DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PNV3324 FUNDAMENTOS DE CONTROLE EM ENGENHARIA

NOTAS DE AULA*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina.

5 ANÁLISE DE RESPOSTA TRANSITÓRIA

5.1 INTRODUÇÃO

Na Fig. 5.1 é mostrado o diagrama de bloco de um sistema de controle típico. A relação entre a saída e a entrada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{\mathrm{R}(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)G_{sen}(s)}$$

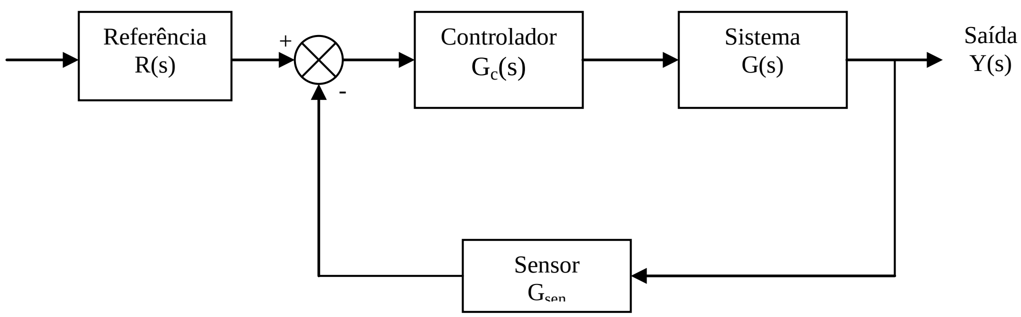

Fig. 5.1 Diagrama de bloco de um sistema de controle a malha fechada

O projeto do controlador consiste em determinar a função de transferência do controlador de modo que o desempenho do sistema em malha fechada atenda às especificações. Normalmente, uma vez projetado o controlador, o desempenho do sistema em malha fechada no domínio do tempo é verificado através de testes com sinais padrões tais como impulso, degrau, rampa ou harmônico. Neste texto será dada ênfase a resposta do sistema para uma entrada degrau unitário.

Entre as diversas funções de transferência, duas delas se destacam que são a de primeira ordem e de segunda ordem. Isto se deve não só à simplicidade do modelo, mas também porque quando o sistema é de ordem mais alta procura-se analisar o desempenho do sistema através de pólos dominantes que recaem em sistemas de primeira ou de segunda ordem. Os pólos dominantes são os que estão mais próximos do eixo imaginário. Aqui convém ressaltar que a estrutura da função de transferência do sistema a ser controlado ou da função de transferência em malha fechada é a mesma. Ou seja, uma determinada função de transferência pode corresponder tanto a função de transferência de um sistema a ser controlado ou como a função de transferência em malha fechada de um outro sistema a ser controlado. Portanto, a análise mostrada a seguir vale para as duas configurações.

5.2 RESPOSTA DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

A função de transferência típica de primeira ordem é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(S)} = G(s) = \frac{1}{Ts+1} \tag{5.1}$$

O seu pólo é dado por $-1/T$. A sua resposta para uma entrada degrau unitário $R(s) = 1/s$ é :

$$y(t) = 1 - e^{-t/T} \tag{5.2}$$

A velocidade da resposta está intimamente relacionada com a constante de tempo *T*. Quanto menor o seu valor (o pólo mais afastado do eixo imaginário) mais rápido é a resposta do sistema, conforme mostrado na Fig. 5.2, que apresenta a resposta do sistema para $T = 1$ s e $T = 5$ s.

Em vista desta resposta a função de transferência de primeira ordem é conhecida também como atraso de primeira ordem. A constante *T* pode ser entendia como o tempo em que a variável atinge 63,2% do valor de regime e o seu inverso como a derivada da resposta para $t = 0$. Pode-se mostrar também que para $t = 3T$ e $t = 5T$ a resposta do sistema atinge, respectivamente, 95% e 99% do seu valor final.

Para $R(s) = 1$ a resposta é:

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \tag{5.3}$$

Já para $R(s) = 1/s^2$ a resposta é dada por:

$$y(t) = Te^{-t/T} - T + t \tag{5.4}$$

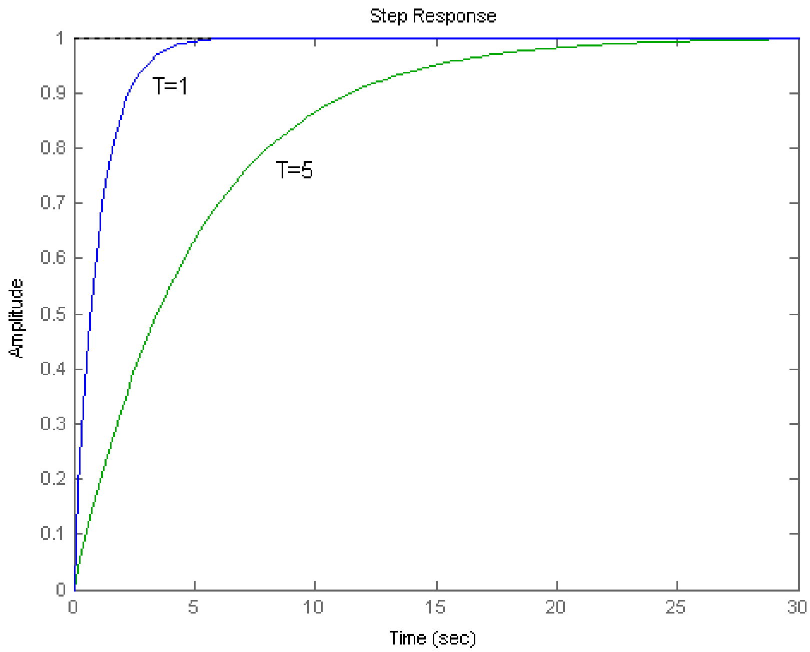

Fig. 5.2 Resposta de um sistema de primeira ordem

Aqui convém ressaltar que impulso é a derivada da função degrau e que este, por sua vez, é a derivada da função rampa. A resposta do sistema para cada uma destas variáveis também pode ser obtida através da derivação.

5.3 RESPOSTA DE SISTEMS DE SEGUNDA ORDEM

Seja a equação de um sistema massa-mola-amortecedor sujeita a uma força externa $x(t)$:

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = x(t) \tag{5.5}$$

Obs. $x(t)$ tem dimensão de força

A função de transferência entre a força externa e o deslocamento é dada por:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} \tag{5.6}$$

Os pólos desta equação são dados por:

$$s_{1,2} = -\frac{B}{2M} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M}} \tag{5.7}$$

Define-se como amortecimento crítico o amortecimento que anula o radicando da equação 5.7, isto é,

$$B_c = 2\sqrt{MK} \tag{5.8}$$

Normalmente a função de transferência de segunda ordem é analisada considerando-se a sua forma padrão que é obtida definindo-se dois termos que são a freqüência natural e o coeficiente de amortecimento:

Frequência natural: $$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \tag{5.9}$$

Coeficiente de amortecimento: $$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{MK}} \tag{5.10}$$

Substituindo 5.9 e 5.10 em 5.6 obtém-se:

$$\frac{Y(s)}{X(s)/K} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{5.11}$$

Convém observar que $R(s)$ tem agora a mesma dimensão da saída $Y(s)$ o que não ocorria com a equação 5.6. Os pólos dependem do valor do coeficiente de amortecimento que pode ser dividida em três regiões:

a) $0 \le \zeta < 1$ amortecimento subcrítico

Neste caso os pólos podem ser calculados como:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d\, j \tag{5.12}$$

onde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ que é a frequência natural amortecida

b) $\zeta = 1$ amortecimento crítico

Para o amortecimento crítico os pólos são reais duplos, isto é,

$$s_{1,2} = \omega_n \tag{5.13}$$

c) $\zeta > 1$ amortecimento supercrítico

No caso do amortecimento supercrítico os pólos são reais distintos:

$$s_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{5.14}$$

A equação da resposta de um sistema de segunda ordem para uma entrada igual a degrau unitário ($\mathrm{Re}(s) = 1/s$) depende do valor do amortecimento:

a) amortecimento subcrítico

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}\,\omega_d t\right) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \phi) \tag{5.15}$$

onde $\phi = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

b) amortecimento crítico

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(1 + \omega_n t) \qquad (5.16)$$

c) amortecimento supercrítico

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right) \qquad (5.17)$$

onde $s_1 = \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ e $s_2 = \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$

Na Fig. 5.3 são mostradas as respostas de um sistema de segundo grau para coeficiente de amortecimento iguais a 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0 e 2.

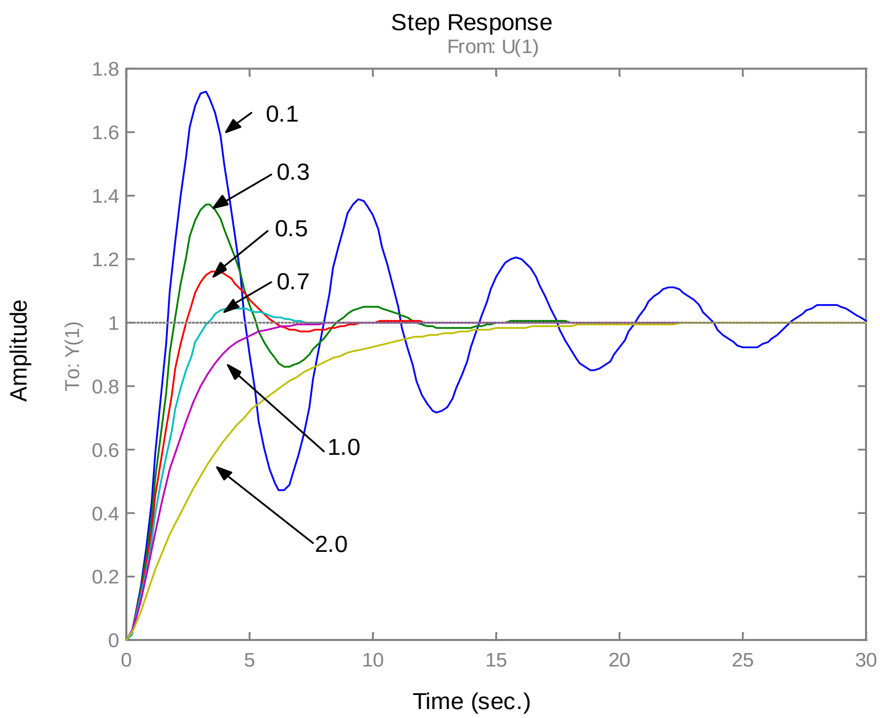

Fig. 5.3 Respostas de um sistema de segunda ordem

A Fig. 5.3 mostra que quanto menor o amortecimento maior é máximo valor de ultrapassagem, o número de oscilações é maior embora cruze o valor final pela primeira vez mais rapidamente. Já ao se aumentar o amortecimento a tendência é reduzir o número de oscilações, bem como o máximo valor de ultrapassagem, embora tenda a demorar mais para cruzar o valor final pela primeira vez. É difícil estabelecer o sistema com melhor desempenho pois isto depende das características peculiares de cada sistema.