PSI3211 – Circuitos I – Aula 18

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

Maio de 2017

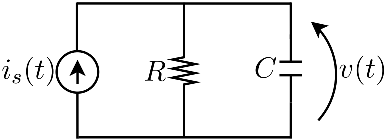
Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

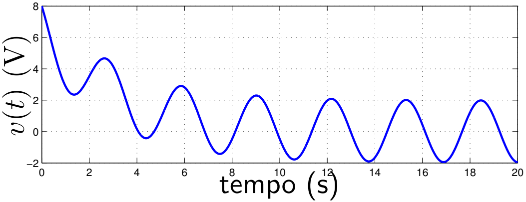
- analisar o transitório de circuitos de primeira ordem, excitados por um degrau ou por um sinal senoidal

Como analisar o transitório?

- Até agora, sabemos obter tensões e correntes dos circuitos em regime permanente. O que acontece antes do regime?
- Considere o circuito abaixo com $v(0) = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 6\ \Omega$ e $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\text{o}})H(t)$, (V,s)



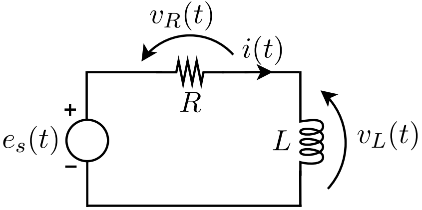
- A tensão do capacitor ao longo do tempo é dada por



- Como obter uma expressão para $v(t)$, $t \geq 0$? Como analisar o circuito antes do regime permanente senoidal se estabelecer?

Circuito RL

Considere o circuito RL



Escrevendo a segunda lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$v_L(t) + v_R(t) = e_s(t)$$

Usando as relações constitutivas, chega-se a

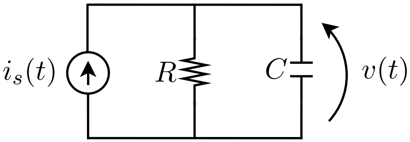
$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t)$$

Dividindo essa equação por L, obtemos

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t)}$$

Circuito RC

Analogamente, considere o circuito RC



Escrevendo a primeira lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$i_C(t) + i_R(t) = i_s(t)$$

Usando as relações constitutivas, chega-se a

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) = i_s(t)$$

Dividindo essa equação por C, obtemos

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_s(t)}$$

Circuitos RL e RC

Os circuito RL e RC são descritos respectivamente pelas seguintes equações diferenciais

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t)}$$

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_s(t)}$$

Essas equações diferenciais são classificadas como:

- de primeira ordem, pois aparece no máximo a primeira derivada da função incógnita
- ordinária, pois não há derivadas parciais (derivamos apenas com relação ao tempo, que é a única variável independente)
- linear, pois não há funções não lineares da incógnita e/ou de suas derivadas
- a coeficientes constantes, pois consideramos que o resistor, o indutor e o capacitor têm valores fixos que não variam no tempo

Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

Considere a equação diferencial do tipo

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

em que

- $x(t_0) = x_0$ é a condição inicial
- $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$
- $x(t)$ é a função incógnita
- τ é uma constante real diferente de zero
- $f(t)$ é uma função dada

Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

A solução geral da equação

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

para $t \geq t_0$ é dada por

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

em que

- $x_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

- $x_p(t)$ é uma solução particular da equação completa.

A seguir, vamos obter $x_h(t)$ e $x_p(t)$.

Solução da equação homogênea

Vamos primeiramente resolver a equação homogênea

$$\dot{x}_h(t) = -\frac{1}{\tau}x_h(t)$$

Que função não nula tem derivada proporcional a ela própria?

Uma possível candidata é a função exponencial:

$$x_h(t) = Ae^{p(t-t_0)}$$

cuja derivada vale

$$\dot{x}_h(t) = Ape^{p(t-t_0)}$$

em que A e p são constantes.

Substituindo na equação homogênea, chega-se a

$$\underbrace{Ae^{p(t-t_0)}}_{\neq 0}\left(p + \frac{1}{\tau}\right) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; p = -\frac{1}{\tau},$$

o que leva a

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}$$

A constante A será determinada posteriormente.

Constante de tempo

- A constante τ que aparece dividindo $x(t)$ na equação completa aparece na solução da equação homogênea dividindo $-(t - t_0)$ no argumento da exponencial
- Para $\tau > 0$, quanto maior o valor de τ, mais lentamente a solução da equação homogênea $x_h(t)$ se aproxima de zero
- Por análise dimensional, τ deve ter unidade de tempo e por isso é chamada de constante de tempo
- A constante de tempo do circuito RL vale

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- A constante de tempo do circuito RC vale

$$\tau = RC$$

Solução particular da equação completa

A solução da equação completa é dada agora por

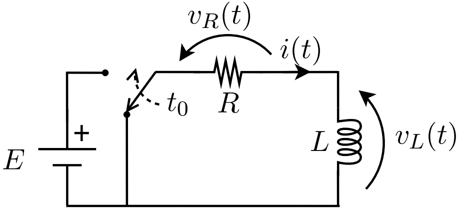
$$x(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_p(t)$$

Calculando o limite para $t \to \infty$, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \underbrace{\lim_{t\to\infty} Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}_{=0} + \lim_{t\to\infty} x_p(t)$$

uma solução particular da equação completa é dada pela resposta permanente de $x(t)$, ou seja, a expressão de $x(t)$ quando $t \to \infty$.

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



Considere $i(t_0) = i_0$ e $e_s(t) = EH(t - t_0)$, em que
$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ representa a função degrau unitário.

- O que acontece em regime?
  Estamos excitando o circuito com uma tensão constante E a partir de $t = t_0$. Para $t \to \infty$, o indutor se comportará como um curto, o que leva a

$$i(t)\big|_{t\to\infty} = \frac{E}{R} = i_p(t)$$

que é a solução particular da equação completa

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau

- A solução da equação completa é

$$\begin{aligned} i(t) &= Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + i_p(t) \\ &= Ae^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R} \end{aligned}$$

- Precisamos apenas descobrir o valor da constante A. Para isso, vamos impor a condição inicial, ou seja,

$$i(t_0) = i_0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = i_0 - \frac{E}{R}$$

- A solução fica

$$\boxed{i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R},\ t \geq t_0}$$

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau

- Se $e_s(t) = 0$, dizemos que o circuito está livre e a resposta se reduz a

$$i_{\text{livre}}(t) = i_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}, \; t \geq t_0,$$

que é chamada de resposta livre e ocorre devido apenas às condições iniciais.

- Se $i_0 = 0$ e $e_s(t) = EH(t - t_0)$, a resposta se reduz a

$$i_{\text{forçada}}(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}\right), \; t \geq t_0.$$

que é chamada de resposta forçada e ocorre devido apenas à função de excitação.

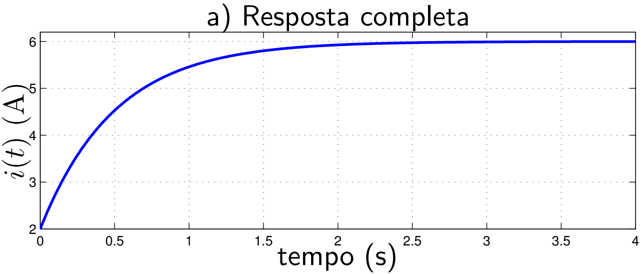
- Usando o princípio da superposição, podemos verificar que

$$i(t) = i_{\text{transitória}}(t) + i_{\text{permanente}}(t)$$

e

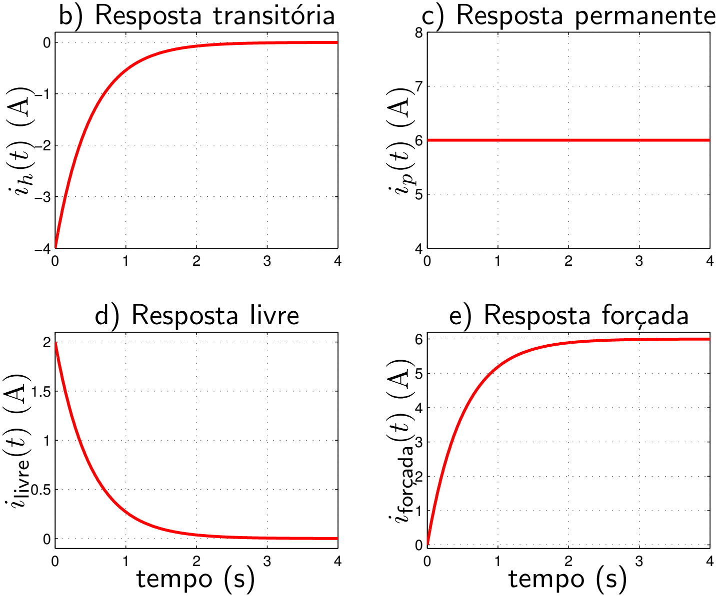
$$i(t) = i_{\text{livre}}(t) + i_{\text{forçada}}(t).$$

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



Resposta completa do circuito RL, considerando $t_0 = 0$, $i_0 = 2$ A, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$, $e_s(t) = 12H(t)$, (V,s).

Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



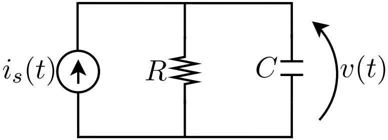
$t_0 = 0,\ i_0 = 2\ \text{A},\ L = 1\ \text{H},\ R = 2\ \Omega,\ e_s(t) = 12H(t),\ (\text{V,s})$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

Considere

- $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\text{o}})H(t)$, (A,s)
- condição inicial $v(0) = 8$ V
- $C = 0{,}5$ F
- $R = 6\ \Omega$

no circuito



Precisamos resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{3}v(t) = 4\cos(2t + 125{,}54^{\text{o}})$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

- Como a excitação é senoidal e o circuito é linear, sabemos que em RPS, a tensão do capacitor também será senoidal com $\omega = 2$ rad/s
- Para obter $v_p(t)$, podemos usar fasores. A impedância desse circuito é dada por

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\Rightarrow Z(j2) = \frac{6}{1 + j6} = 0{,}1622 - j0{,}9730 = 0{,}9864e^{-j80{,}54^{\mathrm{o}}}\ \Omega$$

- O fasor da tensão do capacitor vale

$$\widehat{V}_p = Z(j2) \cdot \widehat{I}_s = 0{,}9864e^{-j80{,}54^{\mathrm{o}}} \cdot 2e^{j125{,}54^{\mathrm{o}}} = 1{,}9728e^{j45^{\mathrm{o}}}\ \mathrm{V}$$

- Consequentemente, a expressão de sua resposta permanente é

$$v_p(t) = 1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}),\ (\mathrm{V{,}s})$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

- Lembrando que a constante de tempo do circuito RC vale $\tau = RC = 3$ s, podemos obter a solução completa dada por

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ae^{-t/3} + 1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}),\ \ t \geq 0$$

- Ainda precisamos descobrir o valor de A e para isso, vamos impor a condição inicial $v(0) = 8$ V:

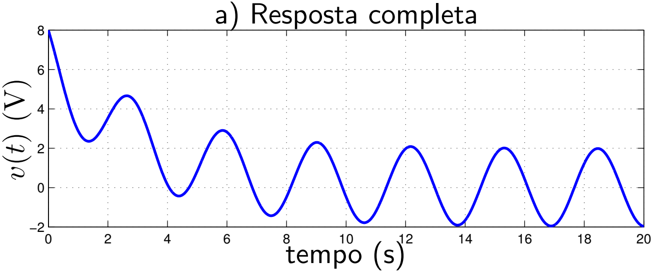
$$v(0) = 8 = A + 1{,}9728\cos(2 \cdot 0 + 45^{\mathrm{o}})$$

$$\Rightarrow A = 8 - 1{,}9728\cos(45^{\mathrm{o}}) = 6{,}6050 \text{ V}$$

- Assim, a expressão da tensão do capacitor para $t \geq 0$ vale

$$\boxed{v(t) = 6{,}6050\ e^{-t/3} + 1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}),\ \text{(V, s)}}$$

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal



Resposta completa do circuito RC, considerando $t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 6$ Ω, $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\rm o})H(t)$, (V,s)

Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

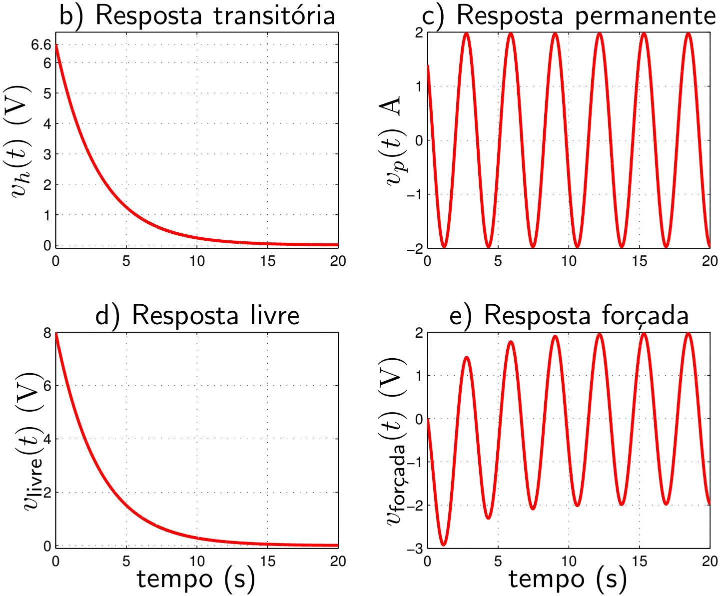
A expressão da resposta completa é composta de dois termos: resposta transitória e resposta permanente.
A resposta livre será dada por

$$v_{\text{livre}}(t) = v_0 e^{-t/\tau} = 8\, e^{-t/3}.$$

e a resposta forçada por

$$v_{\text{forçada}}(t) = v(t) - v_{\text{livre}}(t) = \underbrace{-1{,}3950}_{=6{,}6050-8}\; e^{-t/3} + 1{,}9728 \cos(2t + 45^{\text{o}}).$$

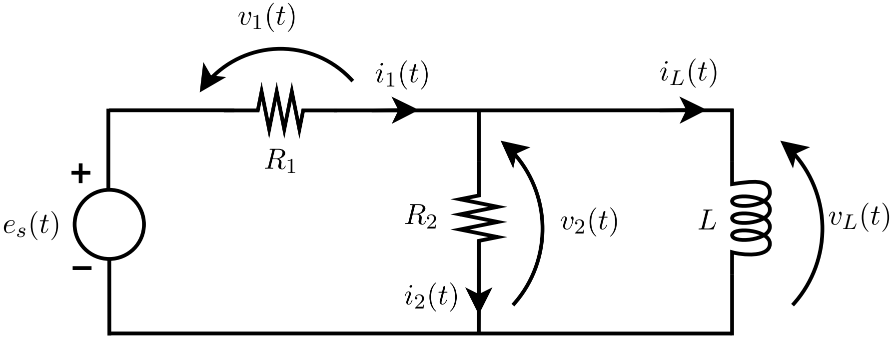
Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal



$t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 6\ \Omega$, $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\text{o}})H(t)$, (V,s)

Outros circuitos de 1ª ordem – Exemplo 3

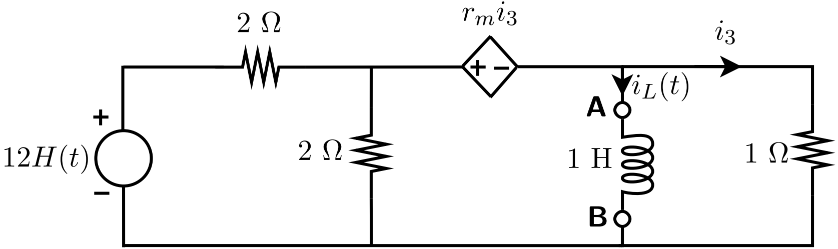
Considere o circuito abaixo com $i_L(t_0) = i_0$



Determine a expressão de $i_L(t)$ para $t \geq t_0$

Outros circuitos de 1ª ordem – Exemplo 4

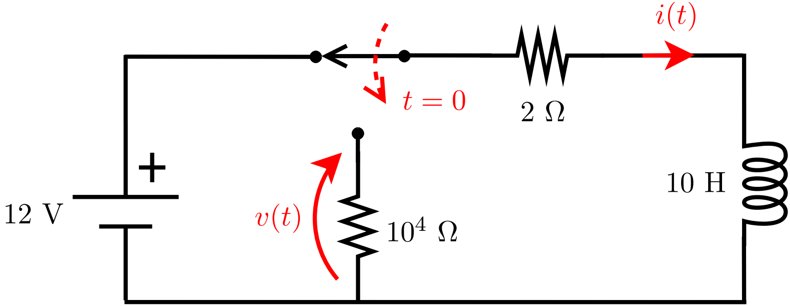
Considere o circuito abaixo com $r_m = 1\ \Omega$ e $i_L(0) = 8\ \mathrm{A}$



Determine a expressão de $i_L(t)$ para $t \geq 0$

Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- Descarga de uma bobina



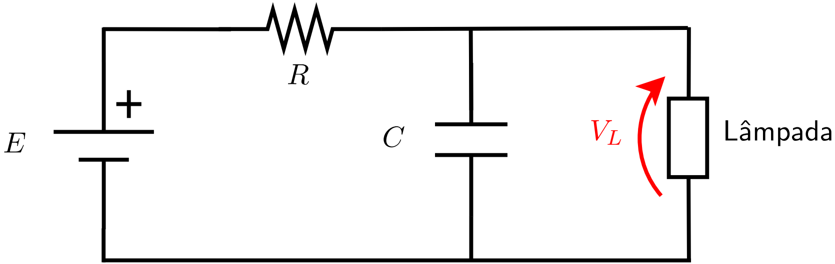
- $i(0) = \frac{12}{2} = 6A$
- $\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} \approx 10^{-3}$ s
- $i(t) = 6e^{-1000t}$, $t > 0$
- $v(t) = -60000e^{-1000t}$

Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- Descarga de uma bobina
- aplicada à vela do automóvel (sistema de ignição)
- a faísca provoca a explosão da mistura ar/gasolina
- dá a partida no automóvel (motor de combustão interna)
- a alta tensão rompe a rigidez dielétrica do ar que se torna condutor

Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- Lâmpada intermitente



- $R \gg R_{\text{Lâmpada}} = R_L$
- $E \gg V_{\max}$ e $ER_L/(R+R_L) \ll E$
- Lâmpada conduz para $V_L > V_{\max}$ e para de conduzir (aberto) para $V_L < V_{\min}$