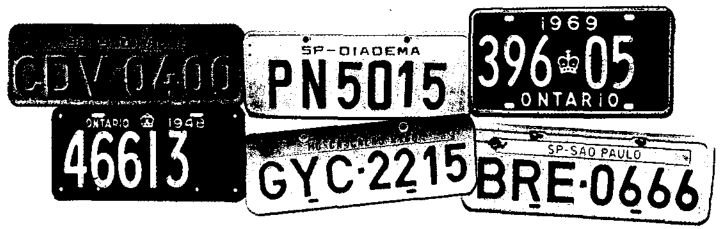
Material de apoio

Combinatória sem fórmulas*

Cristina Cerri
Iole de Freitas Druck

Embora freqüentemente lembrada como o estudo de *arranjos*, *permutações* e *combinações*, a Análise Combinatória trata de muitos outros conceitos e técnicas ligados ao estudo de estruturas e relações em conjuntos finitos (eventualmente, com quantidade elevada de elementos), de forma a permitir que se faça uma avaliação precisa do número de seus elementos sem proceder à sua contagem direta (o que pode ser, por vezes, bastante difícil!). Questões desse tipo, chamadas de "problemas de contagem", podem aparecer em diversas situações concretas do cotidiano.

Exemplo disso é o número das placas dos carros. Antes, elas eram formadas por duas letras (inclusive K, Y e W) e quatro algarismos. Tendo em vista que, pela regulamentação, não se pode utilizar uma placa cujos algarismos sejam todos iguais a 0, quantas placas poderiam ser formadas? Esse número se mostrou insuficiente, e, hoje, as placas têm três letras e quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas dessa maneira? Você chegará a um número bem grande. Teria sido melhor usar quatro letras e três algarismos, como em alguns países?



* O material sobre Combinatória que apresentamos aqui foi adaptado do trabalho *Combinatória sem fórmulas*, de Antônio Luiz Pereira, Cristina Cerri e Iole de Freitas Druck, do IME-USP, escrito para oficinas do Projeto Pró-Ciências da Fapesp (2000) e baseado em MORGADO *et al. Análise combinatória e probabilidades*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

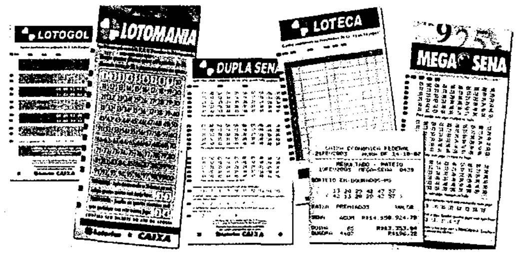
Cristina Cerri é docente do IME-USP e fez licenciatura, mestrado e doutorado em Matemática na USP. É presidente da Comissão de Graduação e coordena o Curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP. Na área de ensino de Matemática, vem pesquisando sobre o uso do computador no ensino-aprendizagem. Tem participado de projetos de atualização de professores.

Iole de Freitas Druck é professora do IME-USP, tendo feito doutorado em Matemática (Lógica) na Universidade de Montreal, Canadá. É Coordenadora do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME-USP. É co-autora da Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e HEM da CENP e dedica-se à formação inicial e continuada de professores.

A •–	J •–––	R •–•
B –•••	K –•–	S •••
C –•–•	L •–••	T –
D –••	M ––	U ••–
E •	N –•	V •••–
F ••–•	Ñ ––•––	W •––
G ––•	O –––	X –••–
H ••••	P •––•	Y –•––
I ••	Q ––•–	Z ––••

Samuel Finley Breese Morse (1791-1872). Inventor do telégrafo elétrico que leva o seu nome. Concebeu o aparelho em 1832, mas foi só em 1840 que obteve a patente. Em 1944, foi testada pela primeira vez uma linha entre Washington e Baltimore nos EUA (Adaptado de **Enciclopédia Larousse Cultural**, Nova Cultural, 1998).

O Código **Morse** é um código usado em transmissões telegráficas, de acordo com o qual os caracteres são representados por agrupamentos de traços e pontos. Para transmitir pontos ou traços, são usados sons breves ou longos, separados por pausa. Por exemplo, a letra *a* corresponde a *um ponto* e *um traço* (• –). Usando de 1 a 4 traços ou pontos, quantas combinações podem-se ter?



Também para a avaliação das chances de ganhar algum prêmio em uma loteria e, assim, decidir o tipo de aposta que estamos dispostos a bancar, a análise envolverá a resolução de um problema de contagem, que dependerá das regras específicas da loteria escolhida.

Veremos que muitos problemas de contagem podem ser tratados por meio de apenas alguns princípios básicos e de alguma (às vezes, muita) engenhosidade. Daremos ênfase à *compreensão plena do problema tratado* e *ao reconhecimento da técnica adequada em cada caso*. Esses são passos iniciais essenciais e, freqüentemente, a parte mais delicada no tratamento de um problema combinatório (e também de muitos outros tipos de problemas).

Vamos começar propondo alguns problemas de contagem simples.

- Uma professora tem 43 estudantes em sua classe de 7ª série e 37 estudantes em sua classe de 8ª série. Quantos estudantes ela tem no total?

- Um certo professor de Línguas dá aulas de Espanhol para a turma A, com 27 alunos, e de Inglês para a turma B, com 21 alunos. Dado que 4 alunos estão nas duas turmas, quantos alunos o professor tem ao todo?

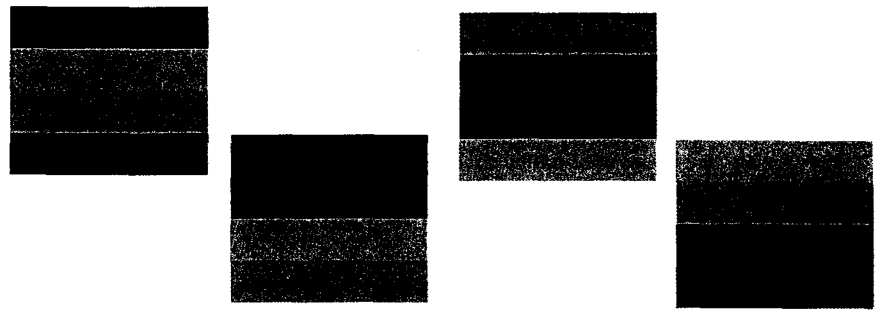
Para responder às perguntas acima não é preciso muita engenhosidade. Aplica-se apenas um princípio simples e natural de contagem, que pode ser enunciado formalmente da seguinte maneira:

> **Princípio da Adição:** Se A e B são conjuntos **disjuntos**, com p e q elementos respectivamente, então $A \cup B$ tem $p+q$ elementos.

Agora, propomos outros dois problemas, de natureza diferente.

- Em um cardápio estão listados 3 tipos de massas e 6 tipos de molhos. Quantos pedidos distintos podem ser feitos?

- Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas de vermelho, branco e preto, **não** devendo haver listras adjacentes com a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira? (Note que cada escolha limita as opções subseqüentes.)



Também nesses dois problemas usamos outro princípio básico de contagem – o da multiplicação, que pode ser escrito, na forma geral, da seguinte maneira:

> **Princípio da Multiplicação:** Se uma decisão d_1 pode ser tomada de p_1 maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de p_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é de $p_1.p_2$ maneiras.

Este segundo princípio é apenas uma aplicação do fato de que, se um conjunto A tem x elementos e um conjunto B tem y elementos, então o produto cartesiano de A por B, ou seja, o conjunto $A \times B$, tem $x.y$ elementos.

Os princípios básicos de contagem acima podem ser facilmente generalizados. Note que uma destas versões generalizadas do princípio multiplicativo foi usada na resolução do último problema.

Usando agora os princípios básicos, resolva os seguintes problemas de contagem, de diferentes níveis de dificuldade.

■ ATIVIDADE 1

Responda:

A. Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem? (*Preste atenção: as decisões envolvidas podem ser tomadas em várias ordens. Qual é a mais conveniente?*)

B. Quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos existem? (*Qual a dificuldade maior deste problema?*)

C. Em uma estante existem 5 livros em espanhol, 6 em francês e 3 em inglês. De quantas maneiras posso escolher 2 livros sem escolher dois da mesma língua?

D. Quantas coleções distintas podem ser formadas com 5 bolas idênticas e 8 cubos também idênticos? (*Antes de começar a resolver, perceba o que distingue uma coleção de outra.*)

■ ATIVIDADE 2

Ao se colorir um mapa, pode-se usar a mesma cor mais de uma vez, desde que dois países vizinhos sejam pintados de cores diferentes.

Usando no máximo 4 cores, de quantas maneiras se pode colorir um mapa formado pelos seguintes países: Brasil, Uruguai, Argentina e Paraguai? E pelos países: Brasil, Uruguai, Argentina, Paraguai e Chile? E pelos países: Brasil, Argentina, Paraguai e Bolívia?

Seria possível pintar, usando apenas 3 cores, o mapa formado pelos países: Brasil, Uruguai, Argentina e Paraguai? E o mapa formado por Brasil, Argentina, Paraguai e Bolívia?

O Problema das 4 Cores

Na atividade acima, percebemos que, em alguns casos, não se podem usar menos de 4 cores para pintar um determinado mapa. Mas, fazendo alguns testes, percebe-se que é possível pintar mapas sempre com apenas 4 cores. Surge, assim, a questão: é possível pintar *qualquer* mapa com apenas 4 cores? Esse atraente problema pode ser formulado matematicamente, já que "mapas" não deixam de ser subdivisões de um plano que não se sobrepõem.

O Problema das 4 Cores, como é conhecido hoje, foi proposto pela primeira vez em 1852, por Francis Guthrie. Contudo, só foi publicado em 1878, após ter sido estudado por vários matemáticos da época. Em 1879, Kempe apresentou a primeira "demonstração" da conjectura, cujo erro foi descoberto por Heawood, que provou que o resultado era verdadeiro para 5 cores. Finalmente, depois de muitos anos e esforços, o resultado foi provado em 1977, por K. Appel e W. Haken. Porém, a demonstração fez uso de mais de 1200 horas de processamento (isso mesmo, num computador!), o que provocou grandes discussões sobre a validade da prova. Recentemente, em 1997, N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour e R. Thomas encontraram uma resolução mais simples, mas ainda dependente do auxílio de computadores. Esse problema acabou gerando várias pesquisas e resultados paralelos interessantes e deu origem a uma vasta teoria conhecida como a *Teoria dos Grafos*.

Vamos considerar, agora, alguns problemas, de graus variados de dificuldade. Ao tentar resolvê-los, lembre-se: todos (ou quase todos) os problemas de aparência simples podem ser difíceis. Não é possível dar uma "receita" que sirva para todos os casos, mas as seguintes sugestões podem ser úteis.

- Num problema de contagem, devemos contar o número de objetos de uma certa classe. Tente identificar precisamente quando um objeto pertence a uma classe e quando dois deles devem ser considerados distintos.

- Faça uma representação (figura, esquema etc.) do problema. Liste alguns dos objetos que pertencem e outros que não pertencem à coleção.

- Examine quantas "decisões" você deve tomar para executar os passos anteriores. Tente usar os princípios básicos para contar os objetos. Se surgirem dificuldades, tente entender claramente quais são elas.

Caso ainda não esteja claro como proceder, você pode tentar:

- dividir o problema em subcasos que você saiba resolver;

- "esquecer" algumas das condições exigidas para que um objeto pertença à coleção. Isso, em geral, dá origem a uma classe maior que a desejada. É necessário, portanto, excluir posteriormente os objetos "indesejados";

- enunciar o problema de uma forma diferente e/ou descobrir problemas equivalentes. Muitas vezes, estes poderão ser mais simples de resolver;

- depois de resolvido o problema, repense sua solução; veja se você não está *contando alguns casos mais de uma vez ou se não está se esquecendo de algum.* Veja se não é possível encontrar uma maneira mais simples de resolver o mesmo problema. Tente pensar em outros problemas em que o mesmo método pode ser usado.

Seguem alguns problemas. Para resolvê-los, você poderá testar as "dicas" dadas anteriormente.

A. Quantos são os gabaritos distintos de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão? (Resp.: 9765625.)

B. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila? (Resp.: 60.)

C. Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e têm todos os dígitos diferentes? (Resp.: 3864.) Quantos não têm dígitos iguais a 3, 5 ou 6? (Resp.: 1567.)

D. Quantos satisfazem às duas condições acima simultaneamente? (Resp.: 560.)

E. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f: A \to B$? Quantas delas são injetoras? (Resp.: 2401, 840.)

F. Quantos subconjuntos possui um conjunto de n elementos? (Resp.: 2^n.)

G. Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantas maneiras os passageiros podem sentar, respeitando as preferências? (Resp.: 43200.)

H. Quantos números inteiros entre 100 e 999 são ímpares e possuem três dígitos distintos? (Resp.: 320.)

Um terceiro e último "princípio", freqüentemente utilizado na resolução de problemas de contagem (mas que não leva o nome oficial de Princípio na literatura especializada), é o uso sistemático da divisão para eliminar repetições de um mesmo tipo de caso nas contagens. Vejamos como isso aparece, em situações de complexidade crescente.

Responda rápido:

De quantas caixas de ovos necessito para embalar 48 ovos?

Claro que precisamos de 4 caixas. Desde a escola fundamental, as crianças aprendem que a operação da divisão serve para resolver esse tipo de problema.

Podemos também dizer que a divisão serve para encontrar o número de grupos necessários para que cada um contenha o mesmo número prefixado de um total de objetos. Essa idéia volta a intervir fortemente na resolução de problemas de contagem. Assim, examinaremos um exemplo típico: o das comissões.

Quantas comissões de 4 alunos podem ser formadas numa classe de 7 alunos?

Para o primeiro lugar da comissão temos 7 escolhas, para o segundo lugar, 6 escolhas, para o terceiro lugar, 5 escolhas e para o quarto lugar, 4 escolhas, o que nos dá, pelo princípio da multiplicação, 7.6.5.4 = 840 escolhas ordenadas de 4 alunos. Entretanto, **840 não é a quantidade total de comissões.** Observe que uma comissão formada por alunos A, B, C e D é a mesma que a formada por B, D, C e A. Precisamos saber quantas vezes cada comissão foi contada repetidamente. Fixemos 4 alunos (uma comissão). De quantas maneiras podemos chamá-los? Para a primeira chamada, temos 4 opções, para a segunda, 3, para a terceira, 2 e para a quarta, apenas 1. Portanto, podemos chamá-los de 4.3.2.1 = 24 maneiras diferentes. Assim, descobrimos que, das 840 escolhas, cada grupo de 24 representa a mesma comissão. Portanto, o total de comissões será de $\frac{840}{24} = 35$. A seguir, veja outra situação interessante na qual se deve usar a divisão para eliminar as repetições.

Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Se as 10 letras fossem todas diferentes, uma aplicação simples do princípio da multiplicação daria 10! anagramas. Entretanto, podemos permutar os 2 T, os 2 M e, ignorando o acento, também os 3 A. Isso significa que estamos contando cada anagrama 2!2!3! vezes. Portanto, existem $\frac{10!}{2!2!3!}$ anagramas distintos.

Outro exemplo:

Qual é o número de rodas de ciranda distintas que podem ser formadas com 7 crianças?

Nesse exemplo, temos 7! *filas* de crianças. Entretanto, quando organizadas em um círculo, duas filas formam a mesma roda de ciranda (são "equivalentes"), se houver coincidência das crianças após uma rotação de uma das rodas. De fato, temos 7 filas distintas para uma mesma roda de ciranda. Portanto, o número dessas rodas é $\frac{7!}{7} = 6!$.

Podemos generalizar os três exemplos examinados com as seguintes observações, que descrevem o uso da divisão para eliminar repetições em problemas de contagem. Considere a seguinte situação: um conjunto A contém objetos de diversos tipos distintos, digamos, tipo 1, tipo 2, tipo 3, ... tipo k. Se conhecemos o número de objetos de cada tipo, então o número total de objetos em A é, pelo princípio da adição, a soma do número de objetos de cada um dos tipos (uma cesta de frutas tem 3 laranjas, 7 pêras e 9 maçãs; o total de frutas é 3+7+9). Em particular, se o número de objetos é o mesmo para todos os tipos, então o número de objetos em A é, evidentemente, o produto desse número pela quantidade de tipos existentes (agora, temos 5 cenouras, 5 pepinos e 5 quiabos, então tem-se 3 x 5 legumes).

Inversamente, se o número total n de objetos em A e o número m de objetos de cada tipo são conhecidos, então *o número de tipos distintos* é $k = \frac{m}{n}$. Ocorre que, em muitas situações, estamos de fato interessados em calcular exatamente o número de tipos distintos de objetos, e essa observação simples é muito útil. Em diversos casos, essa situação ocorre quando definimos em A uma *relação de equivalência*, isto é, passamos a não mais distinguir os elementos de A em determinados subconjuntos, digamos, A_i, i = 1,..., k.

Antes de considerar mais alguns exemplos, vamos reescrever essas observações de forma ligeiramente distinta. Indiquemos por $|A|$ o número de objetos de um conjunto A qualquer. Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ (união disjunta de subconjuntos), $|A| = n$ e $|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_k| = m$, então $k = \frac{m}{n}$.

A seguir, no Trabalho Monitorado, vamos explorar problemas que envolvem os três princípios descritos ao longo desta Videoconferência.

Trabalho monitorado

Os três princípios básicos da Combinatória em ação

Resolvendo problemas de contagem

Utilizando os três princípios básicos da Análise Combinatória detalhados na Videoconferência 2 e **sem utilizar fórmulas**, resolva, em grupos, as seguintes atividades.

■ ATIVIDADE 1

A. Em uma classe de 15 alunos, quantas filas de 7 alunos podem ser formadas?

B. De quantas maneiras podemos colocar 3 bolas *distintas* em 5 urnas, sendo que não podemos colocar mais de uma bola em cada uma?

Observe que:

Esses problemas podem ser resolvidos facilmente, com aplicação dos princípios básicos.

Eles são todos "equivalentes", isto é, podem ser resolvidos da mesma forma.

Note que, nos exemplos dados, temos sempre de fazer uma escolha de m objetos entre n objetos, onde $m < n$, e a ordem em que fazemos a escolha *determina objetos diferentes*. De fato, problemas do tipo considerado nos últimos exemplos aparecem tão freqüentemente que recebem um nome especial: *arranjo simples de m elementos em n*. Em todas essas situações, o resultado é dado por $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$. Uma notação freqüentemente usada para indicar esse resultado é:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Observamos, mais uma vez, que esse resultado pode ser obtido facilmente por meio da aplicação dos princípios fundamentais. Entretanto, uma vez que isso seja compreendido e assimilado, o uso da fórmula pode ajudar na simplificação dos cálculos.

Vamos agora ver outro tipo de situação:

■ ATIVIDADE 2

Responda:

A. Se o conjunto C possui 9 elementos, quantos são os subconjuntos de C com 4 elementos?

B. De quantas maneiras podemos colocar 3 bolas indistinguíveis em 5 urnas, sendo que não podemos colocar mais de uma bola em cada uma?

Temos, nesses dois últimos exemplos, uma situação diferente da apresentada na Atividade 1. Precisamos fazer uma escolha de m objetos entre n objetos, onde $m < n$, mas a ordem em que a fazemos *não determina objetos diferentes*. Nessas situações, como procuramos ilustrar, ignorando inicialmente que a ordem dos objetos escolhidos é irrelevante e usando os princípios fundamentais da adição e da multiplicação, obtemos uma quantidade de coleções maior do que a correta, *já que várias delas estão contadas várias vezes*. Para eliminar essas repetições, usamos, então, a divisão, como ilustramos anteriormente. Mais uma vez, essa situação é suficientemente comum para receber um nome especial: *combinação simples de m elementos em n*. O resultado obtido é: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1}$, que é usualmente abreviado por:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(m-n)}.$$

Naturalmente, valem aqui as mesmas considerações feitas sobre a conveniência do uso da fórmula.

Apesar de os problemas anteriores aparecerem com freqüência, a ponto de terem um nome especial, os problemas de contagem não são, em geral, do tipo "arranjo" ou "combinação". Por isso, quando se deparar com um problema de contagem, não se preocupe de imediato com "qual fórmula usar". Em geral, muita engenhosidade e várias fórmulas serão utilizadas para resolvê-lo.

■ ATIVIDADE 3

Preparamos mais alguns problemas de contagem de diversos graus de dificuldade. Resolva alguns, usando o que discutimos antes.

A. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas? (Resp.: 560.)

b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão caso nela estivesse determinada mulher? (Resp.: 434.)

B. Quantas diagonais possui um polígono de n lados? (Resp.: $\frac{n(n-3)}{2}$.)

C. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 figura exatamente 2 vezes? (Resp.: 12960.)

D. De quantos modos podemos dividir 20 pessoas:

a) em dois grupos de 10?

b) em quatro grupos de 5?

c) em um grupo de 12 e um grupo de 8?

d) em três grupos de 6 e um grupo de 2?

E. De quantos modos 9 crianças podem formar uma roda de ciranda, de maneira que duas dessas crianças permaneçam juntas? (Resp.: 14.) E de modo que 4 dessas crianças permaneçam juntas? (Resp.: 3!· 5!.)

F. No quadro abaixo, de quantos modos é possível formar a palavra MATEMÁTICA, partindo de M e indo sempre para a direita ou para baixo?

									M
								M	A
							M	A	T
						M	A	T	E
					M	A	T	E	M
				M	A	T	E	M	Á
			M	A	T	E	M	Á	T
		M	A	T	E	M	Á	T	I
	M	A	T	E	M	Á	T	I	C
M	A	T	E	M	Á	T	I	C	A

(Resp.: 512.)

ATIVIDADE 4

Selecionamos mais alguns problemas (ou desafios), cujas respostas podem ser encontradas em MORGADO*.

A. De quantos modos n crianças podem formar uma roda de ciranda, de forma que $p(p<n)$ dessas crianças permaneçam juntas?

B. Quantos são os subconjuntos com p elementos de $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ nos quais:

a) a_1 figura? a_1 não figura?

b) a_1 e a_2 figuram?

c) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura?

d) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura?

C. Considere pontos em um plano entre os quais não há três que sejam colineares.

a) Quantas são as retas que contêm dois desses pontos?

b) Qual é o número máximo de pontos de intersecção dessas retas?

D. Sejam $I_n=\{1,2,\dots n\}$ e $I_m=\{1,2,\dots m\}$ com $m \le n$, quantas são as funções $f: I_n \to I_m$ estritamente crescentes?

Trabalhando em sala de aula

A *Análise Combinatória* ou apenas *Combinatória* não é **apenas** o estudo de *arranjos, permutações e combinações*. Essa área da Matemática estuda maneiras de fazer a contagem de conjuntos finitos, sem ter de enumerar seus elementos. Ela se utiliza de muitas estratégias de resolução de problemas e dos três princípios básicos amplamente comentados anteriormente, chegando a ser eventualmente útil fixar algumas fórmulas, por corresponderem a situações muito freqüentes. Não se trata do mero estudo de certas fórmulas, que geralmente são apresentadas nos livros didáticos para o Ensino Médio.

Mas, então, por que se privilegia o estudo de *arranjos, combinações e permutações* num primeiro curso sobre o assunto? É que, além de eles serem tipos mais simples de problemas de contagem, permitem resolver uma grande quantidade de problemas. E por que ensinar ou estudar isso? A aplicabilidade em problemas de probabilidade finita é, sem dúvida, uma boa resposta. Afinal, quem não deseja saber qual a probabilidade de ganhar na Loto?

É importante que a aprendizagem dos conceitos e a resolução dos problemas de Combinatória não se façam de forma mecânica, parecendo um jogo de "que fórmula uso agora?". Deve-se procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cuja solução, em geral, não usa apenas uma fórmula, mas sim muito raciocínio. Ora, assim como é impossível aprender a nadar somente conhecendo a teoria sobre o tipo de movimentos de braços e pernas adequados (sem treiná-los praticamente na água um bom tempo), para desenvolver um raciocínio de tipo combinatório é necessário exercitar-se muito em situações de problemas de contagem. Uma boa seleção de problemas, com dificuldades progressivas, e uma ênfase na utilização dos princípios aditivo e multiplicativo, bem como no uso corrente da divisão para eliminar repetições de casos, são atitudes muito mais produtivas do que o incentivo a "decorar fórmulas".

Observemos que todos os problemas de contagem utilizam, como ferramenta teórica matemática, somente as quatro operações aritméticas elementares. A questão principal no estudo da Combinatória é, assim, conseguir que os alunos desenvolvam a habilidade para um certo tipo de raciocínio. Isso supõe a resolução de muitos problemas e um investimento de tempo necessário para cada um. A escolha adequada dos problemas, dos mais simples aos mais complexos, é fundamental para propiciar o aprendizado e oferecer desafios para os alunos. É importante que o professor resolva previamente os problemas para, conhecendo sua turma, poder avaliar a ordem e a quantidade de situações a serem propostas. Deste texto e da Bibliografia no final podem ser retirados numerosos exemplos ou sugestões. Um desafio interessante é solicitar aos próprios alunos que inventem ou pesquisem novos problemas de contagem para trocarem entre si!

* MORGADO *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidades**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.