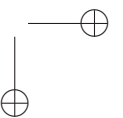
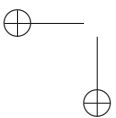
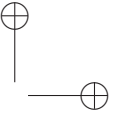
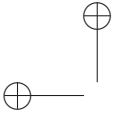


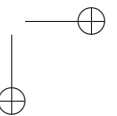
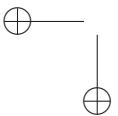
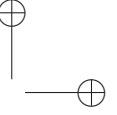
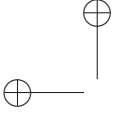
Mecânica dos Materiais

Fundamentos e Tecnologia do Comportamento Mecânico

Cláudio Geraldo Schön

2013





© 2013, Elsevier Editora Ltda.

Todos os direitos reservados protegidos pela Lei 9.610 de 19/02/98. Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por parte da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados: eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

Copidesque: Adriana Araújo Kramer
Editoração eletrônica: Cláudio Geraldo Schön
Revisão Gráfica: Casa Editorial BBM.

Elsevier Editora Ltda.
Conhecimento sem Fronteiras
Rua Sete de setembro, 111 - 16^o andar
20050-006 – Centro - Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Rua Quintana, 753 – 8^o andar
04569-011 – Brooklin – São Paulo - SP

Serviço de Atendimento ao Cliente
0800-0265340 sac@elsevier.com.br

ISBN: 978-85-352-7159-1
ISBN (versão eletrônica): 978-85-352-7160-7

Nota

Muito zelo e técnica foram empregados na edição desta obra. No entanto, podem ocorrer erros de digitação, impressão ou dúvida conceitual. Em qualquer das hipóteses, solicitamos a comunicação ao nosso Serviço de Atendimento ao Cliente, para que possamos esclarecer ou encaminhar a questão.

Nem a editora, nem o autor, assumem qualquer responsabilidade por eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens, originados do uso desta publicação.

CIP BRASIL. CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVRO, RJ

S382m

Schön, Cláudio Geraldo
Mecânica dos materiais / Cláudio Geraldo Schön. 1ed. Rio de Janeiro:
Elsevier, 2013.
552 p. : il. : 24 cm

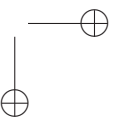
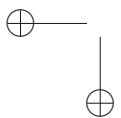
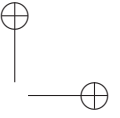
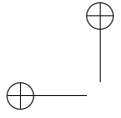
Inclui bibliografia
Índice de assuntos / Índice de autores
ISBN 978-85-352-7159-1

1. Engenharia Civil. 2. Fundações (Engenharia). I. Título
13-02040 CDD: 624.15
CDU: 624.15

12/06/2013 12/06/2013

Sumário

1	Plasticidade e fratura em solicitações multiaxiais: critérios de escoamento e de falha	vii
1.1	Tensão equivalente	viii
1.1.1	Critério de von Mises	viii
1.1.2	Critério de Tresca	xi
1.1.3	O potencial plástico e o critério de Lévy-Mises	xii
1.1.4	Representação gráfica dos critérios de escoamento	xiii
1.1.5	Critério de Hill	xvi
1.2	Critérios de falha	xviii
1.2.1	Critério de Rankine	xviii
1.2.2	Critério de Mohr-Coulomb	xix
1.2.3	Critério de Griffith	xix
1.2.4	Critério de McClintock-Walsh	xxi
1.3	Critérios de escoamento para outros materiais particulares	xxiii
1.4	Teoria da deformação elastoplástica em deformações finitas	xxiv
1.4.1	Termodinâmica da deformação elastoplástica	xxx
1.5	Aplicação: estampabilidade de chapas	xxxii
1.5.1	Aplicação do critério de Hill à estampagem	xxxiii
1.5.2	Embutimento profundo, estiramento	xxxv
1.5.3	Curva limite de conformação (CLC)	xxxv
1.5.4	Análise de grade de círculos	xxxviii
	Bibliografia	xli
	Índice remissivo	lv
	Índice de assuntos	lv
	Índice de autores	lvi



Capítulo 1

Plasticidade e fratura em sollicitações multiaxiais: critérios de escoamento e de falha

Quando um sólido é sujeito a uma tensão normal ao longo do eixo x_1 , a condição para escoamento plástico pode ser expressa por:

$$\sigma_{11} \geq \sigma_e \quad (1.1)$$

onde σ_e é o limite de escoamento do material como determinado em um ensaio de tração ou de compressão uniaxial.

Esse é um exemplo de **critério de falha**, no sentido de que um componente fabricado com esse material, sujeito a este estado de tensão, provavelmente falhará, pois uma mudança permanente de forma impedirá que ele funcione corretamente em um dispositivo em que esteja montado. Da mesma forma, é um **critério de escoamento**, por indicar o critério de tensão no qual o material escoará.

A ideia de um critério de tensão, dependente do material, que indique as condições em que um dado componente falhará é desejável na engenharia. O estado de tensão usado no critério definido pela Equação 1.1, entretanto, é muito particular e raramente realizado em componentes reais. Como podemos generalizar este critério para um estado de tensão mais complexo?

É importante ressaltar que presentemente não há uma resposta baseada em conceitos fundamentais capaz de responder a essa pergunta. A engenharia,

entretanto, não pode depender deste tipo de limitação e frequentemente usa uma abordagem mais pragmática ao problema. Isto requer, em alguns casos, desenvolver critérios empíricos ou semiempíricos que possam ser aplicados ao problema.

1.1 Tensão equivalente

Baseado em F. A. McClintock e A. S. Argon. *Mechanical Behavior of Materials*. Addison-Wesley, 1966.

Podemos postular que a tendência que o material terá para escoar plasticamente em um estado de tensões multiaxial será dada por uma função escalar do tensor de tensões denominada **tensão equivalente**, $\bar{\sigma}$, e a condição será expressa por:

$$\bar{\sigma} \geq \sigma_e \quad (1.2)$$

Como dito anteriormente, no momento não é possível derivar uma expressão rigorosa para a tensão equivalente em termos da ativação dos modos de deformação efetivamente observados no material (para o caso de policristais, tal busca é uma linha de pesquisa muito ativa¹). Na prática da mecânica dos materiais utilizam-se critérios empíricos, denominados **critérios de escoamento**.

1.1.1 Critério de von Mises

No início do século XX, von Mises, Huber e Hencky propuseram de forma independente um critério de escoamento que pode ser expresso por meio da seguinte tensão equivalente:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (1.3)$$

Esse critério, conhecido hoje em dia como **critério de von Mises**, admite três interpretações físicas, uma das quais veremos em detalhe a seguir. Antes, entretanto, precisamos introduzir alguns conceitos novos sobre tensores em geral e sobre o tensor de tensão em particular.

¹A grande dificuldade está em se descrever a ativação de sistemas de escorregamento de um agregado policristalino, pois a deformação de um dado grão não depende apenas dele, mas sim de todos os seus vizinhos, além do mais, a orientação dos grãos muda com a deformação, ou seja, surge uma textura de deformação, difícil de se determinar.

Energia elástica

Podemos calcular a energia elástica de um estado de tensão triaxial por meio da sua definição (Equação ??):

$$\begin{aligned}
 U_{el} &\equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i \varepsilon_i \\
 &= \sum_i \left[\frac{(\sigma_i)^2}{2E} - \sum_{j \neq i} \frac{\nu \sigma_i \sigma_j}{E} \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

onde usamos aqui o fato de que o tensor pode ser diagonalizado, sendo σ_i e ε_i as tensões e deformações principais.

É possível demonstrar, usando a teoria matemática dos tensores, que certas combinações dos elementos de um tensor não se alteram quando o referencial é rodado (as quantidades são, portanto, escalares). Essas combinações são chamadas de **invariantes do tensor**. Como a energia, por si só, é um escalar, ela deve, de alguma forma, estar relacionada aos invariantes do tensor de tensão.

O primeiro invariante de um tensor de segunda ordem é chamado de **traço** do tensor e corresponde à soma dos seus elementos diagonais:

$$I_1 = \text{Tr}[\sigma_{ij}] \equiv \sum_i \sigma_{ii}
 \tag{1.5}$$

O segundo invariante corresponde à soma dos menores principais do tensor (os menores principais são os determinantes das três matrizes 2×2 que são obtidas quando eliminamos a linha e a coluna correspondente a cada um dos elementos diagonais):

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix}
 \tag{1.6}$$

Usando os dois primeiros invariantes do tensor de tensão podemos escrever a energia elástica como:

$$U_{el} = \frac{1}{2E} \left[(I_1)^2 - 2I_2 (1 + \nu) \right]
 \tag{1.7}$$

Porém, lembramos duas constantes que definimos anteriormente: o módulo de volume $B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ (Seção ??) e o módulo de cisalhamento, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (Seção ??) e reescrevemos a expressão como:

$$U_{el} = \frac{(I_1)^2}{18B} + \frac{1}{6G} \left[(I_1)^2 - 3I_2 \right]
 \tag{1.8}$$

Definimos agora a tensão média hidrostática, $\sigma_m \equiv -P$ como:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (1.9)$$

Temos, portanto, que o primeiro termo de U_{el} pode ser escrito como:

$$U_P = \frac{P^2}{2B} \quad (1.10)$$

Esse termo, por sua vez, pode ser reescrito lembrando uma relação fundamental da termodinâmica, como:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = -V \Rightarrow U_P = -PV \quad (1.11)$$

A energia elástica pode ser, portanto, decomposta em duas parcelas:

- Uma componente “hidrostática”, correspondendo às forças que levam à variação do volume do corpo durante a deformação.

$$U_P = -PV \quad (1.12)$$

- Uma componente chamada “reduzida”, que contém toda a informação sobre as forças que levam à mudança de forma do corpo, que preservam o volume, durante a deformação elástica.

$$U_D = \frac{1}{6G} \left[(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \right] \quad (1.13)$$

A componente reduzida pode ser reescrita como:

$$U_D = \frac{1}{12G} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (1.14)$$

Calculando para o caso do escoamento em um estado de tensão uniaxial ($\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) teremos que:

$$U_D = \frac{(\sigma_e)^2}{6G} \quad (1.15)$$

ou seja,

$$U_D|_{uni} \leq U_D|_{tri} \Rightarrow \sigma_e \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.16)$$

O critério de von Mises, portanto, equivale a postular que a energia reduzida no estado de tensão triaxial deve ser maior ou igual àquela correspondente ao escoamento em um estado uniaxial de tensão.

A justificativa para o uso da energia reduzida como critério para o escoamento vem da observação experimental de que tensões hidrostáticas não são capazes de produzir deformação plástica em meios sólidos. Meyers & Chawla [MC] mencionam um pequeno experimento mental envolvendo crustáceos que demonstra isso por absurdo.

1.1.2 Critério de Treska

Um critério mais simples que o de von Mises havia sido proposto por Treska em 1864. Este se baseia na premissa de que os materiais escoam devido a tensões de cisalhamento. Desta forma Treska propôs que o escoamento plástico em um estado triaxial de tensões se iniciaria quando a máxima tensão de cisalhamento atingisse o valor correspondente ao observado no caso uniaxial (Figura 1.1).

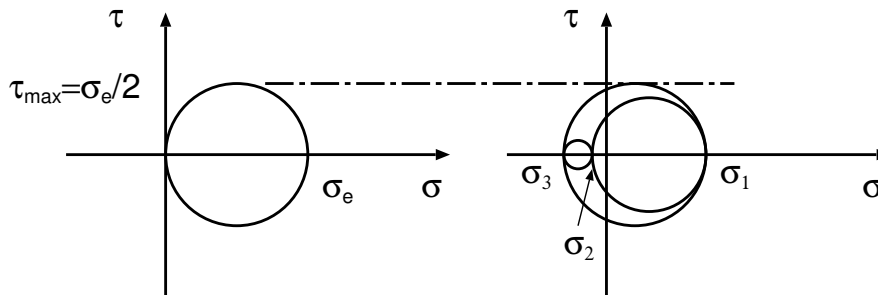


Figura 1.1: Representação da equivalência de estados de tensão segundo o critério de Treska.

Matematicamente o **critério de Treska** pode ser expresso por:

$$\left| \frac{\sigma_e}{2} \right| \leq \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| \Rightarrow |\sigma_e| \leq |\sigma_1 - \sigma_3| \equiv \bar{\sigma} \quad (1.17)$$

1.1.3 O potencial plástico e o critério de Lévy-Mises

R. Hill², ao propor seu critério de escoamento para materiais anisotrópicos (que será discutido na seção 1.1.5), revisa de forma particularmente didática dois conceitos propostos por von Mises, o potencial plástico e as relações de Lévy-Mises, que são úteis na compreensão e na quantificação da plasticidade de materiais de engenharia. Iremos seguir esse desenvolvimento.

Postulamos que a relação entre os elementos do tensor de tensão e de deformação, no contexto da teoria de uma tensão equivalente, seja dada por:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial \sigma_{ij}} d\zeta \quad (1.18)$$

onde ζ é um fator escalar de proporcionalidade. Notamos que a expressão é formalmente similar a diversas outras encontradas na física e na termodinâmica, em que uma variável termodinâmica extensiva (a deformação) se relaciona a uma variável termodinâmica intensiva (a tensão) pela derivada parcial de um potencial. Nesse contexto, o quadrado da tensão equivalente define o **potencial plástico** do sistema. Por conveniência iremos trabalhar com a quantidade $f_p = \bar{\sigma}^2$.

Desenvolvemos o critério de von Mises (Equação 1.3) para um referencial genérico como:

$$2f_p = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 2\sigma_e^2 \quad (1.19)$$

Aplicando a Equação 1.18, obtemos um conjunto de equações relacionando os incrementos do tensor de deformação aos elementos do tensor de tensão:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{11} = (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) d\zeta \\ d\varepsilon_{22} = (2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}) d\zeta \\ d\varepsilon_{33} = (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) d\zeta \\ d\varepsilon_{12} = d\varepsilon_{21} = 3\sigma_{12} d\zeta \\ d\varepsilon_{23} = d\varepsilon_{32} = 3\sigma_{23} d\zeta \\ d\varepsilon_{31} = d\varepsilon_{13} = 3\sigma_{31} d\zeta \end{cases} \quad (1.20)$$

que são conhecidas como **relações de Lévy-Mises**. Notamos que essas relações, salvo algum fator de proporcionalidade, são aquilo que esperaríamos admitindo as hipóteses de que a deformação seja proporcional à tensão e de que ela ocorra com conservação de volume. De fato Hill prova que elas são

²R. Hill, *Proc. Royal Soc. London, Ser. A*, 193, 281 – 297 (1948).

consistentes com o comportamentos conhecidos de materiais de engenharia, o que usa como critério de validação do conceito de potencial plástico.

Hill menciona que o próprio von Mises forneceu um argumento para justificar o conceito (aparentemente artificial) de potencial plástico. Ele propõe calcular o incremento de trabalho de deformação de um elemento de volume durante a variação arbitrária de σ_{ij} , sujeito à restrição $f_p = \text{constante}$. Tradicionalmente isso é feito introduzindo-se um multiplicador de Lagrange ($d\zeta$):

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - f_p d\zeta) \quad (1.21)$$

Ou seja, a relação 1.18, portanto, equivale a realizar a deformação perpendicular a uma trajetória que mantém o trabalho de deformação estacionário. Segundo Hill, quando f_p é a tensão equivalente de von Mises (Equação 1.3) o incremento de trabalho é máximo. O autor, entretanto, ressalta que isso não é necessariamente verdadeiro para qualquer tensão equivalente.

Esses resultados mostram que o potencial plástico apresenta uma notável semelhança com um potencial termodinâmico tradicional (como por exemplo, a energia livre de Gibbs), entretanto essa semelhança deve ser considerada com cautela, pois a deformação plástica é fundamentalmente irreversível, enquanto que a termodinâmica clássica lida com transformações reversíveis. Esses resultados, de qualquer forma, mostram que o conceito de tensão equivalente é empírico, mas justificável (pelo menos no contexto da termodinâmica de não equilíbrio).

1.1.4 Representação gráfica dos critérios de escoamento

Os critérios de escoamento admitem uma representação gráfica particularmente didática. Para tanto, consideramos a aplicação do critério de von Mises ao EPT (para simplificar, adotaremos $\sigma_2 = 0$):

$$(\sigma_e)^2 \leq \frac{1}{2} [(\sigma_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + (\sigma_3)^2] \quad (1.22)$$

Essa expressão irá representar, quando vale o sinal da igualdade, uma elipse no plano $\sigma_1 \times \sigma_3$.

O critério de Treska, por sua vez, irá resultar em um polígono inserido nesta elipse (veja a Figura 1.2).

Pela análise da Figura 1.2, tiramos algumas conclusões com respeito aos dois critérios: eles são equivalentes em alguns pontos e preveem tensões de

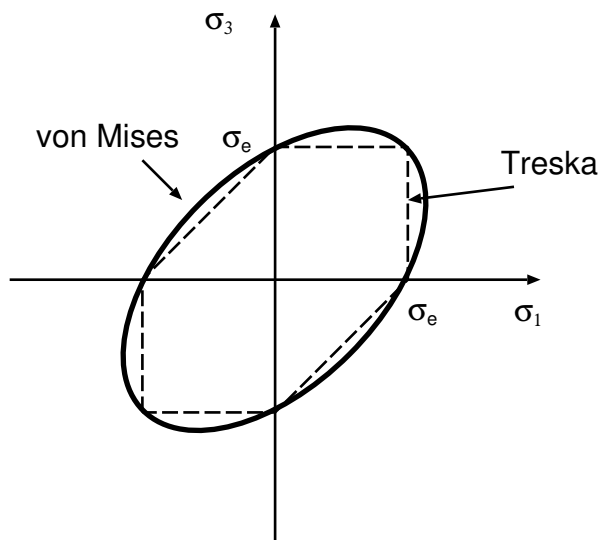


Figura 1.2: Representação gráfica dos critérios de escoamento de Treska e von Mises para o EPT.

escoamento muito semelhantes. O critério de Treska prevê tensões equivalentes menores ou iguais ao previsto pelo critério de von Mises (ou seja, Treska é mais conservador).

Para o caso geral (ou seja, não no EPT) também é possível fazer uma representação tridimensional dos critérios na forma de um tubo oblíquo de seção circular com eixo ao longo da diagonal do primeiro octante (von Mises), contendo um prisma hexagonal em seu interior (Treska).

Encruamento isotrópico e anisotrópico

É possível demonstrar (ver McClintock e Argon) que o aumento da tensão de escoamento em materiais isotrópicos previamente encruados tem o efeito formal de expandir a elipse de von Mises, como reproduzido na Figura 1.3.

No caso de materiais plásticos anisotrópicos, a elipse, além de se expandir, pode sofrer uma translação. O caso limite em que a elipse apenas translada (sem se expandir) é chamado “encruamento cinemático” (Figura 1.4):

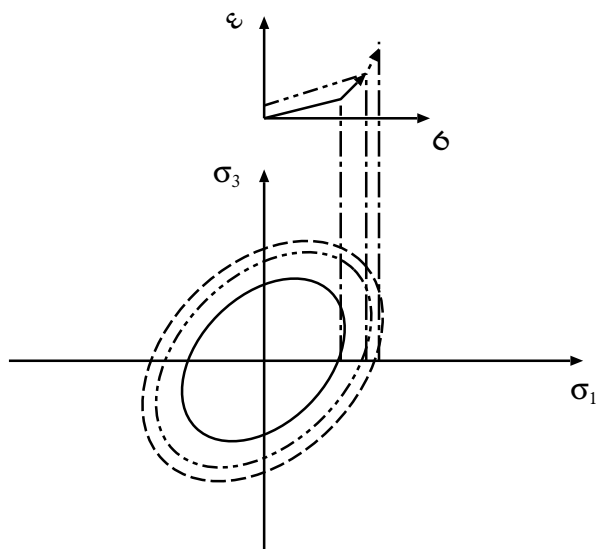


Figura 1.3: Representação gráfica do encruamento em um material plástico isotrópico.

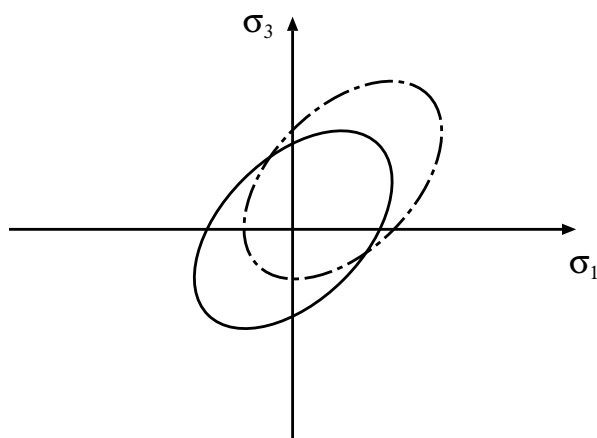


Figura 1.4: Representação gráfica do encruamento cinemático em um material plástico anisotrópico.

Exercício 1.1

Demonstre que um material que sofre encruamento cinemático também apresenta efeito Bauschinger (vide Seção ??).

Solução

Consideremos a Figura 1.4. Vemos que a situação em que $\sigma_3 \equiv 0$ corresponde a um carregamento uniaxial puro. Sob a ação de um carregamento em tração, portanto, teríamos a elipse cheia se movendo para a posição da elipse ponto-tracejada. Invertendo-se agora o sentido da deformação, vemos que o material irá se deformar no nível de tensão determinado pela elipse ponto-tracejada, que é muito menor que o esperado para a situação inicial e mais ainda em relação ao novo limite de escoamento em tração, o que define o efeito Bauschinger.

1.1.5 Critério de Hill

Os critérios de von Mises e Tresca assumem, implicitamente, um material isotrópico, no sentido de que as propriedades plásticas iniciais são isotrópicas, mesmo que elas se tornem anisotrópicas em função da trajetória de deformação (como no caso do encruamento cinemático). No caso de materiais que apresentam propriedades anisotrópicas, em princípio, outros critérios precisam ser definidos que levem em conta essa resposta anisotrópica.

Hill³, em 1948, propôs um critério de escoamento aplicável a materiais anisotrópicos no caso conhecido como ortotrópico. Nesse contexto, os **materiais ortotrópicos** apresentam propriedades distintas ao longo de três eixos mutuamente ortogonais. Esse caso é importante na tecnologia, pois corresponde a diversos produtos processados de uso corrente, como, por exemplo, placas de madeira, chapas de aço e filmes poliméricos. O caso das chapas de aço será discutido com maior detalhe na seção 1.5.

Hill propõe definir f_p como:

$$2f_p \equiv F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (1.23)$$

onde F, G, H, L, M, N são parâmetros ajustáveis. A normalização é necessária porque agora não há uma situação privilegiada (como o limite de escoamento em carga uniaxial, pois agora essa propriedade depende da direção no material) que possa ser usada para comparação.

³R. Hill, *Proc. Royal Soc. London, Ser. A*, 193, 281 – 297 (1948).

Como Hill salienta, a forma da equação 1.23 implica na escolha dos eixos principais de anisotropia como referencial para o material (esse referencial é o definido pela ortotropia do material). Ele menciona que outros referenciais podem ser escolhidos e que a transformação de referenciais (apresentada na seção ??) pode ser empregada para definir outras formas. A ortotropia, entretanto, está frequentemente associada ao processamento do material e o referencial ortotrópico normalmente possui um valor intrínseco natural. Por exemplo, na laminação o referencial ortotrópico é definido pela direção de laminação (DL), pela direção normal à chapa (DN) e pela direção transversal (DT), perpendicular às outras duas, e esse referencial é fundamental para toda a teoria da conformação de chapas laminadas.

Exercício 1.2

Suponha que para um dado material ortotrópico foram medidos os limites de escoamento no referencial ortotrópico em condições uniaxiais e em cisalhamento puro, valores denotados por $(\sigma_e)_{ij}$. Utilize esses parâmetros para determinar F, G, H, L, M, N na equação 1.23 e discuta o que se pode concluir sobre seus sinais.

Solução

Considerando inicialmente os resultados uniaxiais, vemos que:

$$\begin{cases} \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} = G + H \\ \frac{1}{(\sigma_e^2)_{22}} = H + F \\ \frac{1}{(\sigma_e^2)_{33}} = F + G \end{cases} \quad (1.24)$$

Esse sistema de equações pode ser resolvido para F, G e H , obtendo-se:

$$\begin{cases} 2F = \frac{1}{(\sigma_e^2)_{22}} + \frac{1}{(\sigma_e^2)_{33}} - \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} \\ 2G = \frac{1}{(\sigma_e^2)_{33}} + \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} - \frac{1}{(\sigma_e^2)_{22}} \\ 2H = \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} + \frac{1}{(\sigma_e^2)_{22}} - \frac{1}{(\sigma_e^2)_{33}} \end{cases} \quad (1.25)$$

Para os casos de cisalhamento puro podemos determinar L, M e N diretamente, por:

$$\begin{cases} 2L = \frac{1}{(\sigma_{23}^2)} \\ 2M = \frac{1}{(\sigma_{31}^2)} \\ 2N = \frac{1}{(\sigma_{12}^2)} \end{cases} \quad (1.26)$$

Vemos que L, M e N são necessariamente positivos. Quanto a F, G e H , embora não seja impossível que um deles seja negativo, isso iria requerer pro-

priedades mecânicas radicalmente diferentes ao longo dos eixos de anisotropia, o que não se espera na prática.

1.2 Critérios de falha

Os critérios de escoamento discutidos anteriormente, a rigor, só se aplicam a materiais metálicos dúcteis. Para materiais metálicos frágeis e cerâmicas, que se rompem antes de atingir o limite de escoamento. A falha de um componente feito desses materiais se dará principalmente por fratura frágil, que é regida por uma classe diferente de observações empíricas. Os critérios de escoamento são então substituídos pelos chamados critérios de falha.

Trincas, como vimos anteriormente, são os defeitos internos do material que levam à fratura do sólido e elas se propagam sob a ação de **tensões normais**.⁴ Os critérios de falha, portanto, se referem a uma tensão normal máxima suportável pelo material (ao contrário dos critérios de escoamento, que se referem a uma tensão máxima de cisalhamento ou a uma quantidade intimamente associada, como no caso do critério de von Mises).

1.2.1 Critério de Rankine

O primeiro critério de falha tratado aqui é o chamado **critério de Rankine**,⁵ em que a ruptura ocorreria quando a máxima tensão normal de tração superasse o limite de resistência obtido em um ensaio de tração uniaxial, ou seja:

$$\sigma_f \leq |\sigma_1| \quad (1.27)$$

O critério de Rankine presume tacitamente que o limite de resistência em compressão é idêntico àquele observado em tração. Tal não corresponde à observação empírica: experimentalmente se sabe que o limite de resistência em compressão de materiais frágeis é cerca de oito vezes maior que aquele

⁴Estamos nos referindo a trincas carregadas no modo I, na linguagem da mecânica da fratura elástica linear. É possível propagar trincas nos modos II e III, mas isso requer um considerável esforço em suprimir o modo I de operar. Trincas que iniciam a propagação fora do modo I tendem a migrar para este. Tudo isso justifica a afirmação de que trincas frágeis se formam sob a ação de tensões normais.

⁵William John Macquorn Rankine (1820 - 1874), cientista escocês mais conhecido como um dos fundadores da termodinâmica, ao lado de Sadi Carnot e J. P. Joule. Seu tratado de mecânica dos materiais, entretanto, teve um impacto tão ou mais importante que os de seus estudos de termodinâmica.

observado em tração uniaxial. Os critérios de falha mais modernos procuram incorporar esta observação experimental.

1.2.2 Critério de Mohr-Coulomb

O primeiro critério aqui tratado, desenvolvido por Christian Otto Mohr, baseia-se na construção da Figura 1.5, que, no EPT pode ser expresso como representado na Figura 1.6.

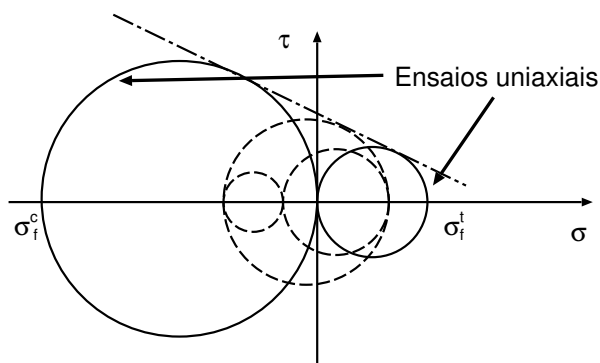


Figura 1.5: Representação gráfica da equivalência de estados de tensão segundo o critério de Mohr-Coulomb.

Sua simplicidade é marcante e, de certa forma ele se assemelha ao critério de Treska. Como no caso do critério de Treska, entretanto, ele apresenta uma justificativa fraca e é de implementação complexa.

1.2.3 Critério de Griffith

Em 1925 Griffith propôs um critério de falha baseado na concentração de tensão na ponta dos defeitos característicos do material. Como vimos anteriormente (Seção ??), tensões de compressão resultam em tensões tangenciais de tração para defeitos orientados paralelamente ao eixo de aplicação da carga. Griffith considerou, portanto, uma distribuição aleatória de orientações de defeitos e calculou a tensão de ruptura, presumindo que cada defeito tivesse uma resistência intrínseca σ_f .

O critério de Griffith pode ser expresso matematicamente pela seguinte relação:

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_f(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 & \text{se } \sigma_1 + 2\sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = \sigma_f & \text{se } \sigma_1 + 2\sigma_3 \leq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

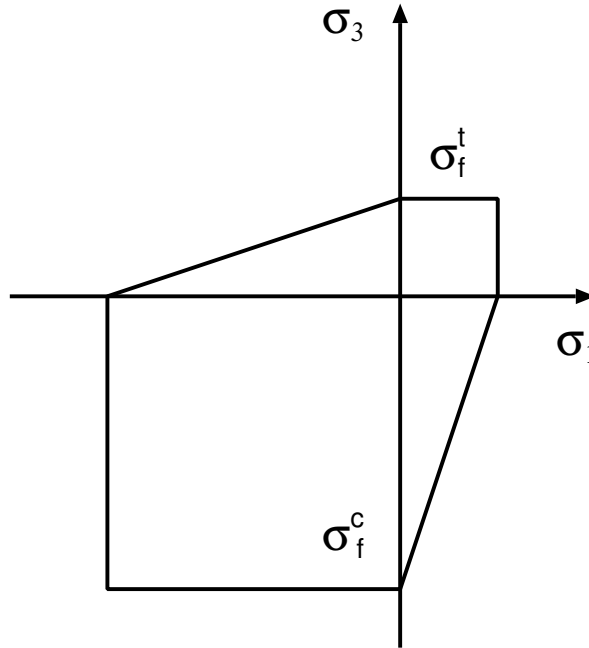


Figura 1.6: Representação gráfica do critério de falha de Mohr-Coulomb para materiais frágeis no EPT.

A primeira condição representa uma parábola inclinada, com seu eixo ao longo da diagonal do primeiro quadrante. Essas relações encontram-se representadas na Figura 1.7, novamente para o caso de um EPT.

Na Figura 1.7 a linha marcada como “trincas aleatórias” representa o esperado para o caso em que as trincas são aleatoriamente distribuídas também ao longo dos planos x_1x_2 e x_2x_3 , nestes casos fatalmente a tensão de compressão aplicada irá resultar em tensões tangenciais de tração acima do valor crítico nesses defeitos. O critério de Griffith prevê que o limite de resistência em compressão é exatamente oito vezes maior que em tração, o que é compatível com a observação experimental. Como já havia ocorrido na comparação dos critérios de Tresca e de von Mises, o critério de Mohr-Coulomb é mais conservador que o de Griffith, porém os dois preveem praticamente a mesma tensão de ruptura.

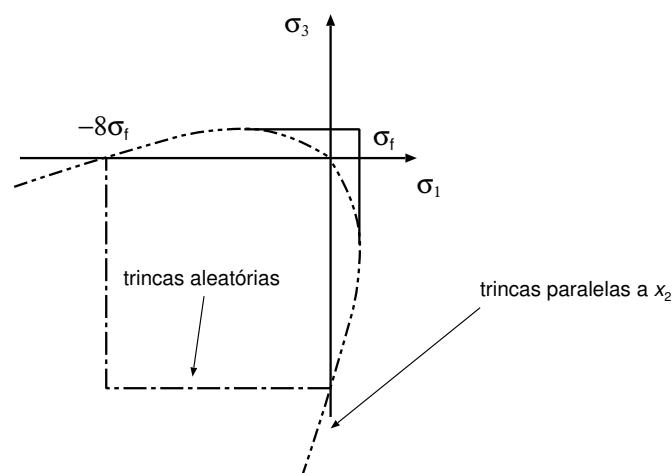


Figura 1.7: Representação gráfica do critério de falha de Griffith para materiais frágeis no EPT. A linha pontilhada representa a tensão de ruptura obtida assumindo que as trincas se encontram aleatoriamente distribuídas em todas as orientações do volume e não apenas no plano da placa, como na derivação original de Griffith.

1.2.4 Critério de McClintock-Walsh

McClintock e Walsh introduziram um refinamento no modelo de Griffith, que assumiu implicitamente que as faces da trinca nunca se tocam e dessa forma são incapazes de comunicar tensões (tanto normais quanto tangenciais). Essa hipótese é razoável quando tensões de tração agem sobre a trinca (em particular quando a tensão hidrostática é positiva), porém, sob o domínio de tensões de compressão este efeito não pode mais ser negligenciado. Os autores então introduziram um componente de atrito entre as faces da trinca, proporcional a um coeficiente de atrito (μ) e à tensão normal atuando sobre a trinca. Com esse resultado os autores foram capazes de obter uma melhor reprodutibilidade para resultados de mecânica de rochas, em que altas pressões de confinamento (ou seja, altas tensões hidrostáticas negativas) são comuns.

Exercício 1.3

Considere a Figura 1.8, que representa um tubo de raio exterior $r = 25$ mm e paredes finas de espessura $t = 0,5$ mm submetido a um torque T .

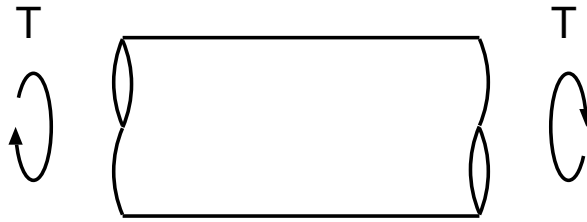


Figura 1.8: Representação de um tubo de paredes finas submetido a um torque.

Suponhamos que este tubo venha a ser feito:

- I. de latão 70/30, com limite de escoamento $\sigma_e = 115$ MPa, limite de resistência $\sigma_u = 331$ MPa, módulo de rigidez $E = 100,3$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$ ou
- II. de alumina (99,8% densa), com limite de ruptura em tração $\sigma_r = 205$ MPa, módulo de rigidez $E \simeq 405$ GPa.

Com base nessas informações, responda qual critério de falha (Treska, Rankine ou von Mises) você deve usar para cada um dos dois casos? Justifique (observe que no caso do tubo de cobre, este irá falhar quando sofrer deformação plástica, já no caso do tubo de alumina, ele irá falhar quando se fraturar).

Observação: como o tubo tem paredes finas, assuma por simplicidade que o estado de tensões é uniforme ao longo da sua espessura.

Dados:

- Equação de Coulomb para a torção (r é o raio exterior e I é o momento de inércia do tubo):

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I} \quad (1.29)$$

- Momento de inércia da seção transversal de um tubo de raio r com parede fina de espessura t :

$$I \approx 2\pi r^3 t \quad (1.30)$$

Solução

No tubo de latão podemos utilizar os critérios de Tresca ou o de von Mises. O critério de Tresca é mais conservador, portanto é mais adequado para a determinação de um torque máximo admissível. A aplicação do critério de Tresca também é mais conveniente, já que o estado de tensão na parede do tubo será de cisalhamento puro (confira o Exercício ??), portanto a tensão determinada já é a tensão máxima de cisalhamento. No caso do tubo de alumina, que é um material frágil, devemos usar o critério de Rankine, que, dos três, é o mais adequado.

1.3 Critérios de escoamento para outros materiais particulares

Como afirmado anteriormente, critérios de escoamento (e de falha) podem ser adaptados para atender particularidades da deformação plástica ou da fratura de materiais específicos. Aqui trataremos de dois casos: polímeros e vidros metálicos (metais amorfos).

Ao contrário dos materiais cristalinos, os polímeros apresentam uma forte dependência de suas propriedades mecânicas na pressão hidrostática, devido à existência de **volume livre** na estrutura do polímero. Esse efeito causa, entre outras coisas, uma anisotropia na resistência mecânica em solicitações de tração e de compressão (o limite de escoamento em compressão é cerca de 10 % a 20 % maior que em tração).

Isso pode ser incorporado ao critério de escoamento de von Mises através da introdução de uma dependência do limite de escoamento na tensão hidrostática média, por exemplo:

$$\sigma_e = \sigma_e^0 + k\sigma_m \quad (1.31)$$

Da mesma forma, critérios foram estabelecidos para levar em conta a tendência do polímero se deformar por microfibrilamento (*crazing*), já que este mecanismo de deformação só ocorre sob a ação de tensões hidrostáticas de tração. Um critério que atende a este objetivo é:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = A + \frac{B}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (1.32)$$

A Figura 1.9 apresenta a representação gráfica dos critérios que:

- a . Consideram o efeito da pressão hidrostática.
- b . Consideram a competição entre bandas de cisalhamento e microfibrilamento no polímero.

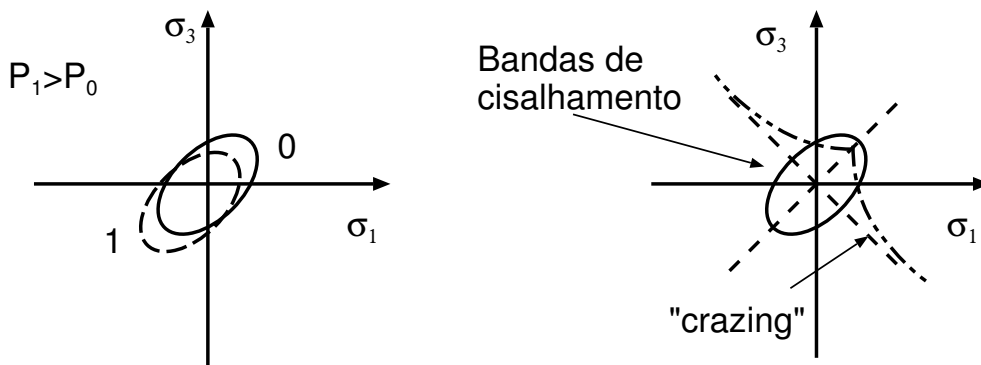


Figura 1.9: Representação gráfica de alguns critérios de escoamento utilizados para polímeros.

Em um artigo recente, C. A. Schuh e A. C. Lund⁶ propuseram o uso de um critério baseado no de Mohr-Coulomb para descrever o escoamento de vidros metálicos, que apresentam uma forte anisotropia plástica. O modelo desses autores é baseado em modelos atomísticos e foi testado por meio de simulações de dinâmica molecular.

1.4 Teoria da deformação elastoplástica em deformações finitas

O formalismo empregado até aqui para descrever tensões e deformações é conveniente para os casos em que a deformação é infinitesimal. Nestas condições as equações podem ser linearizadas e o princípio de superposição pode ser aplicado. Na prática isso significaria que a deformação total de um corpo (ϵ) pode ser dividida em uma parcela elástica (ϵ_{el}) e uma parcela plástica (ϵ_{pl}):

$$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl} \tag{1.33}$$

⁶C. A. Schuh, A. C. Lund, *Nature Materials* 2, 449-452, 2003.

Quando as deformações plásticas são grandes, entretanto, surgem problemas neste tipo de decomposição. Neste caso a própria definição do tensor de deformação introduz não linearidades nas equações e a decomposição apresentada na Equação 1.33 torna-se impraticável, senão impossível. Em certas condições é possível estabelecer hipóteses simplificadoras e continuar usando as deformações e as tensões até aqui introduzidas. Podemos, por exemplo, assumir que as deformações elásticas são nulas e que o sólido não encrua após o escoamento. Esse caso limite, chamado de **material idealmente plástico**, é comumente empregado na mecânica dos materiais. O que devemos fazer, entretanto, quando as deformações elásticas não são desprezíveis? E quando o encruamento existe? Para esses casos (incluindo o importante exemplo dos polímeros) surge a necessidade de se usar um formalismo alternativo, chamado de **teoria das deformações finitas** (*finite strain theory*). A referência a respeito deste assunto, que será seguida aqui, é o artigo do Prof. E. H. Lee da Universidade de Stanford.⁷ A teoria, entretanto, é consideravelmente mais antiga e pode ser encontrada, por exemplo no livro de Hill.⁸

Lee inicia sua discussão introduzindo a cinemática do problema da deformação de um sólido elastoplástico. Consideremos a situação representada na Figura 1.10. A deformação do elemento de volume \mathbf{x}^1 sob ação de uma força para \mathbf{x}_3 é dada pela transformação (não mais afim) \mathbf{A} . Postulamos, entretanto, que a deformação total pode ser decomposta em uma parcela elástica \mathbf{A}^e (que leva do estado intermediário \mathbf{x}^2 ao estado final \mathbf{x}^3) e uma parcela plástica \mathbf{A}^p (que leva do estado inicial \mathbf{x}^1 a \mathbf{x}^2).

Assumindo agora que a temperatura permanece constante e que as superfícies são livres de tração,⁹ podemos escrever a transformação \mathbf{A} como:

$$A_{ij} = \frac{\partial x_i^3}{\partial x_j^1} \quad (1.34)$$

Da mesma forma, \mathbf{A}^e e \mathbf{A}^p são dadas por:

$$A_{ij}^e = \frac{\partial x_i^3}{\partial x_j^2} \quad (1.35)$$

e

$$A_{ij}^p = \frac{\partial x_i^2}{\partial x_j^1} \quad (1.36)$$

⁷E. H. Lee, *Trans. ASME: J. Apl. Mech.*, 36 (1969) 1 – 6.

⁸R. Hill *Mathematical Theory of Plasticity*, Cap. 3, Oxford:Oxford University Press (1950)

⁹Estas restrições, evidentemente, podem ser facilmente levantadas introduzindo-se as outras derivadas parciais na Equação 1.34.

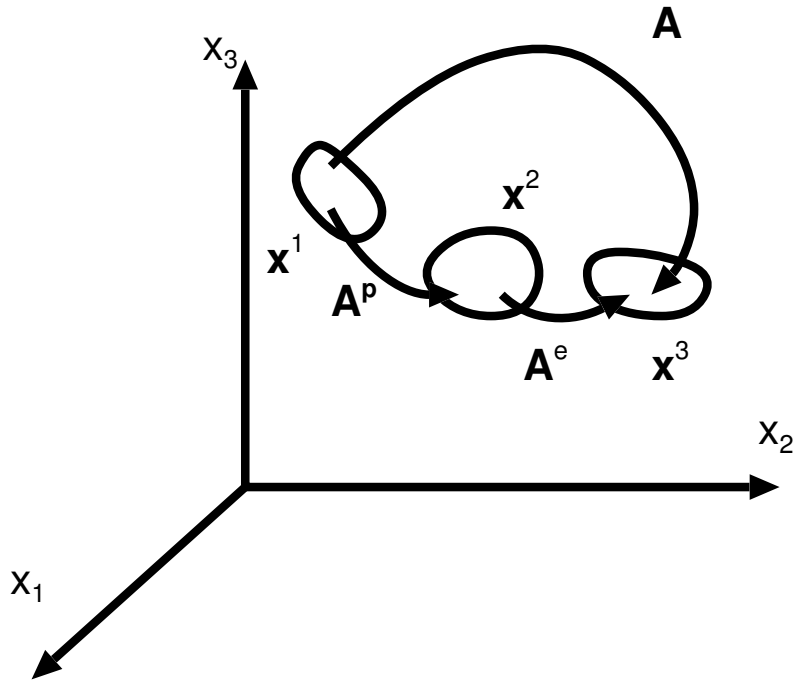


Figura 1.10: Representação esquemática da deformação de um elemento de volume de um corpo elastoplástico, decomposta em uma parcela elástica e outra plástica.

Pela regra da cadeia, teremos então:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^p \mathbf{A}^e \tag{1.37}$$

Esta relação substitui a Equação 1.33 e é válida para qualquer tipo de deformação.

A seguir Lee deduz a expressão da taxa de acréscimo de trabalho \dot{W} dissipado¹⁰ no processo de deformação de \mathbf{x}^1 para \mathbf{x}^3 :

$$\dot{W} = \int_{V^3} \sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i^3}{\partial x_j^3} dV^3 \tag{1.38}$$

onde \mathbf{v}^3 é a velocidade do ponto na configuração \mathbf{x}^3 e V^3 é o volume do sólido

¹⁰Como Lee ressalta, este é o trabalho envolvido no movimento do ponto material de \mathbf{x}^1 para \mathbf{x}^3 subtraído da parcela devida ao incremento da energia cinética.

nesta configuração. Introduzindo a seguinte notação para o tensor de tensão:

$$\mathbf{T} \Rightarrow |T_{ij}| = |\sigma_{ij}| \quad (1.39)$$

e considerando que:

$$\frac{\partial v_i^3}{\partial x_j^3} = \sum_k \frac{\partial v_i^3}{\partial x_k^1} \frac{\partial x_k^1}{\partial x_j^3} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L} \quad (1.40)$$

Introduzimos também uma mudança de variáveis para integrar sobre o volume da configuração \mathbf{x}^1 , ou seja, V^1 , obtendo:

$$\dot{W} = \int_{V^1} \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{L}) \det(\mathbf{A}) dV^1 \quad (1.41)$$

onde $\text{tr}(\dots)$ e $\det(\dots)$ representam os operadores de tomada do traço e do determinante das matrizes contidas nos argumentos. Nota-se que $\det A$ é o Jacobiano da transformação de variáveis na integral de volume.

Usando agora a Equação 1.37 para substituir \mathbf{A} na Equação 1.41 e desenvolvendo a diferencial do produto das matrizes obtemos:

$$\dot{W} = \int_{V^1} \text{tr} \left[\mathbf{T} \left(\dot{\mathbf{A}}^e \mathbf{A}^p + \mathbf{A}^e \dot{\mathbf{A}}^p \right) \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{A}^{e-1} \right] \det \mathbf{A}^e \det \mathbf{A}^p dV^1 \quad (1.42)$$

Sabe-se que na deformação plástica o volume é constante, o que implica em $\det \mathbf{A}^p = 1$. A Equação 1.42 pode ser então reescrita como:

$$\dot{W} = \dot{W}^e + \dot{W}^p \quad (1.43)$$

onde

$$\dot{W}^e = \int_{V^1} \text{tr} \left[\mathbf{T} \dot{\mathbf{A}}^e \mathbf{A}^{e-1} \right] \det \mathbf{A}^e dV^1 \quad (1.44a)$$

e

$$\dot{W}^p = \int_{V^1} \text{tr} \left[\mathbf{T} \mathbf{A}^e \dot{\mathbf{A}}^p \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{A}^{e-1} \right] \det \mathbf{A}^e dV^1 \quad (1.44b)$$

Como Lee ressalta, é muito tentador interpretar estas duas quantidades como a taxa de armazenamento de trabalho elástico e plástico respectivamente. Ele faz a ressalva, entretanto, que no caso elastoplástico a configuração obtida após o descarregamento (ou seja, \mathbf{x}^2) está sendo continuamente deformada, não correspondendo, portanto, à configuração original como no caso puramente elástico. Isso implica que parte do trabalho plástico pode ser computado na

parcela \dot{W}^e . Caso as propriedades elásticas do sólido não se alterem com a deformação plástica, entretanto, a identificação pode ser feita sem problemas.

Retornando agora à parcela plástica, podemos assumir sem perda de generalidade que o integrando na Equação 1.44b corresponde à taxa de armazenamento de energia plástica por unidade de volume não deformado:

$$\dot{w}^e = \text{tr} \left(\mathbf{T} \mathbf{A}^e \dot{\mathbf{A}}^p \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{A}^{e-1} \right) \det \mathbf{A}^e \quad (1.45a)$$

A equação mostra, aparentemente, que as deformações plástica e elástica estão acopladas na determinação da taxa de armazenamento do trabalho plástico. Lee, entretanto, argumenta que este acoplamento pode ser eliminado se a rotação relativa a \mathbf{x}^1 embutida em \mathbf{x}^2 for eliminada do problema. Definindo-se a nova configuração $\bar{\mathbf{x}}^2$ a partir de um referencial solidário com respeito à esta rotação, Lee mostra que a Equação 1.45a pode ser reescrita como:

$$\dot{w}^p = \left[\mathbf{T} \dot{\bar{\mathbf{A}}}^p (\bar{\mathbf{A}}^p)^{-1} \right] \det \bar{\mathbf{A}}^e \quad (1.45b)$$

Finalmente, expandindo-se os elementos dos tensores obtemos:

$$\dot{w}^e = \sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j^2} \det \bar{\mathbf{A}}^e \quad (1.45c)$$

O segundo termo do produto representa a velocidade de deformação plástica na configuração $\bar{\mathbf{x}}^2$, mas, como usual na deformação plástica, o divergente desta velocidade deve se anular (para garantir que o volume se conserve). Dessa forma ela não contribui para o traço da matriz. O critério de escoamento pode ser escrito na forma:

$$\bar{\sigma} [\mathbf{T} (\det \mathbf{A}^e)] = \sigma_e \quad (1.46)$$

Onde $\bar{\sigma}$ corresponde à função tensão equivalente, discutida anteriormente e que pode ser representada pela função de von Mises ou de Tresca ou qualquer outra similar.

A seguir definimos o tensor \mathbf{Q} , tal que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} (\det \bar{\mathbf{F}}^e) \quad (1.47)$$

e reescrevemos o critério de escoamento como:

$$\bar{\sigma} (\mathbf{Q}) - \sigma_e (\phi, T) \leq 0 \quad (1.48)$$

onde ϕ representa o funcional:

$$\phi = \int_0^t \alpha(T) \dot{w}^p d\tau \quad (1.49)$$

Esse funcional representa a contribuição do encruamento no aumento do limite de escoamento e, portanto, $\alpha(T)$ é uma função crescente da temperatura, que representa o aumento da mobilidade das discordâncias com a temperatura, conseqüentemente permitindo um maior incremento na densidade de discordâncias com menos gasto de trabalho plástico.

Na Expressão 1.48 o sinal da igualdade representa a deformação plástica e a desigualdade representa um estado elástico. Para a continuação da deformação plástica, a derivação dessa expressão com o sinal de igualdade leva à seguinte equação diferencial:

$$\text{tr} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \right) - \frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi} \dot{\phi} - \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (1.50)$$

A seguir Lee argumenta que o encruamento resulta sempre num incremento de limite de escoamento¹¹, e portanto:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi} \dot{\phi} > 0 \quad (1.51)$$

e a continuação da deformação plástica estará associada a:

$$\text{tr} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \right) - \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad (1.52)$$

que corresponde à condição de carregamento para a continuação da deformação plástica. Notamos que no caso isotérmico ela se reduz a $\dot{\bar{\sigma}} > 0$.

A seguir Lee introduz o tensor de velocidade de deformação plástica, $\bar{\mathbf{D}}^p$, definido como:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \frac{[\bar{\mathbf{L}}^p + (\bar{\mathbf{L}}^p)^T]}{2} = \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j^2} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i^2} \right) : \frac{\bar{\mathbf{L}}^p}{2} = \dot{\bar{\mathbf{A}}}^p (\bar{\mathbf{A}}^p)^{-1} \quad (1.53)$$

onde o símbolo $(\dots)^T$ representa a transposta do tensor no argumento.

¹¹Isto, a rigor, não é correto quando surgem instabilidades plásticas, mas se nos restringirmos à deformação plástica homogênea, como certamente era o escopo do trabalho de Lee, a asserção vale.

Lee introduz então (usando 1.45b) o potencial plástico:¹²

$$\bar{\mathbf{D}}^p = k \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \right) - \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} \dot{T} \right] \quad (1.54)$$

onde k é dado por:

$$k = \left(\alpha n \bar{\sigma} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \phi} \right)^{-1} \quad (1.55)$$

sendo n a ordem de \mathbf{T} em $\bar{\sigma}$.

O termo entre chaves na Equação 1.54 representa a taxa de carregamento e, por conta do termo $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{Q}}$ temos que a taxa de deformação é normal à superfície de escoamento. Dessa forma podemos empregar um princípio de máxima taxa de dissipação de energia plástica,¹³ que por sua vez garante a unicidade da solução.

1.4.1 Termodinâmica da deformação elastoplástica

Por fim, Lee argumenta que o tratamento apresentado permite a determinação da história de deformação exceto pela variação de temperatura. Para isto o acoplamento termomecânico deve ser introduzido no problema. Para tanto ele introduz a termodinâmica do processo de deformação plástica. Primeiramente ele argumenta que os fenômenos elásticos e plásticos são apenas fracamente acoplados e que as propriedades termoelásticas dependem fundamentalmente da estrutura cristalina básica, enquanto que o fluxo plástico depende da geração e migração de discordâncias, que pouco afetam a estrutura cristalina. Ele baseia então a termodinâmica em duas interações separadas, uma termoelasticidade reversível e o trabalho plástico irreversível.

¹²veja R. Hill *Mathematical Theory of Plasticity*, Cap. 3, Oxford:Oxford University Press (1950).

¹³Este é um princípio popular nas teorias convencionais da plasticidade e estabelece que o caminho tomado pelo processo de deformação plástica é o que permite a maior taxa de dissipação de energia por trabalho plástico.

Termoelasticidade reversível

Lee introduz a energia livre de Helmholtz, $\psi(\mathbf{C}^e, T)$, do problema termoelástico, onde $\mathbf{C}^e = (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{A}^e$, a partir da qual se obtém a tensão e a entropia (S^e) do sistema:

$$\mathbf{T} = 2\rho_0 \mathbf{A}^e \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}^e} (\mathbf{A}^e)^T (\det \mathbf{A}^e)^{-1} \quad (1.56)$$

e

$$S^e = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.57)$$

Na Expressão 1.56 ρ_0 representa a densidade inicial.

Contribuição irreversível da plasticidade

Lee introduz um termo de eficiência (γ^p) do trabalho plástico que fornece a quantidade de trabalho plástico que é convertida em calor no processo de deformação,¹⁴ calculando a variação de energia interna do sistema como:

$$\rho_0 \dot{U}^e = \dot{w}^e + \gamma \dot{w}^p \quad (1.58a)$$

e

$$\rho_0 \dot{U}^p = (1 - \gamma) \dot{w}^p \quad (1.58b)$$

sendo que a segunda parcela se refere à energia armazenada (na forma de discordâncias e outros defeitos cristalinos) no sistema por conta da deformação plástica.

A produção de entropia elástica resultante do trabalho plástico é dada por:

$$T \rho_0 \dot{S}^e = \gamma \dot{w}^p \quad (1.59)$$

Por fim, Lee combina todas as contribuições desenvolvidas nesta seção e determina a história termo-elasto-plástica do sistema por meio das Equações 1.56 (para a deformação elástica), 1.48 e 1.54 (para o fluxo plástico) e 1.57, 1.58a e 1.59 (para o acoplamento entre estas contribuições).

¹⁴Tipicamente γ varia entre 0,9 e 1,0 no decurso da deformação plástica.

1.5 Aplicação: estampabilidade de chapas

A teoria desenvolvida anteriormente é essencial para a compreensão da maior parte dos processos de conformação mecânica dos materiais. Devido à sua importância tecnológica, a estampagem de chapas metálicas será discutida nesta seção. Não se trata de uma discussão aprofundada, entretanto. Apenas apresentaremos alguns conceitos importantes para esta indústria e que estão intimamente relacionados à deformação plástica em estados triaxiais de tensão.

Estampagem é um processo de conformação de **chapas**, que são obtidas, por sua vez, por laminação. O processo de laminação frequentemente introduz uma distribuição preferencial de orientações cristalinas ao longo da direção de laminação e/ou uma distribuição preferencial de planos cristalinos relativamente à normal da chapa. Essas distribuições preferenciais formam o que se conhece como **textura**. A textura, por sua vez, introduz anisotropia nas propriedades mecânicas da chapa. No caso da estampagem o que interessa é a anisotropia do comportamento plástico do material.

Uma série de parâmetros mecânicos são utilizados para definir a qualidade de uma chapa para fins de estampagem. Dentre os que já vimos temos o **coeficiente de encruamento**, n (que está ligado ao alongamento uniforme por meio da relação de Considère): quanto maior n , maior será a estampabilidade da chapa.

Coefficiente de anisotropia plástica

Outro parâmetro importante é obtido do ensaio de tração em um corpo de prova padronizado retirado da chapa, esse, conhecido como **coeficiente de anisotropia plástica**, R , é definido como:

$$R = \frac{\varepsilon_w^r}{\varepsilon_t^r} \quad (1.60)$$

onde ε_w^r e ε_t^r são respectivamente a deformação real observada na largura e na espessura do corpo de prova, respectivamente. Esse parâmetro, portanto, mede a resistência ao afinamento da chapa no processo de estampagem e quanto maior seu valor, maior será a probabilidade da chapa ser estampada com sucesso.

De acordo com informações do prof. Ronald L. Plaut e do dr. Antenor Ferreira Filho,¹⁵ a prática industrial de medida da R corresponde a:

- I. Aplicar uma deformação de cerca de 15% ao corpo de prova.
- II. Medir o alongamento ao longo do comprimento (ε_l^r) e ao longo da largura (ε_w^r).
- III. Calcular R usando a conservação do volume durante a deformação plástica.

Esse procedimento tem uma precisão maior que aquele sugerido pela definição anterior.

O coeficiente de anisotropia plástica é medido para diversas orientações e uma série de parâmetros é calculada em função dos valores obtidos. Apenas para exemplificar, o valor de R médio em relação às orientações da chapa é definido como:

$$\bar{R} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (1.61)$$

onde o subscrito se refere ao ângulo relativo entre a direção do comprimento do corpo de prova e a direção de laminação da chapa.

1.5.1 Aplicação do critério de Hill à estampagem

O critério de escoamento de Hill, introduzido na seção 1.1.5 é muito popular no contexto da estampagem, vamos aqui detalhar essa conexão. Para tanto seguiremos o desenvolvimento proposto pelo próprio Hill¹⁶

Iniciamos reescrevendo a equação 1.23 no referencial das tensões reais principais, assumindo implicitamente que elas coincidem com os eixos de anisotropia (ou seja DL, DT, DN) da chapa, assumimos ainda que o eixo 1 se refere a DL, o eixo 2 a DT e o eixo 3 a DN:

$$\bar{\sigma} = F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 1 = 0 \quad (1.62)$$

Impomos agora que os tensores de deformação e de tensão são coaxiais (ou seja, tem o mesmo referencial das deformações principais, assim podemos associar as taxas de deformação reais principais, $\dot{\varepsilon}_i$ às tensões reais principais por um parâmetro escalar λ , tal que:

¹⁵Informação pessoal.

¹⁶R. Hill, *Int. J. Mech. Sci.*, 35, 19 - 25 (1993).

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \lambda} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i} \quad (1.63)$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \lambda} = 2(G + H)\sigma_1 - 2H\sigma_2 - 2G\sigma_3 \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \lambda} = 2(F + H)\sigma_2 - 2H\sigma_1 - 2F\sigma_3 \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \lambda} = 2(F + G)\sigma_3 - 2G\sigma_1 - 2F\sigma_2 \end{cases} \quad (1.64)$$

Chapas se deformam em EPT, portanto impomos $\sigma_3 = 0$, obtendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \lambda} = 2(G + H)\sigma_1 - 2H\sigma_2 \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \lambda} = 2(F + H)\sigma_2 - 2H\sigma_1 \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \lambda} = -2G\sigma_1 - 2F\sigma_2 \end{cases} \quad (1.65)$$

Usando agora a definição de R (Equação 1.60) podemos escrever:

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3} = R_0 = \frac{H}{G} \quad (1.66a)$$

e

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_3} = R_{90} = \frac{H}{F} \quad (1.66b)$$

Usamos agora o resultado do Exercício 1.2 e obtemos duas identidades:

$$\frac{(1 + R_0)}{(\sigma_e^2)_{33}} - \frac{(1 + R_0)}{(\sigma_e^2)_{22}} = \frac{(1 - R_0)}{(\sigma_e^2)_{11}} \quad (1.67a)$$

e

$$\frac{(1 + R_{90})}{(\sigma_e^2)_{33}} - \frac{(1 - R_{90})}{(\sigma_e^2)_{22}} = \frac{(1 + R_{90})}{(\sigma_e^2)_{11}} \quad (1.67b)$$

Dessas expressões isolamos $(\sigma_e^2)_{11}$:

$$\frac{1}{(\sigma_e^2)_{33}} = \frac{R_0 + R_{90}}{(1 + R_0)R_{90}} \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} \quad (1.68a)$$

e

$$\frac{1}{(\sigma_e^2)_{22}} = \frac{(1 + R_{90})R_0}{(1 + R_0)R_{90}} \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} \quad (1.68b)$$

Com isso podemos obter expressões para os parâmetros F e G :

$$F = \frac{R_0}{(1 + R_0) R_{90}} \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} \quad (1.69)$$

e

$$G = \frac{1}{(1 + R_0)} \frac{1}{(\sigma_e^2)_{11}} \quad (1.70)$$

Substituindo na expressão 1.62 (e usando $H = R_0 G$) temos finalmente:

$$\sigma_1^2 + \frac{R_0 (1 + R_{90})}{R_{90} (1 + R_0) R_{90}} \sigma_2^2 - \frac{2R_0}{1 + R_0} \sigma_1 \sigma_2 = (\sigma_e^2)_{11} \quad (1.71)$$

1.5.2 Embutimento profundo, estiramento

Desde cedo ficou evidente para a indústria que os parâmetros de qualidade de chapas anteriormente discutidos são insuficientes para caracterizar seu desempenho durante o processo de estampagem. Este, normalmente, envolve a conformação de uma chapa de geometria simples (por exemplo, plana) para algo mais complexo (por exemplo, uma lata de refrigerante), desta forma a deformação local é muito heterogênea, diferindo ponto a ponto. Desta forma desenvolveram-se ensaios de estampagem que procuram simular o processo de forma mais aproximada. Estes ensaios são divididos em duas classes:

1. Ensaios de embutimento.
2. Ensaios de estiramento.

Os ensaios de embutimento normalmente envolvem a deformação de uma chapa fixa em uma matriz por meio de um punção, até que esta se rompa. Nos ensaios de embutimento a chapa pode deslizar lateralmente em relação à matriz, as deformações se aproximam de um cisalhamento puro com duas deformações principais de mesmo módulo, mas sinais invertidos, a espessura da chapa não se altera significativamente (exemplos, Swift e Fukui). Em ensaios de estiramento a chapa é mantida fixa em relação à matriz, as deformações se aproximam de tração biaxial, envolvendo, portanto, a redução da espessura da chapa (exemplos, Erichsen e Olsen).

1.5.3 Curva limite de conformação (CLC)

Os ensaios de embutimento e estiramento, por si só, não são capazes de modelar corretamente o processo de estampagem. Um avanço significativo, entretanto,

foi obtido por Keeler e Backofen em 1963 (vide [MC]), que descobriram que o surgimento de estrição em um ensaio de estiramento está associado a valores críticos das duas deformações principais no plano da chapa. Goodwin estendeu o conceito para a região onde uma das deformações principais é negativa (ou seja, em direção aos ensaios de embutimento profundo) e os diagramas resultantes, que relacionam os valores das deformações principais críticas para o surgimento da instabilidade se chamam **curvas limite de conformação (CLC)** (em inglês *Forming Limit Curves, FLC*).

A CLC é determinada em um ensaio de embutimento/estiramento proposto por Hecker em 1974 (vide [MC]). Neste ensaio imprime-se sobre a chapa por um processo serigráfico uma grade de círculos. Essa chapa é deformada por um punção hemisférico, porém as condições de deformação (dimensões da chapa, condições de lubrificação) são variadas, tal que elas resultem em diferentes combinações de deformações principais críticas, que são medidas na chapa deformada. Os pontos obtidos são, então, utilizados para a construção da CLC. Um exemplo, reproduzido da tese de doutoramento de Antenor Ferreira Filho,¹⁷ é mostrado na Figura 1.11.



Figura 1.11: Exemplo de corpo de prova marcado com a grade de círculo para a determinação de uma CLC. A linha de falha pode ser vista a meio caminho entre o equador e o polo do hemisfério. Fonte: Antenor Ferreira Filho.

¹⁷A. Ferreira Filho “Relações entre textura cristalográfica e estampabilidade de cinco aços ferríticos” São Paulo: Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, Escola Politécnica da USP, 2005.

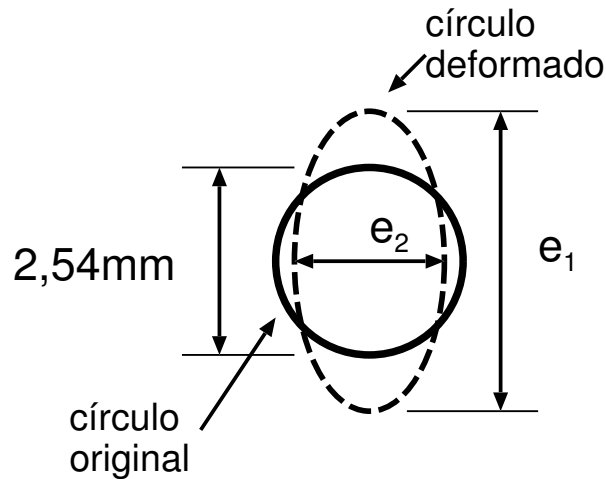


Figura 1.12: Definição das deformações maiores e menores.

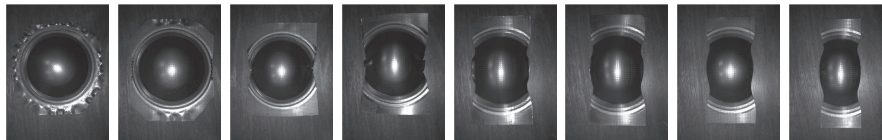
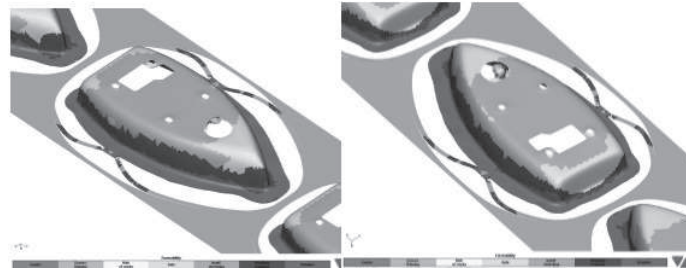


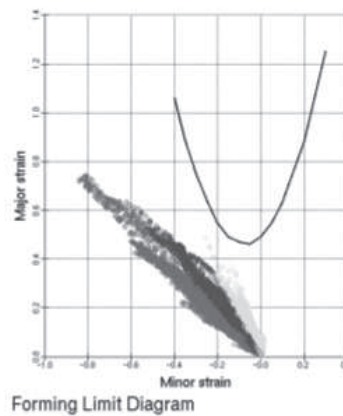
Figura 1.13: Exemplo de uma sequência de corpos de prova utilizados para a determinação de uma CLC. As condições de deformação variaram de estiramento para embutimento profundo da esquerda para a direita. Cortesia: Antenor Ferreira Filho.

As deformações críticas da chapa são medidas no ponto em que surge a instabilidade e são definidas de acordo com a Figura 1.12.

A deformação maior, designada por e_1 , e a deformação menor, designada por e_2 , são medidas no ponto de instabilidade. As condições de deformação são variadas, por exemplo, alterando a largura da chapa usada no ensaio, de forma a varrer as possíveis combinações de e_1 e e_2 e a curva resultante é a CLC. A Figura 1.13 mostra uma sequência de oito corpos de prova utilizados por Antenor Ferreira Filho para a determinação da CLC de um aço carbono.



(a)



(b)

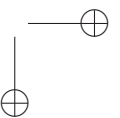
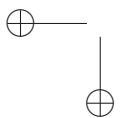
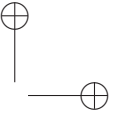
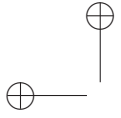
Figura 1.14: Exemplo de uma análise de estampagem de peça usando elementos finitos. Modelo (a) e Caminho de deformação comparado à CLC do material (b). Fonte: Antenor Ferreira Filho.

1.5.4 Análise de grade de círculos

O último ingrediente na análise do processo de estampagem é dado pela **análise de grade de círculos** (*Circle Grid Analysis*). Neste procedimento uma grade de círculos (como a do ensaio de CLC) é impressa sobre a chapa, que é usada para a estampagem da peça que se deseja fabricar. Após isto, as deformações maiores e as deformações menores são registradas em todas as posições da peça, o que permite identificar regiões críticas (ou seja, as que mais se aproximam da CLC do material). Pode-se proceder, desta maneira, a correções do projeto da matriz de estampagem ou alterações no material para evitar a ocorrência de perdas em produção.

Atualmente há uma linha de pesquisa muito importante que procura simu-

lar o processo de estampagem por cálculos numéricos pelo método de elementos finitos. A Figura 1.14 mostra um exemplo desta abordagem, retirada da tese de Antenor Ferreira Filho. Essa figura mostra o modelo de elementos finitos de uma chapa submetida à estampagem, simulando o processo de estampagem de uma capa metálica de ferro de passar roupa. Na Figura 1.14a o modelo é mostrado e diversas regiões são identificadas por um código de cores (que foi convertido em tons de cinza para uso nesse livro). A Figura 1.14b mostra o caminho de deformação percorrido nestas regiões em comparação com a CLC medida para o material (linha preta no diagrama). Nota-se que todas as regiões da peça estão na região segura de deformação, mas a região cinza clara é a que mais se aproxima de condições críticas.



Bibliografia

- [1] ANTHES, R. J. Modified rainflow counting keeping the load sequence. *International Journal of Fatigue*, v. 19, p. 529–535, 1997.
- [2] ARGON, A. S. Stability of plastic deformation. In: *The Inhomogeneity of plastic deformation*. Metals Park-OH, EUA: ASM, 1973. cap. 7, p. 161–189.
- [3] ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C. Evolution of plastic anisotropy in amorphous polymers during finite straining. *International Journal of Plasticity*, v. 9, p. 697–720., 1993.
- [4] BAŽANT, Z. P. Size effect on structural strength: a review. *Archive of Applied Mechanics*, v. 69, p. 703–725, 1999.
- [5] BAŽANT, Z. P.; LE, J.-L.; BAZANT, M. Z. Size effect on strength and lifetime distributions of quasibrittle structures implied by interatomic bond break activation. In: POKLUDA, J. et al. (Ed.). *Proceeding of the 17th European Conference on Fracture*. Brno, Rep. Tcheca, 2008. p. 78–92. (cdrom).
- [6] BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: DRYDEN, H. L.; KÁRMÁN, T. von (Ed.). *Advances in Applied Mechanics*. Nova Iorque: Academica Press, 1962. v. 7, p. 55–129.
- [7] BATHIAS, C. An engineering point-of-view about fatigue of polymer matrix composite materials. *International Journal of Fatigue*, v. 28, p. 1094–1099., 2006.
- [8] BAY, B. et al. Evolution of FCC deformation structures in polyslip. *Acta Metallurgica et Materialia*, v. 40, p. 205–219, 1992.
- [9] BILBY, B. A.; HOWARD, I. C.; LI, Z. H. Failure assessment diagrams. I. The tangency condition for ductile tearing instability. *Proceedings of the Royal Society in London A*, v. 444, p. 461–482, 1994.

- [10] BILBY, B. A.; HOWARD, I. C.; LI, Z. H. Failure assessment diagrams. II. The use of a single failure assessment line. *Proceedings of the Royal Society in London A*, v. 444, p. 483–496, 1994.
- [11] BILBY, B. A.; HOWARD, I. C.; LI, Z. H. Failure assessment diagrams. III. Mappings and failure assessment lines when the crack driving force is a functional. *Proceedings of the Royal Society in London A*, v. 444, p. 497–504, 1994.
- [12] BROBERG, K. B. Critical review of some theories in fracture mechanics. *International Journal on Fracture Mechanics*, v. 4, p. 1–18, 1968.
- [13] BROBERG, K. B. On stable crack growth. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 23, p. 215–237, 1968.
- [14] BULATOV, V. V.; ARGON, A. S. A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior: I. Numerical approach and strain localization. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 2, p. 167–184, 1994.
- [15] BULATOV, V. V.; ARGON, A. S. A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior: II. A study of the glass transition and structural relaxation. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 2, p. 185–202, 1994.
- [16] BULATOV, V. V.; ARGON, A. S. A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior: III. Plasticity in ordered versus disordered solids. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 2, p. 203–222, 1994.
- [17] CETLIN, P. R. Heterogeneidades de deformação: uma visão macroscópica. In: *Textura e relações de orientação: deformação plástica, recristalização e crescimento de grão*. 2. ed. São Paulo: IPEN, 2003. p. 1–18.
- [18] COBLE, R. L. A model for boundary diffusion controlled creep in polycrystalline materials. *Journal of Applied Physics*, v. 34, p. 1679–1682, 1963.
- [19] COTTERELL, B.; REDDEL, J. K. The essential work of plane stress ductile fracture. *International Journal on Fracture Mechanics*, v. 13, p. 267–277, 1977.
- [20] CRAIG, B. Environmentally induced cracking. In: *Metals Handbook vol 13: Corrosion*. 9. ed. Metals Park-OH, EUA: ASM, 1987.

- [21] DIETER, G. E. *Mechanical Metallurgy*. 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1976.
- [22] DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, p. 100–104, 1960.
- [23] ELBER, W. Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 2, p. 37–45, 1970.
- [24] FALK, M. L.; LANGER, J. S. Dynamics of viscoplastic deformation in amorphous solids. *Physical Review E*, v. 57, p. 7192–7205, 1998.
- [25] FATEMI, A.; YANG, L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, v. 20, n. 1, p. 9–34, 1998.
- [26] FATEMI, A.; SHAMSAEI, N. Multiaxial fatigue: An overview and some approximation models for life estimation. *International Journal of Fatigue*, v. 33, p. 948–958, 2011.
- [27] FERREIRA, P.; ROBERTSON, I.; BIRNBAUM, H. Hydrogen effects on the character of dislocations in high-purity aluminum. *Acta Materialia*, v. 47, p. 2991–2998, 1999.
- [28] FILHO, A. F. *Relações entre textura cristalográfica e estampabilidade de cinco aços ferríticos*. Tese (Doutorado) — São Paulo, 2005.
- [29] FRANCO JR, A. R. et al. The use of a Vickers indenter in depth sensing indentation for measuring hardness and elastic modulus. *Materials Research*, v. 7, p. 483, 2004.
- [30] FROST, H. J.; ASHBY, M. A. *Deformation mechanism maps: the plasticity and creep of metals and ceramics*. Disponível em: <<http://engineering.dartmouth.edu/defmech>>.
- [31] GIBALA, R.; HEHEMAN, R. F. *Hydrogen embrittlement and stress corrosion cracking*. Metals Park-OH, EUA: ASM, 1984.
- [32] GONZAGA, C. C. *Crescimento de trinca subcrítico em cerâmicas odontológicas: efeito do material (microestrutura) e do método de ensaio*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo, 2007.

- [33] GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions A*, v. 221, p. 163–198, 1921.
- [34] GY, R. Stress corrosion of silicate glass: a review. *Journal of Non-crystalline Solids*, v. 316, p. 1–11, 2003.
- [35] HALL, E. O. The deformation and ageing of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. *Proceedings of the Physical Society*, v. 64, p. 742–747, 1951.
- [36] HALL, E. O. The deformation and ageing of mild steel: II. Discussion of results. *Proceedings of the Physical Society*, v. 64, p. 747–753, 1951.
- [37] HARPER, J.; DORN, J. E. Viscous creep of aluminum near its melting temperature. *Acta Metallurgica*, v. 5, p. 654–665, 1957.
- [38] HARPER, J. G.; SHEPARD, L. A.; DORN, J. E. Creep of aluminum under extremely small stresses. *Acta Metallurgica*, v. 6, p. 509–518, 1958.
- [39] HAWARD, R. N.; THACKRAY, G. The use of a mathematical model to describe isothermal stress-strain curves in glassy thermoplastics. *Proceedings of the Royal Society in London*, v. 302, p. 453–472., 1968.
- [40] HERRING, C. Diffusional viscosity of a polycrystalline solid. *Journal of Applied Physics*, v. 21, p. 437–445, 1950.
- [41] HERTZBERG, R. W. *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. 4. ed. Londres: John Wiley & Sons, 1996.
- [42] HILL, R. A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society in London, Series A*, v. 193, p. 281 – 297, 1948.
- [43] HILL, R. *Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Oxford University Press, 1950.
- [44] HUANG, H. L. A study of dislocation evolution in polycrystalline copper during low cycle fatigue at low strain amplitudes. *Materials Science and Engineering A*, v. 342, p. 38–43, 2003.
- [45] HUANG, H. L.; HO, D. L. The observation and analysis of the dislocation morphology of fatigue crack tips at steady state propagation rates subject to a single peak load. *Materials Science and Engineering A*, v. 298, p. 251–261, 2001.

- [46] HUANG, H. L.; HO, J. L.; HU, T. L. Estimating the amplitude of plastic strain from the distribution of the dislocation morphologies in front of the crack tips. *Materials Science and Engineering A*, v. 386, p. 112–117, 2004.
- [47] HUANG, H. L.; HO, N. J. The observation of dislocation reversal in front of crack tips of polycrystalline copper after reducing the maximum load. *Materials Science and Engineering A*, v. 345, p. 215–222, 2003.
- [48] HULL, D.; BACON, D. J. *Introduction to dislocations*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.
- [49] HUTCHINSON, J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, p. 337–347, 1968.
- [50] INGLIS, C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, v. 55, p. 219–241, 1913.
- [51] IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 361–264, 1957.
- [52] KAMATH, M. S. The COD design curve: An assessment of validity using wide plate tests. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 9, p. 79–105, 1981.
- [53] KASSNER, M.; KUMAR, P.; BLUM, W. Harper-Dorn creep. *International Journal of Plasticity*, v. 23, p. 980–1000, 2007.
- [54] KRENN, C.; MORRIS JR, J. The compatibility of crack closure and k_{max} dependent models of fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, v. 21, Supplement 1, p. S147–S155, 1999.
- [55] KUHLMAN-WILSDORF, D. Q. Dislocation structures – how far from equilibrium? A: very close indeed. *Materials Science and Engineering A*, v. 315, p. 211–216, 2001.
- [56] KUHLMAN-WILSDORF, D.; LAIRD, C. Dislocation behavior in fatigue V. breakdown of loop patches and formation of persistent slip bands. *Materials Science and Engineering*, v. 46, p. 209–219, 1980.
- [57] KUHLMAN-WILSDORF, D.; LAIRD, C. Dislocation behavior in fatigue III. properties of the loop patches – do they participate in fatigue cycling? *Materials Science and Engineering*, v. 39, p. 127–139, 1979.

- [58] KUHLMAN-WILSDORF, D.; LAIRD, C. Dislocation behavior in fatigue II. friction stress and back stress as inferred from an analysis of hysteresis loops. *Materials Science and Engineering*, v. 37, p. 111–120, 1979.
- [59] KUHLMAN-WILSDORF, D.; LAIRD, C. Dislocation behavior in fatigue IV. quantitative interpretation of friction stress and back stress derived from hysteresis loops. *Materials Science and Engineering*, v. 39, p. 231–245, 1979.
- [60] KUHLMAN-WILSDORF, D.; LAIRD, C. Dislocation behavior in fatigue. *Materials Science and Engineering*, v. 27, p. 137–156, 1977.
- [61] KUHLMAN-WILSDORF, D.; WILSDORF, H. G. F.; WERT, J. A. LEDS theory of workhardening stages and “planar” versus “distributed” glide. *Scripta Metallurgica et Materialia*, v. 31, p. 729–734, 1994.
- [62] LAIRD, C.; CHARLESLEY, P.; MUGHRABI, H. Low energy dislocation structures produced by cyclic deformation. *Materials Science and Engineering*, v. 81, p. 433–450, 1986.
- [63] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. M. *Theory of elasticity*. Nova Iorque: Pergamon Press, 1970.
- [64] LANGDON, T. G. Grain boundary sliding revisited: Developments in sliding over four decades. *Journal of Materials Science*, v. 41, p. 597–609, 2006.
- [65] LEE, E. H. Elastic-plastic deformation at finite strain. *Transactions of ASME: J. Appl. Mech.*, v. 36, p. 1–6, 1969.
- [66] LINS, J. F. C. *Caracterização microestrutural de bandas de cisalhamento adiabáticas num aço IF estabilizado ao titânio*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Química de Lorena: Lorena-SP, 2005.
- [67] LOVE, A. E. H. *Mathematical theory of elasticity*. 4. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.
- [68] LOW JR, J. R. A review of microstructural aspects of cleavage fracture. In: AVERBACH, B. L. et al. (Ed.). *Fracture*. Cambridge-MA, EUA: MIT Press, 1959. cap. 4.
- [69] MARISSSEN, R. Craze growth mechanics. *Polymer*, v. 41, p. 1119–1129, 2000.

- [70] MARTIN, J. T.; KOERS, R. W. J. *CTOD and J-integral as a fracture parameter*. Abril 1998. Disponível em: <http://www.eurofitnet.org/sintap_SHELL-07.pdf>.
- [71] MCCLINTOCK, F. A. On the mechanics of fracture from inclusions. In: *Ductility*. Metals Park-OH, EUA: ASM, 1968. cap. 9, p. 255–277.
- [72] MCCLINTOCK, F. A.; ARGON, A. S. *Mechanical Behavior of Materials*. Reading-MA, EUA: Addison-Wesley, 1966.
- [73] MCLEAN, D. A note on the metallography of cracking during creep. *JIM*, v. 85, p. 468–472, 1956.
- [74] MEIJER, H.; GOVAERT, L. Mechanical performance of polymer systems: The relation between structure and properties. *Progress in Polymer Science*, v. 30, p. 915–938, 2005.
- [75] MEYERS, M. A.; ASHWORTH, E. A model for the effect of grain size on the yield stress of metals. *Philosophical Magazine A*, v. 46, p. 737–759, 1982.
- [76] MEYERS, M. A.; CHAWLA, K. K. *Mechanical Behavior of Materials*. Nova Iorque: Prentice-Hall, 1999.
- [77] MEYERS, M. A. et al. Shear localization in dynamic deformation of materials: microstructural evolution and self-organization. *Materials Science and Engineering A*, v. 317, p. 204–225, 2001.
- [78] MEYERS, M. A.; VÖHRINGER, O.; LUBARDA, V. A. The onset of twinning in crystals: a constitutive description. *Acta Materialia*, v. 49, p. 4025–4039, 2001.
- [79] MILNE, I. et al. Assessment of the integrity of structures containing defects. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 32, p. 3–104, 1988.
- [80] MILNE, I. et al. Background to and validation of CEGB report R/H/R6. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 32, p. 105–196, 1988.
- [81] MISHRA, R. S.; NANDY, T. K.; GREENWOOD, G. W. The threshold stress for dislocation-particle interaction controlled creep. *Philosophical Magazine*, v. 69, p. 1097 – 1109, 1994.

- [82] MISHRA, A. et al. Microstructural evolution in copper subjected to severe plastic deformation: Experiments and analysis. *Acta Materialia*, v. 55, p. 13–28, 2007.
- [83] MISHRA, R.; PARADKAR, A.; RAO, K. Steady state creep behaviour of a rapidly solidified and further processed Al-5 wt% Ti alloy. *Acta Metallurgica et Materialia*, v. 41, p. 2243–2251, 1993.
- [84] MONOBE, L. S. *Caracterização do envelhecimento da liga 20Cr32Ni+Nb fundida por centrifugação e de seu efeito sobre o comportamento mecânico a frio*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007.
- [85] MUGHRABI, H. The cyclic hardening and saturation behaviour of copper single crystals. *Materials Science and Engineering*, v. 33, p. 207–223, 1978.
- [86] MUKHERJEE, A. K. An examination of the constitutive equation for elevated temperature plasticity. *Materials Science and Engineering A*, v. 322, p. 1–22, 2002.
- [87] MUSKHELISHVILI, N. I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1963.
- [88] NABARRO, F. R. N. Do we have an acceptable model for power-law creep? *Materials Science and Engineering A*, v. 387-9, p. 659–664, 2004.
- [89] NAGUMO, M. Function of hydrogen in embrittlement of high-strength steels. *ISIJ International*, v. 41, p. 590–598, 2001.
- [90] NEWMAN JR, J. C. The merging of fatigue and fracture mechanics concepts: a historical perspective. *Progress in Aerospace Science*, v. 34, p. 347–390, 1998.
- [91] NIKISHKOV, G.; HEERENS, J.; SCHWALBE, K.-H. Transformation of CTOD δ_5 to CTOD δ_{BS} and J-integral for 3PB- and CT-specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 63, p. 573–589, 1999.
- [92] O’DOWD, N. P.; SHIH, C. F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter — II. Fracture applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 40, p. 939–963, 1992.

- [93] O'DOWD, N. P.; SHIH, C. F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter — I. Structure of fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 39, p. 989–1015, 1991.
- [94] OLIVER, W. C.; PHARR, G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, v. 7, p. 1564, 1992.
- [95] ORNAGHI, B. P. *Tenacidade à fratura, crescimento sub-crítico de trinca e limite de fadiga de compósitos resinosos experimentais com diferentes tamanhos de partícula de carga*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo, 2010.
- [96] PEARSON, S. Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 7, p. 235–247, 1975.
- [97] PERES, F. M. *Métodos de Mecânica da Fratura aplicados a Polietileno de Média Densidade destinado a extrusão de tubos*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2010.
- [98] PERES, F. M. *Desenvolvimento de métodos alternativos para a avaliação da resistência a fratura por fluência de resinas de polietileno utilizadas para a extrusão de tubos de água*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.
- [99] PETCH, N. J. The cleavage strength of polycrystals. *Journal of the Iron and Steel Institute*, v. 174, p. 25–28, 1953.
- [100] PHARR, G. M. Some observations on the relation between dislocation substructure and power law breakdown in creep. *Scripta Metallurgica*, v. 15, p. 713–717, 1981.
- [101] PHARR, G. M.; OLIVER, W. C.; BROTZEN, F. R. On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation. *Journal of Materials Research*, v. 7, p. 613, 1992.
- [102] PINTAÚDE, G. et al. A review of the reverse analysis for the extraction of mechanical properties using instrumented Vickers indentation. *Zeitschrift für Metallkde.*, v. 96, p. 1252–1256, 2005.

- [103] PULECIO, S. A. R. *Modelamento do ensaio de indentação instrumentada usando elementos finitos e análise dimensional – análise da unicidade, variações experimentais, atritos, geometria e deformações do indentador*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2010.
- [104] RICE, J. R.; ROSENGREN, G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, p. 1–12, 1968.
- [105] RIDOUT, S.; BAILEY, C. Review of methods to predict solder joint reliability under thermo-mechanical cycling. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v. 30, p. 400–412, 2007.
- [106] ROSSMANITH, H. P. Fracture mechanics and materials testing: the forgotten pioneers of the early 20th century. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v. 22, p. 781–797, 1999.
- [107] SACK, R. A. Extension of Griffith theory to rupture in three dimensions. *Proceedings of the Physical Society*, v. 58, p. 729–736, 1946.
- [108] SANTOS, A. F. *Efeito da irradiação por feixe de elétrons sobre as propriedades químicas e físicas de uma resina de polipropileno*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.
- [109] SANTOS, A. F. et al. Instrumented indentation testing of an epoxy adhesive used in automobile body assembly 637. *Polymer Testing*, v. 27, p. 632–637, 2008.
- [110] SCHÜTZ, W. A history of fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 54, p. 263–300, 1996.
- [111] SCHARDIN, H. Velocity effects in fracture. In: AVERBACH, B. L. et al. (Ed.). *Fracture*. Cambridge-MA, EUA: MIT Press, 1959. cap. 16, p. 297–330.
- [112] SCHIJVE, J. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *International Journal of Fatigue*, v. 25, p. 679–702, 2003.
- [113] SCHUH, C. A.; LUND, A. C. Atomistic basis for the plastic yield criterion of metallic glass. *Nature Materials*, v. 2, n. 7, p. 449 – 452, 2003.

- [114] SCULLY, J. D. *The theory of stress corrosion cracking in alloys*. Bruxelas: NATO Scientific Affairs, 1971.
- [115] SCURACCHIO, B. G. et al. Characterization of the texture evolution during thermomechanical processing of an Fe-30at% Al-6at% Cr alloy. *Intermetallics*, v. 15, p. 305–314, 2007.
- [116] SEDRICKS, A. J. *Corrosion of Stainless Steels*. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1996.
- [117] SENDECKYJ, G. P. Constant life diagrams — a historical review. *International Journal of Fatigue*, v. 23, p. 347–353, 2001.
- [118] SHARMA, S. M.; ARAVAS, N. Determination of the higher order terms in asymptotic crack tip solutions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 39B, p. 1043–1072, 1991.
- [119] SHIH, C. F. Relationships between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 29, p. 305, 1981.
- [120] SHIH, C. J.; NESTERENKO, V. F.; MEYERS, M. A. High-strain-rate deformation and comminution of silicon carbide. *Journal of Applied Physics*, v. 83, p. 4660–4671, 1998.
- [121] SILVA, M. C. *Caracterização das propriedades mecânicas e metalúrgicas do aço API 5L X80 e determinação experimental de curvas J-R para avaliação da tenacidade à fratura*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2004.
- [122] SILVA, P. S. C. P. da. *Comportamento mecânico e fratura de componentes e estruturas metálicas*. Curitiba: Univ. Federal do Paraná, 1999.
- [123] SMEKAL, A. Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit. *Naturwissenschaften*, v. 10, p. 799–804, 1922.
- [124] SNEDDON, I. N. Boussinesq’s problem for a rigid cone. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 44, p. 492, 1948.
- [125] SNEDDON, I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proceeding of the Royal Society in London A*, v. 187, p. 229–260, 1946.

- [126] SNEDDON, I. N. Boussinesq problem for a flat-ended cylinder. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 42, p. 260, 1946.
- [127] SOCIE, D.; BANNANTINE, J. Bulk deformation fatigue damage models. *Materials Science and Engineering A*, v. 103, p. 3–13, 1988.
- [128] SODERBERG, C. R. The interpretation of creep test for mechine design. *Transactions ASME*, v. 58, n. 15, 1936.
- [129] SOUZA, R. M. *Produção e caracterização de materiais compósitos e intermetálicos por infiltração a médias pressões*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1995.
- [130] SOUZA, S. A. *Ensaaios mecânicos de materiais metálicos: fundamentos teóricos e práticos*. 5. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1982.
- [131] SUNDER, R. Spectrum load fatigue—underlying mechanisms and their significance in testing and analysis. *International Journal of Fatigue*, v. 25, p. 971–981, 2003.
- [132] SYLVESTROWICZ, W.; HALL, E. O. The deformation and ageing of mild steel. *Proceedings of the Physical Society B*, v. 64, p. 495–502, 1951.
- [133] TAGAWA, T. et al. Investigation into the CTOD testing methodology revised in ASTM E1290. In: POKLUDA, J. et al. (Ed.). *Proceedings of the 17th European Conference on Fracture*. Brno, Rep. Tcheca, 2008. p. 522–529.
- [134] TANAKA, E. A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening. *European Journal of Mechanics A*, v. 13, p. 155–173, 1994.
- [135] TATEYAMA, Y.; OHNO, T. Atomic-scale effects of hydrogen in iron toward hydrogen embrittlement: Ab-initio study. *ISIJ International*, v. 43, p. 573–578, 2003.
- [136] TEMPLE, G. *Cartesian Tensors: an introduction*. Nova Iorque: Dover, 2004.
- [137] TERFAS, O. A. *Quantification of constraint effects in 3D fracture mechanics*. Tese (Doutorado) — Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, University of Glasgow, 2010.

- [138] THOMPSON, A. W. Effect of grains size on work hardening in nickel. *Acta Metallurgica*, v. 25, p. 83–86, 1977.
- [139] TIJSSENS, M.; GIESSEN, E. van der; SLUYS, L. Simulation of mode I crack growth in polymers by crazing. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, p. 7307–7327, 2000.
- [140] TIMOSHENKO, S. P. *Resistência dos materiais*. [S.l.]: Ao Livro Técnico, 1957.
- [141] TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. *Mecânica dos Sólidos*. Rio de Janeiro: LTC, 1993.
- [142] TSCHIPTSCHIN, A. P. et al (Eds.). *Textura e relações de orientação: deformação plástica, recristalização, crescimento de grão*. 3. ed. São Paulo: IPEN/CNEN, 2003.
- [143] VALIEV, R. Z.; LANGDON, T. G. Principles of equal-channel angular pressing as a processing tool for grain refinement. *Progress in Materials Science*, v. 51, p. 881–981, 2006.
- [144] WANG, C. H.; BROWN, M. W. Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue, part 1:theories. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 118, p. 367–370, 1996.
- [145] WANG, C. H.; BROWN, M. W. Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue, part 2:comparison with experimental results. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 118, p. 371–374, 1996.
- [146] WAYMAN, C. M. The phenomenological theory of martensite crystallography: Interrelationships. *Metallurgical and Materials Transactions*, v. 25A, p. 1787 – 1795, 1994.
- [147] WEERTMAN, J. Theory of steady-state creep based on dislocation climb. *Journal of Applied Physics*, v. 26, p. 1213–1217, 1955.
- [148] WEERTMANN, J.; WEERTMANN, J. R. *Elementary dislocation theory*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [149] WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v. 6 A, p. 49–43, 1939.

- [150] WIEGARDT, K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. *Zeitschrift für Mathematik Physik*, v. 55, p. 60–103, 1922.
- [151] WILLIAMS, M. L.; LANDEL, R. F.; FERRY, J. D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society*, v. 77, p. 3701–3707, 1955.
- [152] WOLF, K. Zur Bruchtheorie von A. Griffith. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, v. 3, p. 197–112, 1922.
- [153] YAVARI, P.; MILLER, D. A.; LANGDON, T. G. An investigation of Harper-Dorn creep — I. Mechanical and microstructural characteristics. *Acta Metallurgica*, v. 30, p. 871–879, 1982.
- [154] YOSHIMURA, H. N. *Produção e caracterização de compósitos de matriz de Al reforçados por partículas de SiC obtidos por extrusão de pós*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1994.
- [155] ZHANG, M.-X.; KELLY, P. M. Crystallographic features of phase transformations in solids. *Progress in Materials Science*, v. 54, p. 1101 – 1170, 2009.

Índice remissivo

Índice de assuntos

- Critério de falha, vii
critério de Griffith, xix
critério de Hill, xvi
critério de McClintock –
Walsh, xxi
critério de Mohr – Coulomb,
xix
critério de Rankine, xviii
critério de Treska, xi
critério de von Mises, viii
em polímeros, xxiii
tensão equivalente, viii, xxviii
- Critério de escoamento, vii
de Hill, xxxiii
- Direção
de laminação (DL), xvii
normal (DN), xvii
transversal (DT), xvii
- Estampabilidade, xxxii
análise da grade de círculos,
xxxviii
curva limite de conformação,
xxxvi
- Materiais ortotrópicos, xvi
- Material idealmente plástico, xxv
- Potencial plástico, xii
- Regime plástico
coeficiente de anisotropia
plástica, xxxii
coeficiente de encruamento, xx-
xii
- Relações de Lévy-Mises, xii
- Teoria das deformações finitas, xxv

Índice de autores

- Ainsworth, R. A., 211
Allen, N. S., 466
Andrade, E. N. da C., 333
Anthes, R. J., 447
Aravas, N., 211
Argon, A. S., 127, 154, 222, 275
Arruda, M., 245
Ashby, M. F., 364
Ashworth, E., 261
Averbach, B. L., 311
Azevedo, C. R. F., 291, 304, 306
- Bazant, Z. P., 103, 107
Bacon, D. J., 250
Bailey, C., 448
Barenblatt, G. I., 91
Basquin, O., 383
Bathias, C., 511
Bay, B., 270
Bazant, M. Z., 107
Bilby, B. A., 213
Birnbaum, H. K., 471
Boyce, M. C., 245
Broberg, K. B., 216
Brown, M. W., 456
Bulatov, V. V., 275
- Campos, M. F., 301
Castro, N. A., 301
Charsley, P., 424
Chawla, K. K., 2, 486
Coble, R. L., 354
Coffin, L. F., 384
Cotterel, B., 218
Cottrell, A., 334, 421
Craig, B., 467
- Czigány, T., 509
- Dieter, G. E., 237, 284, 332
Donald, J. K., 407
Dorn, J. E., 335, 355
Dowling, R. A., 211
Dugdale, D. S., 190
- Edge, M., 466
Elber, W., 412
- Falk, M. L., 276
Falleiros, I. G. S., 3
Fatemi, A., 406, 450, 459
Felbeck, D. K., 311
Ferreira Filho, A., 179, 180, 183
Ferreira, P. J., 471
Ferry, J. D., 234
Frost, H. J., 364
- Gassner, E., 438
Gere, J. E., 18
Gibala, R., 467
Goldenstein, H., 3
Gonçalves, M., 326
Govaert, L., 509
Grant, N. J., 336
Gregori, F., 283
Griffith, A. A., 84
Gy, R., 478
- Hahn, G. T., 311
Hall, E. O., 260
Hansen, N., 270
Harper, J. G., 355
Haward, R. N., 242
Heheman, R. F., 467

- Herring, C., 351
Hertzberg, R. W., 3, 467
Hill, R., 158, 162, 171, 176
Ho, N. J., 432
Howard, I. C., 213
Hu, T. L., 432
Huang, H. L., 432
Hughes, D. A., 270
Hull, D., 250
Hutchinson, J. W., 206
- Inglis, C. E., 72
Irwin, G. R., 91
- Kad, B. K., 283
Kamath, M. S., 200
Koers, R. W. J., 207
Krenn, C. R., 414
Kuhlman-Wilsdorf, D., 259, 263,
267, 268, 270, 418
- Laird, C., 418, 424
Landau, L., 2
Landel, R. F., 234
Landgraf, F. J. G., 3, 301
Langdon, T. G., 277, 355, 359
Langer, B. F., 402
Langer, J. S., 276
LaSalvia, J. C., 273
Le, J.-L., 107
Lee, E. H., 171
Li, Z. H., 213
Lifshitz, E. M., 2
Lima, N. B., 3
Lins, J. F. C., 273
Love, A. E. H., 73
Low Jr, J. R., 306
Lubarda, V. A., 302
- Magnabosco, R., 301
- Manson, S. M., 384
Marinucci, G., 487, 493
Marissen, R., 298
Martin, J. T., 207
McClintock, F. A., 127, 154, 222,
292
McLean, D., 372
Meijer, H. E. H., 509
Meyers, M. A., 2, 261, 273, 283,
302, 486
Miller, D. A., 355
Milne, I., 211
Miner, A., 402
Mishra, A., 283
Mishra, R. S., 363
Monobe, L. S., 288, 309
Morris Jr., J. W., 414
Mughrabi, H., 418, 424
Mukherjee, A. K., 347
Muskhelishvili, N. I., 2
- Nabarro, F. R. N., 358
Nagumo, M., 472
Nesterenko, V. F., 273
Newman Jr, J. C., 408, 410, 462
Nikishnov, 207, 210
- O’Dowd, N. P., 211
Ohno, T., 472
Ornaghi, B. P., 312
Orowan, E., 264
- Padilha, A. F., 3
Paradkar, A. G., 363
Paris, P. C., 407
Pearson, S., 410
Peres, F. M., 218, 297, 298, 314,
480
Petch, N. J., 260
Pharr, G. M., 358

- Plaut, R. L., 179, 481
Pålmgren, A., 402
Qian, J., 459
Rao, K. N., 363
Reddel, K., 218
Ribeiro, A. S., 398
Rice, J. R., 206
Ridout, S., 448
Robertson, I. M., 471
Rosengren, G. F., 206
Rossmannith, H. P., 72
Sack, R. A., 89
Sadananda, K., 413
Santos, A. F., 483
Schön, C. G., 3, 481
Schütz, W., 379, 437
Schardin, H., 311
Schijve, J., 379, 438
Scully, J. D., 467
Scuracchio, B. G., 481
Sedricks, A. J., 467
Sendekyj, G. P., 386
Shamsaei, N., 450
Sharma, M., 211
Shepard, L. A., 355
Sherby, O. D., 335
Shih, C. F., 198, 211
Siciliano Jr., F., 326
Silva, M. C., 320
Silva, P. S. C. P., 3, 197
Smekal, A., 72
Sneddon, I. N., 89
Sodeberg, C. R., 343
Sokolowski, A., 339
Sorensen, S. V., 402
Souza, R. M., 487
Souza, S. A., 148
Stewart, A. T., 211
Sunder, R., 439, 444
Sylvestrowicz, W., 260
Szabó, J. S., 509
Tada, H., 407
Tanaka, E., 453
Tayeyama, Y., 472
Taylor, G. I., 259
Tegawa, T., 208
Temple, G., 513
Terfas, O. A., 210
Thackray, G., 242
Thijssen, M. G. J., 298
Thomas, D. A., 311
Thompson, A. W., 261
Timoshenko, S. P., 18, 80
Tschiptschin, A. P., 3
Umehara, D. H., 481
Vöhringer, O., 302
Valiev, R. Z., 277
Vasudevan, V. K., 413
Wang, C. H., 456
Weertmann, J., 250, 357
Weertmann, J. R., 250
Wert, J. A., 259, 268
Westergaard, H. M., 89
Wiegardt, K., 72
Williams, M. L., 234
Wilsdorf, H. G. F., 259, 268
Wolf, K., 72
Xue, Q., 273
Yang, L., 406
Yavari, P., 355
Yoshimura, H. N., 490, 493