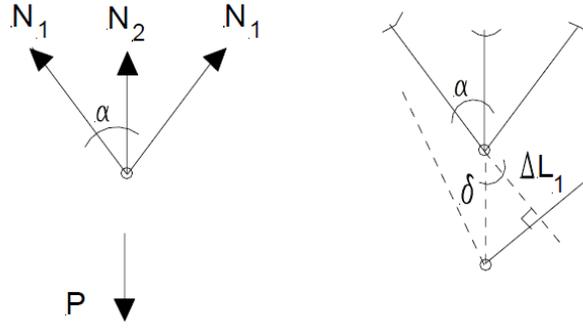
$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = P$$

$$\Delta L_1 = \delta \cos \alpha; \quad \Delta L_2 = \delta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{L_1} \cos \alpha; \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta}{L_2} \rightarrow \Delta \varepsilon_1 = \frac{\Delta \delta}{L_1} \cos \alpha; \quad \Delta \varepsilon_2 = \frac{\Delta \delta}{L_2}$$

Nota-se que as forças normais nas seções transversais das barras são resultantes de distribuições uniformes de tensões normais, isto é:

$$N_1 = \sigma_1 S; \quad N_2 = \sigma_2 S \quad \rightarrow \quad \Delta N_1 = \Delta \sigma_1 S; \quad \Delta N_2 = \Delta \sigma_2 S$$



**Figura 10** – Equilíbrio e compatibilidade

O modelo constitutivo em forma incremental resume-se a:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1}$$

$$\Delta\varepsilon_{n+1} = \Delta\varepsilon_{n+1}^e + \Delta\varepsilon_{n+1}^p$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_{n+1}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\alpha_{n+1}$$

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + K \alpha_{n+1}) \leq 0$$

$$f_{n+1}^t = |\sigma_{n+1}^t| - (\sigma_Y + K \alpha_{n+1}^t)$$

$$\text{se } f_{n+1}^t < 0 \rightarrow \Delta\varepsilon_{n+1}^p = 0; \Delta\alpha_{n+1} = 0; \Delta\sigma_{n+1} = E \Delta\varepsilon_{n+1}$$

$$\text{se } f_{n+1}^t > 0 \rightarrow \Delta\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^t}{(E + K)};$$

$$\Delta\varepsilon_{n+1}^p = \Delta\lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^t); \Delta\alpha_{n+1} = |\Delta\varepsilon_{n+1}^p|; \Delta\sigma_{n+1} = E \Delta\varepsilon_{n+1} - E \Delta\varepsilon_{n+1}^p$$

Num primeiro passo, aplica-se, por exemplo,  $\Delta\delta = \delta_1 = 0,4$ . Com as relações de compatibilidade, determinam-se os incrementos de deformação em cada uma das barras:

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \frac{\Delta\delta}{L_1} \cos \alpha = \frac{0,4}{400} = 0,001; \quad \Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta\delta}{L_2} = \frac{0,4}{100} = 0,004$$

O passo de tentativa admite uma resposta puramente elástica para o primeiro incremento imposto, isto é:

$$\Delta \varepsilon_1^p = 0; \Delta \alpha_1 = 0; \Delta \varepsilon_2^p = 0; \Delta \alpha_2 = 0$$

$$\Delta \sigma_1^t = E \Delta \varepsilon_1 = 1000 \left( \frac{0,4}{400} \right) = 1; \quad \Delta \sigma_2^t = E \Delta \varepsilon_2 = 1000 \left( \frac{0,4}{100} \right) = 4$$

Em seguida, verifica-se o sinal da função critério de plastificação para cada estado de tensão determinado na tentativa:

$$f_{n+1}^t = \left| \sigma_{n+1}^t \right| - (\sigma_Y + K \alpha_{n+1}^t)$$

Naturalmente, neste passo, para cada barra valem:

$$\sigma_1^t = \Delta \sigma_1^t; \quad \sigma_2^t = \Delta \sigma_2^t; \quad \alpha_1^t = \Delta \alpha_1; \quad \alpha_2^t = \Delta \alpha_2$$

Para as barras (1) e (2) obtém-se, respectivamente:

$$f_{n+1}^t = 1 - 4 < 0$$

$$f_{n+1}^t = 4 - 4 \leq 0$$

Assim sendo, o passo de tentativa é admissível e corresponde a uma resposta puramente elástica para a estrutura. As tensões e forças normais nas barras resultam:

$$\sigma_1 = N_1 = 1; \quad \sigma_2 = N_2 = 4;$$

Pela condição de equilíbrio, conclui-se que:  $P = 5$ .

Seja imposto, no passo seguinte, o seguinte incremento de deslocamento:  $\Delta \delta = 0,4$ . Tem-se, portanto que  $\delta = 0,8$ . Em cada uma das barras, novos incrementos de deformação se calculam com as relações de compatibilidade:

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{\Delta \delta}{L_1} \cos \alpha = \frac{0,4}{400}; \quad \Delta \varepsilon_2 = \frac{\Delta \delta}{L_2} = \frac{0,4}{100}$$

O passo de tentativa continua a admitir uma resposta puramente elástica para o incremento imposto, isto é, em cada uma das barras valem:

$$\Delta \varepsilon_1^p = 0; \Delta \alpha_1 = 0; \Delta \varepsilon_2^p = 0; \Delta \alpha_2 = 0$$

$$\Delta\sigma_1^t = E \Delta\varepsilon_1 = 1000 \left( \frac{0,4}{400} \right) = 1; \quad \Delta\sigma_2^t = E \Delta\varepsilon_2 = 1000 \left( \frac{0,4}{100} \right) = 4$$

Em seguida, verifica-se o sinal da função critério de plastificação para cada estado de tensão total de tentativa:

$$f_{n+1}^t = \left| \sigma_{n+1}^t \right| - (\sigma_Y + K \alpha_{n+1}^t)$$

As tensões normais totais e fatores de encruamento de tentativa para cada barra valem:

$$\sigma_{n+1}^t = \sigma_1 + \Delta\sigma_1^t; \quad \sigma_{n+1}^t = \sigma_2 + \Delta\sigma_2^t; \quad \alpha_{n+1}^t = \alpha_1 + \Delta\alpha_1; \quad \alpha_{n+1}^t = \alpha_2 + \Delta\alpha_2$$

Para as barras (1) e (2) obtém-se, respectivamente:

$$f_{n+1}^t = 2 - 4 < 0$$

$$f_{n+1}^t = 8 - 4 > 0$$

Conclui-se que o estado de tentativa para a barra (1) é admissível. Porém, o estado de tentativa para a barra (2) não é admissível e, portanto, para ela deve-se proceder à correção de acordo com as relações:

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^t}{(E + K)}; \quad \Delta\varepsilon_{n+1}^p = \Delta\lambda_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}^t); \quad \Delta\alpha_{n+1} = \left| \Delta\varepsilon_{n+1}^p \right|;$$

$$\Delta\sigma_{n+1} = E(\Delta\varepsilon_{n+1} - \Delta\varepsilon_{n+1}^p)$$

Seguem:

$$\Delta\varepsilon_2^p = \frac{4}{(1111)} = 0,0036; \quad \Delta\alpha_2 = 0,0036; \quad \Delta\sigma_2 = 1000 \cdot (0,004 - 0,0036) = 0,4$$

Resultam ao final do passo:

$$\sigma_1 = N_1 = 2; \quad \sigma_2 = N_2 = 4,4; \quad \varepsilon_1^p = 0; \quad \varepsilon_2^p = 0,0036; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0,0036$$

Pela condição de equilíbrio resulta que:  $P = 6,4$ .

Num passo seguinte, impõe-se  $\Delta\delta = 0,8$ . Tem-se, agora, que  $\delta = 1,6$ . Com as relações de compatibilidade, determinam-se os incrementos de deformação em cada uma das barras:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\delta}{L_1} \cos\alpha = \frac{0,8}{400} = 0,002; \quad \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\delta}{L_2} = \frac{0,8}{100} = 0,008$$

O passo de tentativa admite uma resposta puramente elástica para o incremento imposto, isto é, em cada uma das barras valem:

$$\Delta\varepsilon_1^p = 0; \quad \Delta\alpha_1 = 0; \quad \Delta\varepsilon_2^p = 0; \quad \Delta\alpha_2 = 0$$

$$\Delta\sigma_1^t = E \Delta\varepsilon_1 = 1000 \left( \frac{0,8}{400} \right) = 2; \quad \Delta\sigma_2^t = E \Delta\varepsilon_2 = 1000 \left( \frac{0,8}{100} \right) = 8$$

O estado de tentativa fornece as seguintes tensões normais totais e variáveis de encruamento:

$$\sigma_1^t = 2 + 2 = 4; \quad \sigma_2^t = 4,4 + 8 = 12,4; \quad \alpha_1^t = 0; \quad \alpha_2^t = 0,0036$$

O critério de plastificação para as barras (1) e (2) resulta:

$$f_{n+1}^t = 4 - 4 \leq 0$$

$$f_{n+1}^t = 12,4 - (4 + 111 \cdot 0,0036) = 8 > 0$$

Portanto, o estado de tensão na barra (1) está no limite da admissibilidade, enquanto que para a barra (2) deve-se proceder à correção de modo a atender ao critério de plastificação. Com as relações:

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^t}{(E + K)}; \quad \Delta\varepsilon_{n+1}^p = \Delta\lambda_{n+1} \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^t); \quad \Delta\alpha_{n+1} = |\Delta\varepsilon_{n+1}^p|;$$

$$\Delta\sigma_{n+1} = E(\Delta\varepsilon_{n+1} - \Delta\varepsilon_{n+1}^p)$$

seguem:

$$\Delta \lambda_{n+1} = \frac{8}{(1100)} = 0,0072; \quad \Delta \alpha_2 = 0,0072; \quad \Delta \sigma_2 = 1000 \cdot (0,008 - 0,0072) = 0,8$$

$$\sigma_1 = N_1 = 4; \quad \sigma_2 = N_2 = 4,4 + 0,8 = 5,2; \quad \varepsilon_1^p = 0;$$

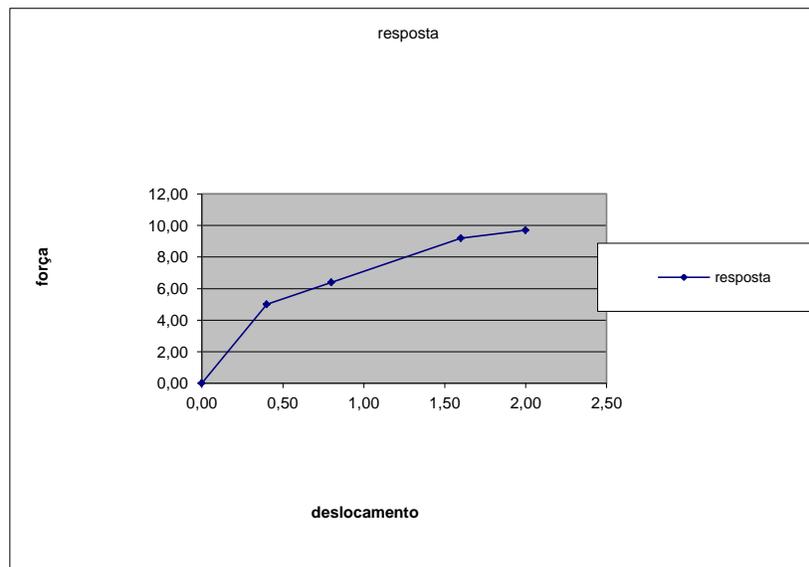
$$\varepsilon_2^p = 0,0036 + 0,0072 = 0,0108; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0,0108$$

Pela condição de equilíbrio determina-se:  $P = 9,2$ . Pode-se verificar que num ulterior passo de  $\Delta \delta = 0,4$ , totalizando  $\delta = 2,0$ , também a barra (1) passa a responder com evolução do processo de plastificação. Repetindo-se o procedimento de análise para esse passo, obtém-se o seguinte estado final:

$$\sigma_1 = N_1 = 4,1; \quad \sigma_2 = N_2 = 5,6; \quad \varepsilon_1^p = 0,0009; \quad \varepsilon_2^p = 0,0144;$$

$$\alpha_1 = 0,0009; \quad \alpha_2 = 0,0144$$

Pela condição de equilíbrio determina-se:  $P = 9,7$ . A resposta da estrutura está ilustrada no gráfico da Figura 11.



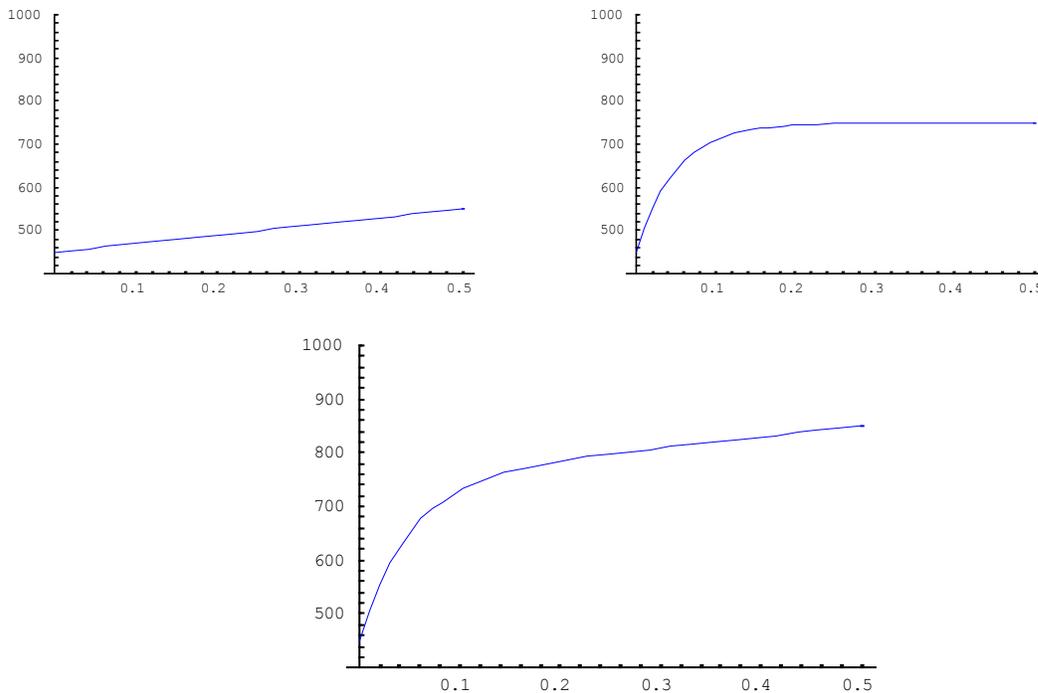
**Figura 11** – Resposta da estrutura

#### 4. Algoritmo para verificação em passo finito do modelo constitutivo elasto-plástico com encruamento isótropo não-linear

O encruamento isótropo não-linear aqui considerado consiste da sobreposição do caso linear com uma lei de encruamento exponencial, de modo que o critério de plastificação passa a ser escrito na forma:

$$f = |\sigma| - K(\alpha) \quad c/ \quad K(\alpha) = \sigma_y + k\alpha + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega\alpha}) \quad (45)$$

Na relação anterior  $\sigma_\infty$  é uma tensão que limita o regime de encruamento e estabelece o início do processo de escoamento indeterminado. Já  $\omega$  é um parâmetro material adicional que determina a evolução mais ou menos acentuada do encruamento. Para ilustrar o papel desses parâmetros, adotando-se, por exemplo, os valores:  $\sigma_y = 450$ ;  $\sigma_\infty = 750$ ;  $\omega = 20$ ;  $k = 200$ , obtêm-se as seguintes representações para  $K(\alpha)$ , ilustradas na Figura 12. Na figura, mostram-se os casos particulares de encruamento puramente linear, exponencial e a sua sobreposição em coerência com a relação (45):



**Figura 12** - Encruamentos linear, exponencial e combinado

Analisando a Figura 12, pode-se notar que o regime de encruamento fica limitado uma vez que se opte exclusivamente pela lei de encruamento exponencial, recuperando-se um patamar de escoamento em correspondência a  $\sigma_\infty$ .

A dificuldade introduzida pelo encruamento não-linear está no cálculo do parâmetro  $\Delta\lambda$  quando da integração do modelo constitutivo em passo finito. Agora esse cálculo não mais pode ser feito com uma expressão fechada, como no caso de encruamento linear, onde se tem:

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{f'_{n+1}}{(E + k)} \quad (46)$$

Para ilustrar esse aspecto, considere-se, novamente, a integração em passo finito do modelo constitutivo e que os estados de tensão e deformação são conhecidos na iteração  $n$ . Deseja-se atualizá-los na iteração  $n+1$  para dado  $\Delta\varepsilon_{n+1}$ . Nessa iteração o modelo elasto-plástico com encruamento isótropo não-linear em forma incremental apresenta o seguinte conjunto de relações:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1} \quad (47 \text{ a,b})$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)$$

$$f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = |\sigma| - \left[ \sigma_y + k\alpha_{n+1} + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega\alpha_{n+1}}) \right] \quad (48)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda_{n+1} \quad (49)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1} \quad (50)$$

Conforme visto anteriormente, a integração se processa mediante etapas de previsão e correção. Na previsão, admite-se  $\Delta\lambda_{n+1} = 0$  e as relações (47) a (50) resultam:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n; \quad \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad (51 \text{ a,b})$$

$$\sigma_{n+1}^t = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (52)$$

$$f_{n+1}^t = f(\sigma_{n+1}^t, \alpha_n) = |\sigma_{n+1}^t| - \left[ \sigma_y + k\alpha_n + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega\alpha_n}) \right] \quad (53)$$

Passa-se à verificação da etapa de previsão. Se  $f'_{n+1} < 0$ , a solução em  $(n+1)$  fica determinada pelo estado de previsão; se  $f'_{n+1} > 0$ , há que se corrigir a previsão, o que implica em determinar uma expressão para  $\Delta\lambda_{n+1}$  (a partir da imposição da condição  $f_{n+1} = 0$ ).

Admita-se que a condição de correção tenha sido identificada. O passo de correção pressupõe que o critério de plastificação seja atendido de tal forma que:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_t + k\alpha_{n+1} + (\sigma_\infty - \sigma_t)(1 - e^{-\omega\alpha_{n+1}})) = 0 \quad (54)$$

Como na correção  $\Delta\lambda_{n+1} > 0$ , então:  $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1}$  e  $|\sigma_{n+1}| = |\sigma'_{n+1}| - E\Delta\lambda_{n+1}$ . Segue que a (54) assume a forma:

$$|\sigma'_{n+1}| - E\Delta\lambda_{n+1} - [\sigma_y + k(\alpha_n + \Delta\lambda_{n+1}) + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega(\alpha_n + \Delta\lambda_{n+1})})] = 0 \quad (55)$$

Nota-se que em forma implícita a última relação pode ser representada como:

$$f_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}) = 0 \quad (56)$$

Claramente, a determinação de  $\Delta\lambda_{n+1}$  exige um procedimento não-linear unidimensional, e o método de Newton constitui-se em estratégia a adotar.

Linearizando a relação (56) em torno de um valor  $\Delta\lambda_{n+1}^i$  (onde o índice  $i$  agora está associado a uma iteração genérica, característica do método de Newton), segue que:

$$f_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}^i + \delta\Delta\lambda_{n+1}^i) \cong f_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}^i) + f'_{n+1} \delta\Delta\lambda_{n+1}^i = 0 \quad (57)$$

A variação  $f'_{n+1} \delta\Delta\lambda_{n+1}^i$  pode ser calculada pela conhecida definição da derivada de Gateaux ('direcional'):

$$f'_{n+1} \delta\Delta\lambda_{n+1}^i = \left. \frac{df_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}^i + \beta\delta\Delta\lambda_{n+1}^i)}{d\beta} \right|_{\beta=0} \quad (58)$$

Aplicando-se essa definição, com o auxílio da (55), determina-se para  $f'_{n+1} \delta \Delta \lambda_{n+1}^i$  a seguinte relação:

$$f'_{n+1} \delta \Delta \lambda_{n+1}^i = - \left\{ E + k + (\sigma_\infty - \sigma_y) (e^{-\omega(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^i)} \omega) \right\} \delta \Delta \lambda_{n+1}^i \quad (59)$$

Substituindo-se este resultado na forma linearizada (57), obtém-se uma relação para o cálculo do incremento a ser adicionado à estimativa  $\Delta \lambda_{n+1}^i$ :

$$\delta \Delta \lambda_{n+1}^i = \frac{f_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}^i)}{\left\{ E + k + (\sigma_\infty - \sigma_y) (e^{-\omega(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^i)} \omega) \right\}} \quad (60)$$

É importante observar que na iteração inicial, pode-se tomar  $\Delta \lambda_{n+1}^0 = 0$ , e a relação acima assume a forma:

$$\delta \Delta \lambda_{n+1}^0 = \frac{f_{n+1}(0)}{\left\{ E + k + (\sigma_\infty - \sigma_y) (e^{-\omega \alpha_n} \omega) \right\}} \quad (61)$$

Nota-se que:

$$f_{n+1}(0) = f'_{n+1} = \left| \sigma_{n+1}^t \right| - (\sigma_y + k \alpha_n + (\sigma_\infty - \sigma_y) (1 - e^{-\omega \alpha_n}))$$

E ainda, no caso particular em que se queira considerar apenas a parcela de encruamento linear (isto é, impondo-se  $\sigma_\infty = \sigma_y$ , ou  $\omega = 0$ ), então a (69) fornece simplesmente:  $f'_{n+1} = -(E + k)$ . Sendo  $\Delta \lambda_{n+1}^0 = 0$  e com  $f_{n+1}(0) = f'_{n+1}$ , a (57) permite recuperar a relação única já deduzida anteriormente para o cálculo de  $\Delta \lambda_{n+1}$ , reproduzida pela (46).

Com a nova estimativa, tem-se que:  $\Delta \lambda_{n+1}^{i+1} = \Delta \lambda_{n+1}^i + \delta \Delta \lambda_{n+1}^i$ . Com esse resultado, volta-se a verificar a (55). Caso o valor obtido não verifique uma tolerância adotada, passa-se a uma nova iteração, determinando-se nova correção com a (60). O processo iterativo se repete até que a (56) seja verificada dentro de uma tolerância adotada.

Como exemplo de aplicação do procedimento iterativo apresentado acima, considere-se certo material caracterizado pelos seguintes parâmetros:

$$\sigma_y = 450; \sigma_\infty = 750; \omega = 20; k = 200; E = 833,33$$

Admita-se que o estado de previsão atual seja tal que:  $|\sigma'_{n+1}| = 500; \alpha_n = 0,01$ .

O que se deseja é determinar  $\Delta\lambda_{n+1}$ , tal que:

$$f_{n+1} = |\sigma'_{n+1}| - E \Delta\lambda_{n+1} - [ \sigma_y + k( \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1} ) + ( \sigma_\infty - \sigma_y )( 1 - e^{-\omega( \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1} )} ) ] = 0$$

A solução é encontrada mediante um procedimento iterativo de correção de estimativas para  $\Delta\lambda_{n+1}$ , sendo o valor nulo adotado para estimativa inicial. Sendo  $i$  o índice da iteração, genericamente, o procedimento gera uma sequência:

$$\Delta\lambda_{n+1}^i = \Delta\lambda_{n+1}^{i-1} + \delta \Delta\lambda_{n+1}^i \quad i = 0, \dots, n$$

a qual converge para a solução correta com erro associado à uma tolerância adotada.

Partindo-se do valor nulo ( $\Delta\lambda_{n+1}^0 = 0$ ), substituindo-se os valores prescritos, obtém-se na primeira iteração:

$$f_{n+1}(0) = f_{n+1}^0 = |\sigma'_{n+1}| - ( \sigma_y + k \alpha_n + ( \sigma_\infty - \sigma_y )( 1 - e^{-\omega \alpha_n} ) ) =$$

$$\delta \Delta\lambda_{n+1}^0 = \frac{f_{n+1}(0)}{\{ E + [ k + ( \sigma_\infty - \sigma_y )( e^{-\omega \alpha_n} \omega ) ] \}} = \frac{93,62}{5945,7} = 0,0157$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^1 = \Delta\lambda_{n+1}^0 + \delta \Delta\lambda_{n+1}^0 = 0,0157$$

Com esta nova estimativa, testa-se o valor da função  $f$ :

$$f_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}^1) = |\sigma'_{n+1}| - E \Delta\lambda_{n+1}^1 - [ \sigma_y + k( \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1}^1 ) + ( \sigma_\infty - \sigma_y )( 1 - e^{-\omega( \alpha_n + \Delta\lambda_{n+1}^1 )} ) ] = 11,2$$

Segue nova estimativa:

$$\delta \Delta \lambda_{n+1}^1 = \frac{f_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}^1)}{\left\{ E + [k + (\sigma_\infty - \sigma_t)(e^{-\omega(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^1)} \omega)] \right\}} = \frac{11,2}{4621,9} = 0,002423$$

$$\Delta \lambda_{n+1}^2 = \Delta \lambda_{n+1}^1 + \delta \Delta \lambda_{n+1}^1 = 0,018123$$

Com esta nova estimativa, testa-se o valor da função  $f$ :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}^2) &= \left| \sigma_{n+1}^t \right| - E \Delta \lambda_{n+1}^2 - [ \sigma_y + k(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^2) + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^2)}) ] \\ &= 0,215 \end{aligned}$$

Uma ulterior estimativa resulta de:

$$\delta \Delta \lambda_{n+1}^2 = \frac{f_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}^2)}{\left\{ E + [k + (\sigma_\infty - \sigma_t)(e^{-\omega(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^2)} \omega)] \right\}} = \frac{0,215}{4452,133} = 0,0000483$$

$$\Delta \lambda_{n+1}^3 = \Delta \lambda_{n+1}^2 + \delta \Delta \lambda_{n+1}^2 = 0,01817$$

Determina-se para a função  $f$  o valor:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}^3) &= \left| \sigma_{n+1}^t \right| - E \Delta \lambda_{n+1}^3 - [ \sigma_y + k(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^3) + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\omega(\alpha_n + \Delta \lambda_{n+1}^3)}) ] \\ &= 0,006 \end{aligned}$$

Tendo-se em vista o valor muito próximo de zero obtido para a função, pode-se considerar que o critério de convergência foi atendido e o passo de correção pode ser concluído empregando-se:  $\Delta \lambda_{n+1} = 0,01817$ .