PSI3211 – Circuitos I – Aula 07

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

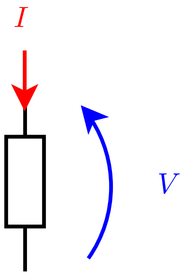
Abril de 2017

Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

- analisar a resposta em frequência de circuitos simples

1.1 Corrente Contínua - CC

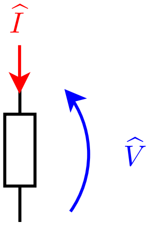


- LEI DE OHM

$$\frac{V}{I} = R$$

Resistência CC $= R_{\text{CC}}$

1.2 Corrente Alternada - CA



- Equivalente CA da LEI DE OHM

$$\frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} = Z = R + jX$$

  - Z: impedância do dispositivo
  - R: componente resistivo ou dissipativo (R_{CA})
  - X: componente reativo ou reatância
  - R e X são funções da frequência

Exemplo: Resistor em série com um indutor ideal,
$Z(j\omega) = R + j\omega L$

1.3 Recíprocas

Admitância

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \underbrace{\frac{R}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2}}_{G} + j\underbrace{\frac{-X}{R^2 + X^2}}_{B}$$

G: componente condutivo

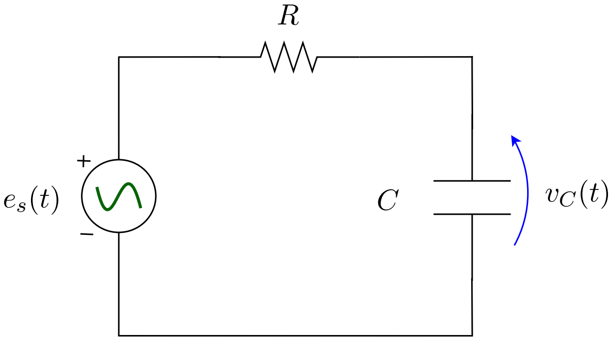
B: susceptância

CC	Resistência (R_{CC})	Condutância (G_{CC})
CA	Impedância ($Z(j\omega)$)	Admitância ($Y(j\omega)$)

2. Resposta em frequência

- Se um circuito for alimentado por um sinal senoidal, sua saída também será senoidal de mesma frequência
- A frequência da saída é a mesma da fonte, mas sua amplitude e fase podem ser alteradas
- O efeito que um circuito tem sobre a amplitude e fase do sinal de entrada para cada frequência é chamado de resposta em frequência
- Resposta em frequência é definida pela razão entre o fasor de saída e o fasor de entrada em função de ω

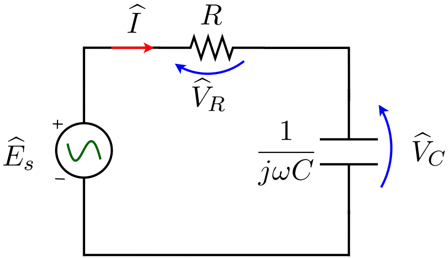
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas



- Entrada: $e_s(t)$
- Saída: $v_C(t)$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

Usando fasores e relações fasoriais



Por divisão de tensão

$$\widehat{V}_C = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

$$\widehat{V}_C = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_C}{\widehat{E}_s} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = F_{\mathrm{PB}}(j\omega) \quad \text{(adimensional)}}$$

Módulo

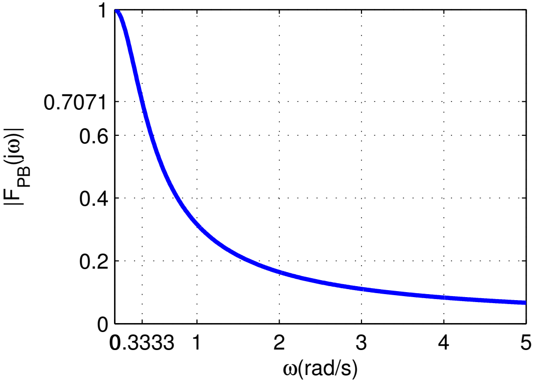
$$\boxed{|F_{\mathrm{PB}}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi_{\mathrm{PB}}(\omega) = -\arctan(\omega RC)}$$

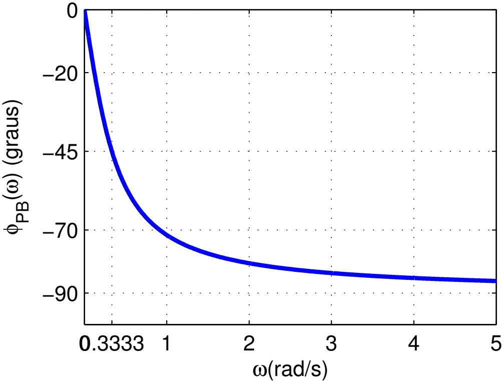
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1$ F)

Módulo



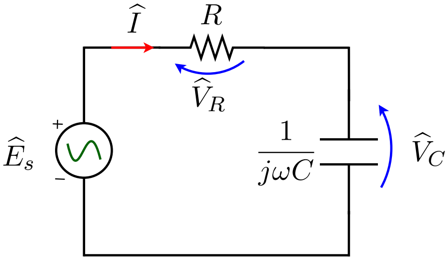
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

Fase



2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

Vamos agora considerar a tensão do resistor como saída.



Por divisão de tensão

$$\widehat{V}_R = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

$$\widehat{V}_R = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = F_{\mathrm{PA}}(j\omega) \quad \text{(adimensional)}}$$

Módulo

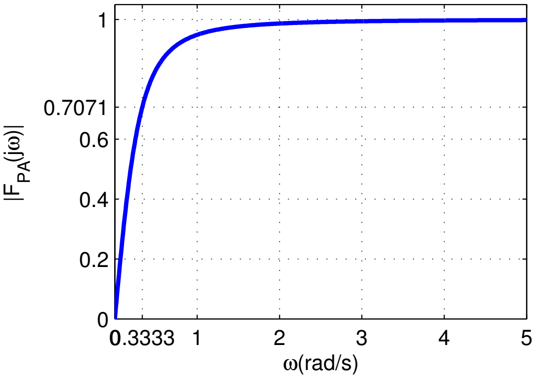
$$\boxed{|F_{\mathrm{PA}}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi_{\mathrm{PA}}(\omega) = 90^{\mathrm{o}} - \arctan(\omega RC)}$$

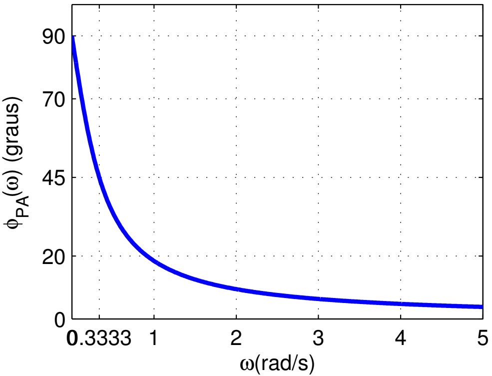
2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

Módulo



2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

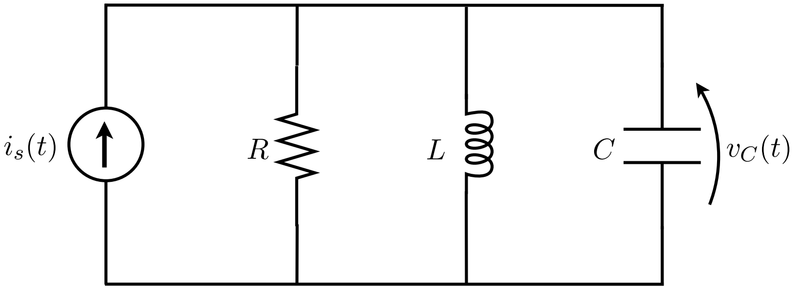
Fase



2.3 Frequência de corte

- Frequência de corte é a frequência abaixo da qual (ou acima da qual) a potência na saída do circuito é reduzida à metade da potência na faixa de passagem
- Frequência na qual o ganho da resposta em frequência se reduz a
$$|F(j\omega_c)| = \frac{|F(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$
- No Exemplo 1
$$|F_{PB}(j\omega)|_{\max} = |F_{PB}(j0)| = 1$$
Qual a frequência ω_c na qual $|F_{PB}(j\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$?
$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$
- É possível mostrar que no Exemplo 2 também vale $\omega_c = \frac{1}{RC}$ (Verifique!)

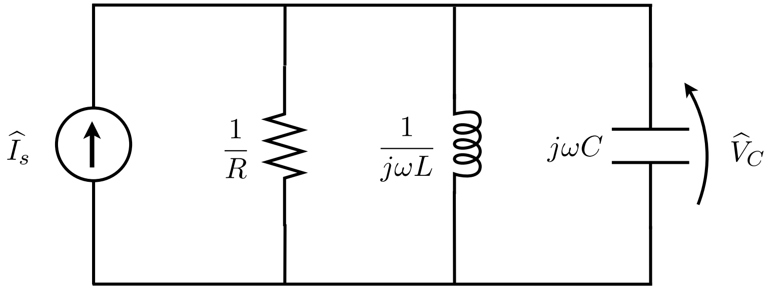
2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa



- Entrada: $i_s(t)$
- Saída: $v_C(t)$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

Usando fasores e admitâncias



A admitância equivalente é

$$\boxed{\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C}$$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

A admitância do circuito é

$$\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

e a impedância é dada por

$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{I}_s} = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}}$$

Módulo

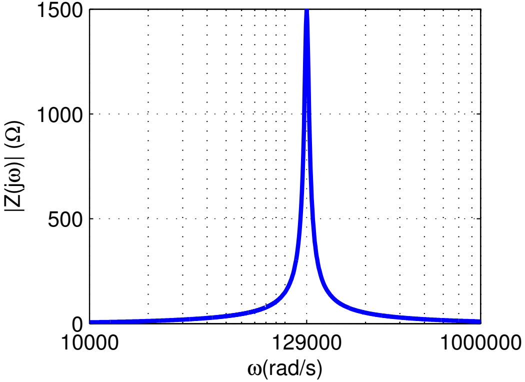
$$\boxed{|Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi(\omega) = -\arctan\left[R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]}$$

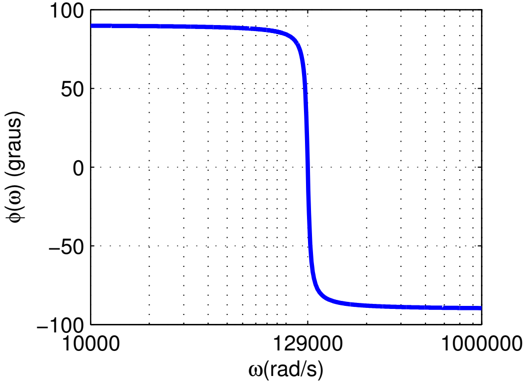
2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500\ \Omega$, $C = 100\ \mathrm{nF}$, $L = 600\ \mu\mathrm{H}$)

Módulo

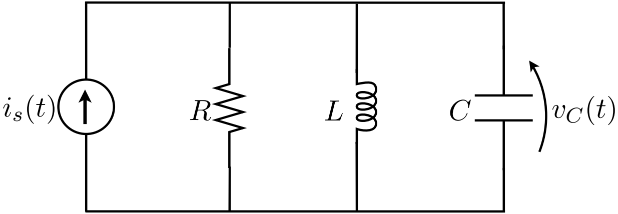


2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500\ \Omega$, $C = 100$ nF, $L = 600\ \mu$H)

Fase



RLC paralelo - Ressonância



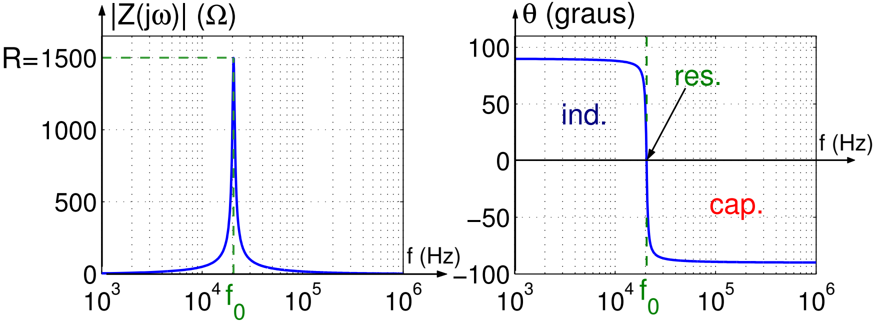
Frequência de ressonância

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

- Fase da impedância é nula
- Circuito é puramente resistivo
- Módulo da impedância é máximo (módulo da tensão é máximo) ou Módulo da admitância é mínimo (módulo da corrente é mínimo)

RLC paralelo - Ressonância

$$\mathrm{R} = 1500\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 600\ \mu\mathrm{H}, \quad \mathrm{C} = 100\ \mathrm{nF}$$

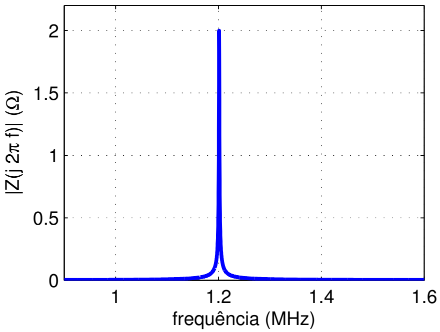


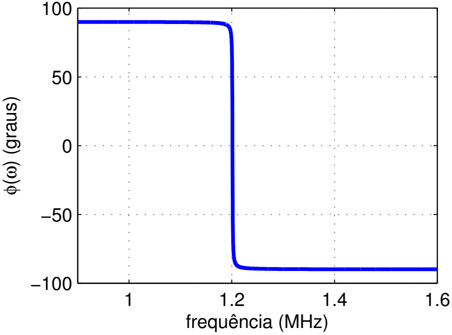
Freq. de ressonância: $\mathrm{f_r} = \mathrm{f_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} \approx 20{,}55\ \mathrm{kHz}$

RLC paralelo - Ressonância

Valores típicos para sintonizar uma rádio AM

$$R = 2\ \Omega, \quad L = 195\ \text{pH}, \quad C = 90\ \mu\text{F}$$





Freq. de ressonância:

$f_r = f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1{,}2\ \text{MHz} = 1200\text{kHz}$ (Rádio CULTURA BRASIL AM)

Frequência de corte

- Para o Circuito RLC paralelo

$$|Z(j\omega)|_{\max} = |Z(j\omega_0)| = R$$

Quais as frequências ω_{c_1} e ω_{c_2} nas quais $|Z(j\omega)| = R/\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{R}}} \Rightarrow$$

$$\omega_{c_1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

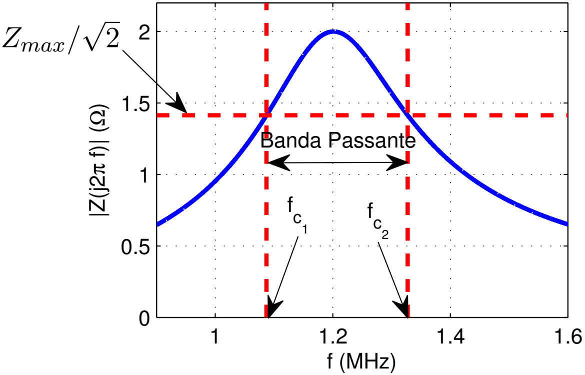
$$\omega_{c_2} = +\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- É comum definir a banda passante que neste caso vale

$$\boxed{B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{1}{RC}}$$

Frequência de corte

$$\mathrm{R} = 2\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 195\ \mathrm{pH}, \quad \mathrm{C} = 1{,}22\ \mathrm{nF}$$



- $Z_{\max}/\sqrt{2} = 1{,}4142\ \Omega$
- $\omega_{c_1} = 6{,}8313\ \mathrm{Mrad/s} \Rightarrow f_{c_1} = 1{,}0872\ \mathrm{MHz}$
- $\omega_{c_2} = 8{,}3410\ \mathrm{Mrad/s} \Rightarrow f_{c_2} = 1{,}3275\ \mathrm{MHz}$
- $B = 1.5097\ \mathrm{Mrad/s} \quad (0{,}2403\ \mathrm{MHz})$

Índice de mérito

Vamos voltar ao circuito RLC paralelo.

- Esse circuito funciona como um passa-faixa com banda passante

$$\boxed{B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{1}{RC}}$$

- O índice de mérito ou fator de qualidade é definido como

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{B}}$$

- Para o RLC paralelo, temos

$$\boxed{Q_0 = RC\omega_0}$$

- Substituindo $C = 1/(\omega_0^2 L)$, chega-se a

$$\boxed{Q_0 = RC\omega_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Índice de mérito

A admitância do circuito RLC paralelo pode ser escrita em função de Q_0:

$$Y(j\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

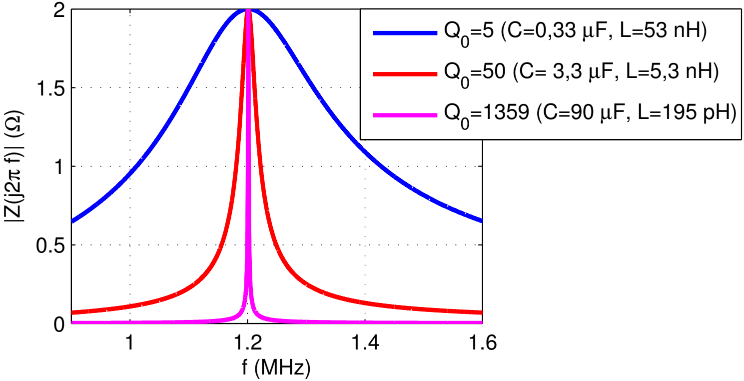
$$= G\left[1 + j\left(\frac{\omega C}{G} - \frac{R}{\omega L}\right)\right]$$

$$= G\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\omega_0 C}{G} - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{R}{\omega_0 L}\right)\right]$$

$$= G\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

Índice de mérito

Impedância do RLC paralelo em função de Q_0, $\mathrm{R} = 2\ \Omega$ (fixo)



Q_0 alto, B estreita, alta seletividade, altamente oscilatório (tempo)

Índice de mérito

O índice de mérito também é definido como

$$\boxed{Q_0 = \frac{\text{potência reativa}}{\text{potência média}}}$$

Para circuitos RLC paralelo ou série vale

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}}$$

2.5 Exercício

O módulo da resposta em frequência $F(j\omega) = \dfrac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s}$ do circuito da Figura 1 está mostrado na Figura 2, o valor de L (em μH) é:

a) 125
b) 500
c) 300
d) 20
e) 400

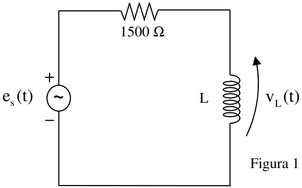


Figura 1

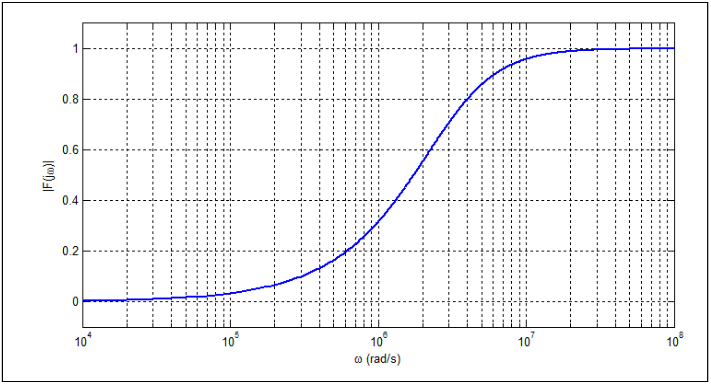


Figura 2

2.5 Exercício

Resolução:

O módulo da resposta em frequência do circuito da Figura 1 é dado por

$$|F(j\omega)| = \frac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{R^2 |F(j\omega)|^2}{\omega^2 (1-|F(j\omega)|^2)}}\,.$$

Do gráfico do módulo da resposta em frequência obtém-se para $\omega = 4\times10^6\,\text{rad/s}$, $|F(j\omega)| = 0{,}8$. Assim,

$$L = \sqrt{\frac{1500^2\,0{,}8^2}{16\times10^{12}(1-0{,}8^2)}} = 500\ \mu\text{H}\,.$$

2.5 Exercício

Determine a expressão da saída (tensão no indutor) para a entrada $e_s(t) = 10\cos(6 \times 10^5 t + 30^\circ) + 10\cos(4 \times 10^6 t - 30^\circ)$.

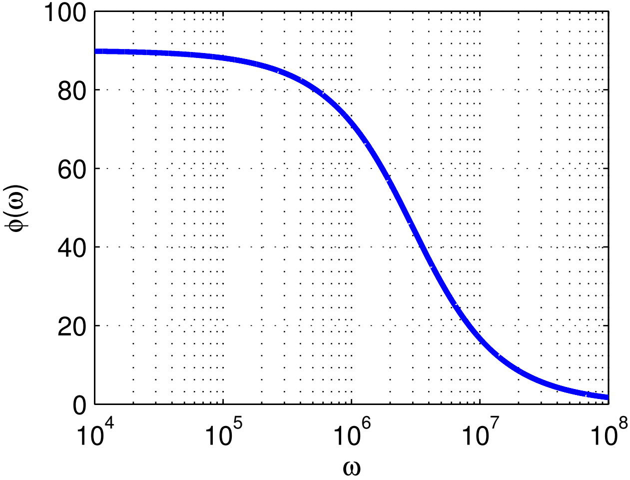
Resolução: Da resposta em frequência temos

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}_s}{R + j\omega L} \Rightarrow \frac{\widehat{V}_L}{\widehat{E}_s} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

A fase da resposta em frequência vale

$$\phi(\omega) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

2.5 Exercício – Fase da Resposta em frequência



2.5 Exercício

Determine a expressão da saída (tensão no indutor) para a entrada $e_s(t) = 10\cos(6 \times 10^5 t + 30°) + 10\cos(4 \times 10^6 t - 30°)$.

Resolução: Para o nosso problema

$$\phi(6 \times 10^5) = 90° - \arctan\left(\frac{5 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5}{1500}\right) = 78{,}6901°$$

$$\phi(4 \times 10^6) = 90° - \arctan\left(\frac{5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^6}{1500}\right) = 36{,}8699°$$

Assim

$$v_L(t) = 2\cos(6 \times 10^5 t + 30° + 78{,}7°) + 8\cos(4 \times 10^6 t - 30° + 36{,}8°),$$

ou seja,

$$v_L(t) = 2\cos(6 \times 10^5 t + 108{,}7°) + 8\cos(4 \times 10^6 t + 6{,}8°)$$