PSI3211 – Circuitos Elétricos I – Aula 25

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

Junho de 2017

Vários desses slides foram inspirados nas transparências da Profa. Denise Consonni

Batimentos

Circuito RLC paralelo sub-amortecido (oscilatório), excitado por $i_s(t) = I\cos(\omega t)H(t)$

- Resposta completa

$$\boxed{v(t) = \underbrace{V\cos(\omega t + \phi)}_{\text{resp. permanente}} + \underbrace{Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \psi)}_{\text{resp. transitória}}}$$

  - ω_d: freq. própria amortecida ($\approx \omega_0$ para $\alpha \ll \omega_0$)
  - α: fator de amortecimento
  - A e ψ: obtidas a partir das condições iniciais
  - V e ϕ se calculam a partir do RPS

- Supondo $A = V$ e $\psi = \phi$, obtém-se:

$$\boxed{v(t) = V\left[\cos(\omega t + \phi) + e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)\right]}$$

Batimentos

- se o circuito for altamente oscilatório ($\alpha \ll \omega_0$)

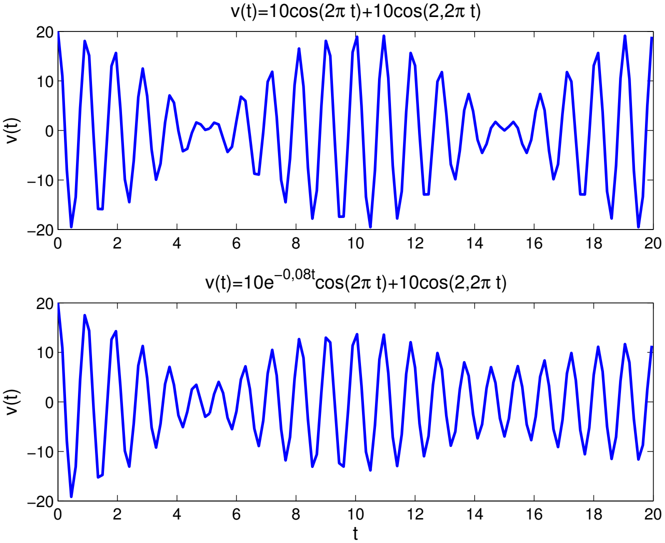
$$\boxed{v(t) \approx V\left[\cos(\omega t) + \cos(\omega_d t)\right]}$$

num número pequeno de ciclos,
ou ainda:

$$\boxed{v(t) \approx 2V\left[\cos\left(\frac{\omega - \omega_d}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_d}{2} t\right)\right]}$$

- A co-senóide de frequência mais alta está modulada pela co-senóide de frequência mais baixa. Diz-se que há batimento entre a frequência de excitação e a frequência própria amortecida.
- frequência do batimento: $|\omega - \omega_d|$

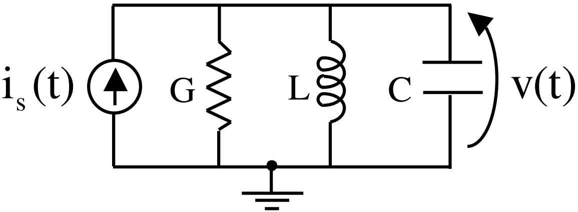
Batimentos



v(t)=10cos(2π t)+10cos(2,2π t)
20
10
0
−10
−20
v(t)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
v(t)=10e^{−0,08t}cos(2π t)+10cos(2,2π t)
20
10
0
−10
−20
v(t)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
t

RLC paralelo - Impedância

$$\mathrm{R} = 1500\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 600\ \mu\mathrm{H}, \quad \mathrm{C} = 100\ \mathrm{nF}$$



Impedância

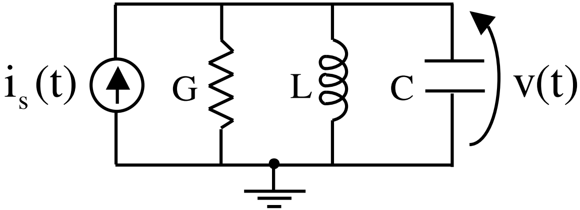
$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}}$$

Módulo e fase

$$|Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}} \qquad \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

RLC paralelo - Ressonância

$$R = 1500\ \Omega, \quad L = 600\ \mu H, \quad C = 100\ nF$$



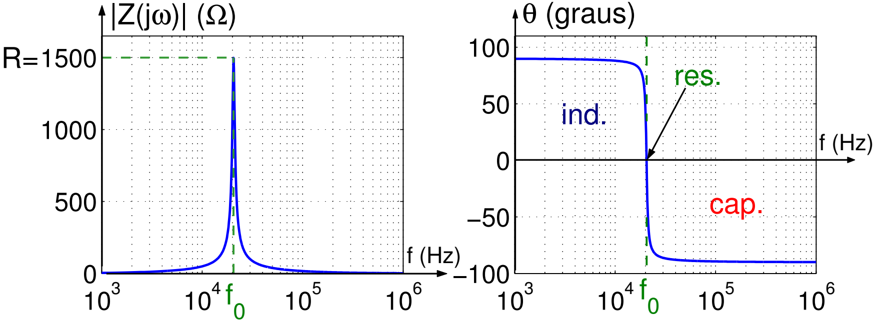
Frequência de ressonância

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

- Fase da impedância é nula
- Circuito é puramente resistivo
- Módulo da impedância é máximo (módulo da tensão é máximo) ou Módulo da admitância é mínimo (módulo da corrente é mínimo)

RLC paralelo - Ressonância

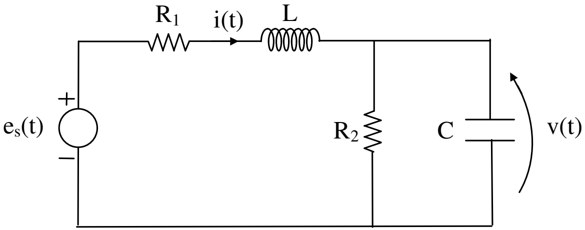
$$\mathrm{R} = 1500\ \Omega,\quad \mathrm{L} = 600\ \mu\mathrm{H},\quad \mathrm{C} = 100\ \mathrm{nF}$$



Freq. de ressonância: $\mathrm{f_r} = \mathrm{f_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} \approx 20{,}55\ \mathrm{kHz}$

Exemplo da aula passada

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\left(\frac{R_1}{L}+\frac{1}{R_2C}\right)\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)v(t)=\frac{1}{LC}e_s(t)\,.$$



Dados:
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$L = 0,5\ \text{H}$
$C = 0,01\ \text{F}$
$v(0\_) = 5\ \text{V}$
$i(0\_) = 0$

$$e_s(t) = 10\sqrt{2}\ \cos(\ 10t + 45^o), \quad (\text{V, s})$$

Exemplo da aula passada

Impedância

$$\boxed{Z(j\omega) = R_1 + j\omega L + \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + j\omega C}}$$

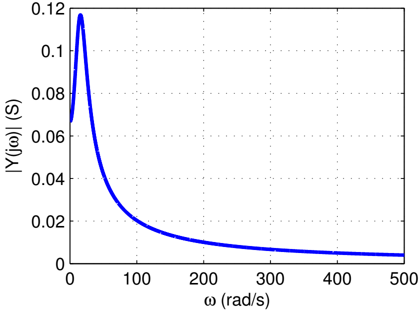
Frequência própria não amortecida

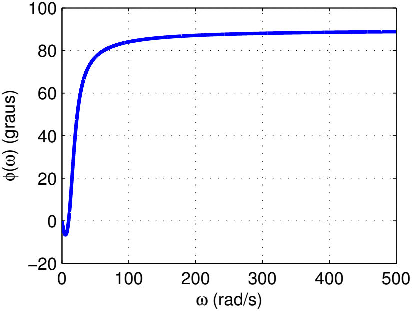
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ rad/s}}$$

Qual é a frequência de ressonância desse circuito?

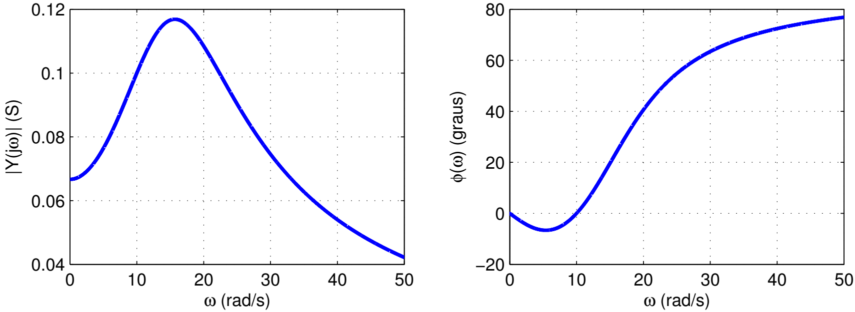
Ressonância é a frequência em que um circuito RLC se torna puramente resistivo

Exemplo de outros circuitos de $2^{\underline{a}}$ ordem – Resposta em frequência





Exemplo de outros circuitos de 2ª ordem – Resposta em frequência

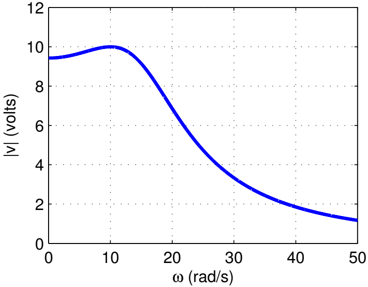


Pela definição anterior,

$$\boxed{\omega_r = 10 \text{ rad/s}}$$

Exemplo de outros circuitos de $2^{\underline{a}}$ ordem – Resposta em frequência

Em $\omega_r = 10 \text{ rad/s}$, a tensão no capacitor é máxima em módulo

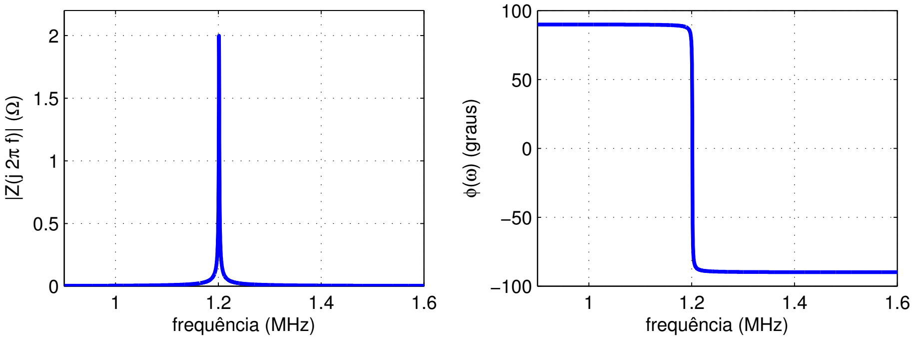


Em geral, fica complicado encontrar a ressonância de circuitos que não se reduzem ao RLC série ou paralelo.

RLC paralelo - Ressonância

Valores típicos para sintonizar uma rádio AM

$$\mathrm{R} = 2\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 195\ \mathrm{pH}, \quad \mathrm{C} = 90\ \mu\mathrm{F}$$



Freq. de ressonância:

$\mathrm{f_r} = \mathrm{f_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} = 1{,}2\ \mathrm{MHz} = 1200\mathrm{kHz}$ (Rádio CULTURA BRASIL AM)

Frequência de corte

- Para o Circuito RLC paralelo

$$|Z(j\omega)|_{\max} = |Z(j\omega_0)| = R$$

Quais as frequências ω_{c_1} e ω_{c_2} nas quais $|Z(j\omega)| = R/\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{R}}} \Rightarrow$$

$$\omega_{c_1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

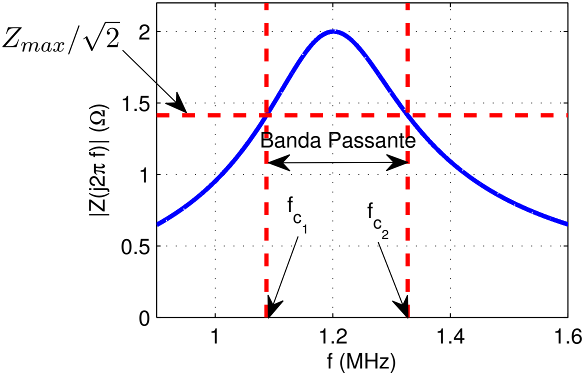
$$\omega_{c_2} = +\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- É comum definir a banda passante que neste caso vale

$$\boxed{B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{1}{RC}}$$

Frequência de corte

$$\mathrm{R} = 2\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 195\ \mathrm{pH}, \quad \mathrm{C} = 1{,}22\ \mathrm{nF}$$



- $Z_{\max}/\sqrt{2} = 1{,}4142\ \Omega$
- $\omega_{c_1} = 6{,}8313\ \mathrm{Mrad/s} \Rightarrow f_{c_1} = 1{,}0872\ \mathrm{MHz}$
- $\omega_{c_2} = 8{,}3410\ \mathrm{Mrad/s} \Rightarrow f_{c_2} = 1{,}3275\ \mathrm{MHz}$
- $B = 1.5097\ \mathrm{Mrad/s} \quad (0{,}2403\ \mathrm{MHz})$

Índice de mérito

Vamos voltar ao circuito RLC paralelo.

- Esse circuito funciona como um passa-faixa com banda passante

$$\boxed{B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{1}{RC}}$$

- O índice de mérito ou fator de qualidade é definido como

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{B}}$$

- Para o RLC paralelo, temos

$$\boxed{Q_0 = RC\omega_0}$$

- Substituindo $C = 1/(\omega_0^2 L)$, chega-se a

$$\boxed{Q_0 = RC\omega_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Índice de mérito

A admitância do circuito RLC paralelo pode ser escrita em função de Q_0:

$$Y(j\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

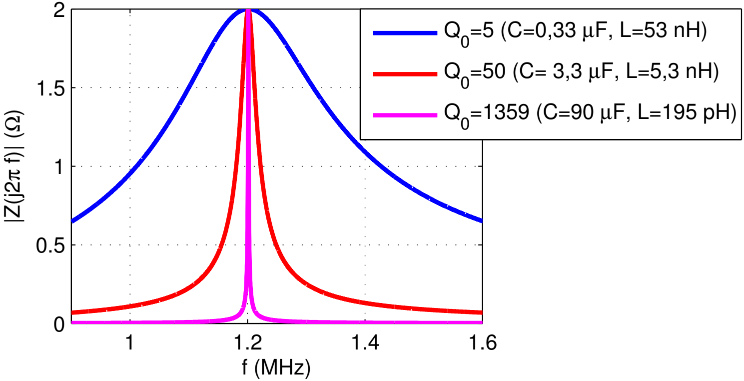
$$= G\left[1 + j\left(\frac{\omega C}{G} - \frac{R}{\omega L}\right)\right]$$

$$= G\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\omega_0 C}{G} - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{R}{\omega_0 L}\right)\right]$$

$$= G\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

Índice de mérito

Impedância do RLC paralelo em função de Q_0, $R = 2\ \Omega$ (fixo)



Q_0 alto, B estreita, alta seletividade, altamente oscilatório (tempo)

Índice de mérito

O índice de mérito também é definido como

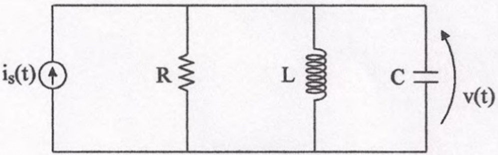
$$\boxed{Q_0 = \frac{\text{potência reativa}}{\text{potência média}}}$$

Para circuitos RLC paralelo ou série vale

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}}$$

Exercício

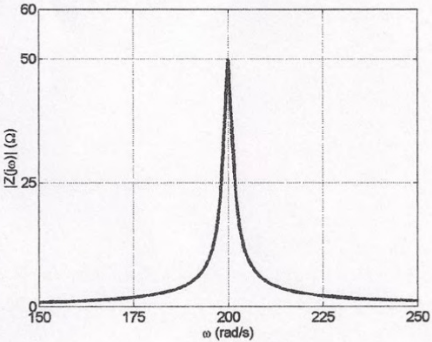
Para os **testes 5 e 6**, considere o circuito R, L, C paralelo da Figura 3, cujo módulo da resposta em frequência $Z(j\omega) = \dfrac{\hat{V}}{\hat{I}_s}$ é mostrado na Figura 4.



$i_s(t) = I\cos(\omega t + \theta)$

$C = 0{,}01F$

Figura 3



Exercício

5 – O índice de mérito Q do circuito vale:

a) 100

b) 50

c) 25

d) 5

e) n.d.a.

Exercício

6 – Para determinadas condições iniciais obteve-se o gráfico da tensão do capacitor mostrado na Figura 5. Assinale a opção que contém o valor mais próximo de uma possível frequência ω do gerador (em rad/s).

a) 230

b) 185

c) 15

d) 200

e) n.d.a.

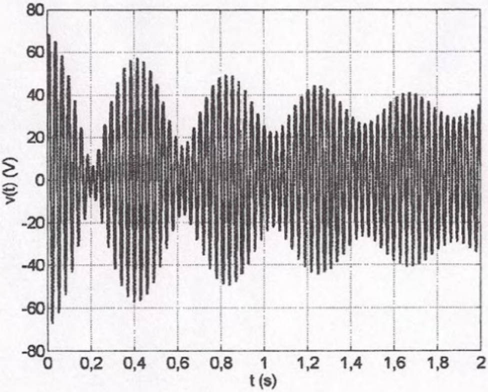


Figura 5