

SEM0501

Dinâmica Aplicada às Máquinas

Aula #4: Movimento curvilíneo:
componentes normal,
tangencial, e cilíndricos

Prof. Dr. Thiago Boaventura
tboaventura@usp.br

São Carlos, 10/09/18



Conteúdo



- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- Exemplo

Comp. Normal e
Tangencial



- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- Exemplo

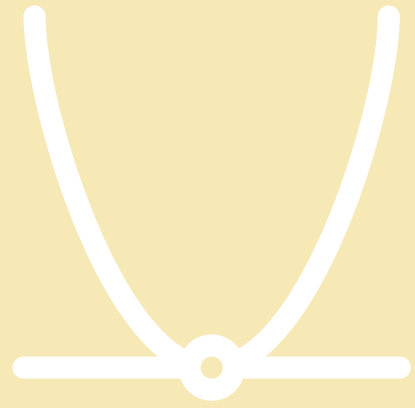
Componentes
Cilíndricas



- “Take-home messages”
- Próxima aula...

Conclusão

Conteúdo



- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- Exemplo

Comp. Normal e
Tangencial

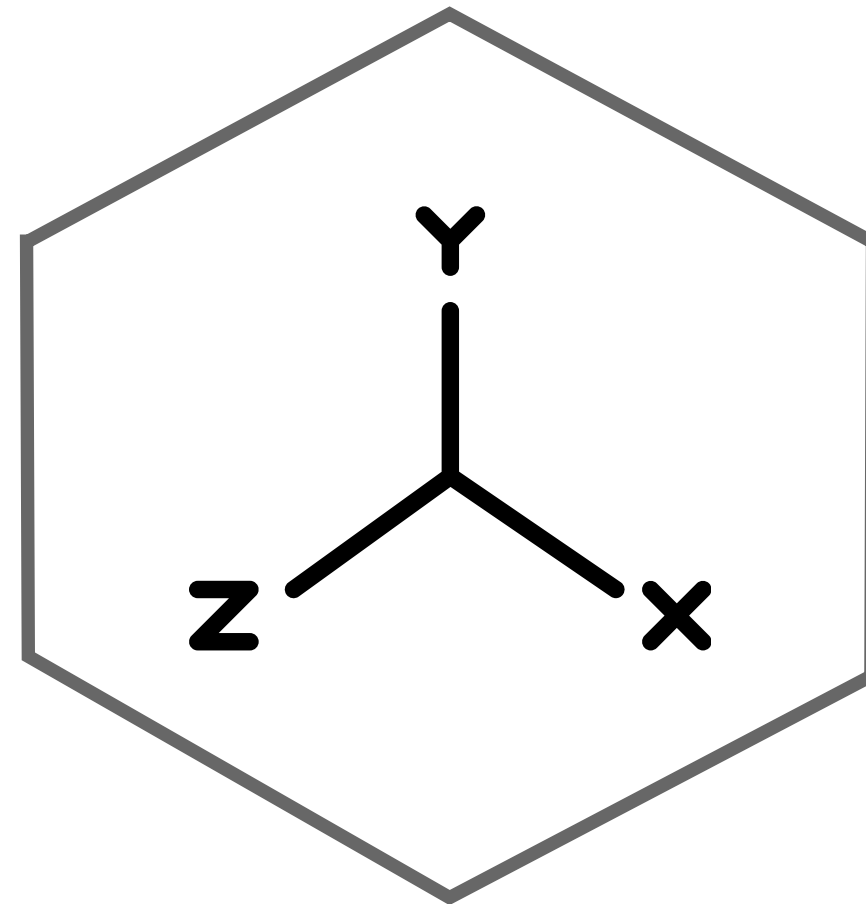
Componentes
Cilíndricas

Conclusão

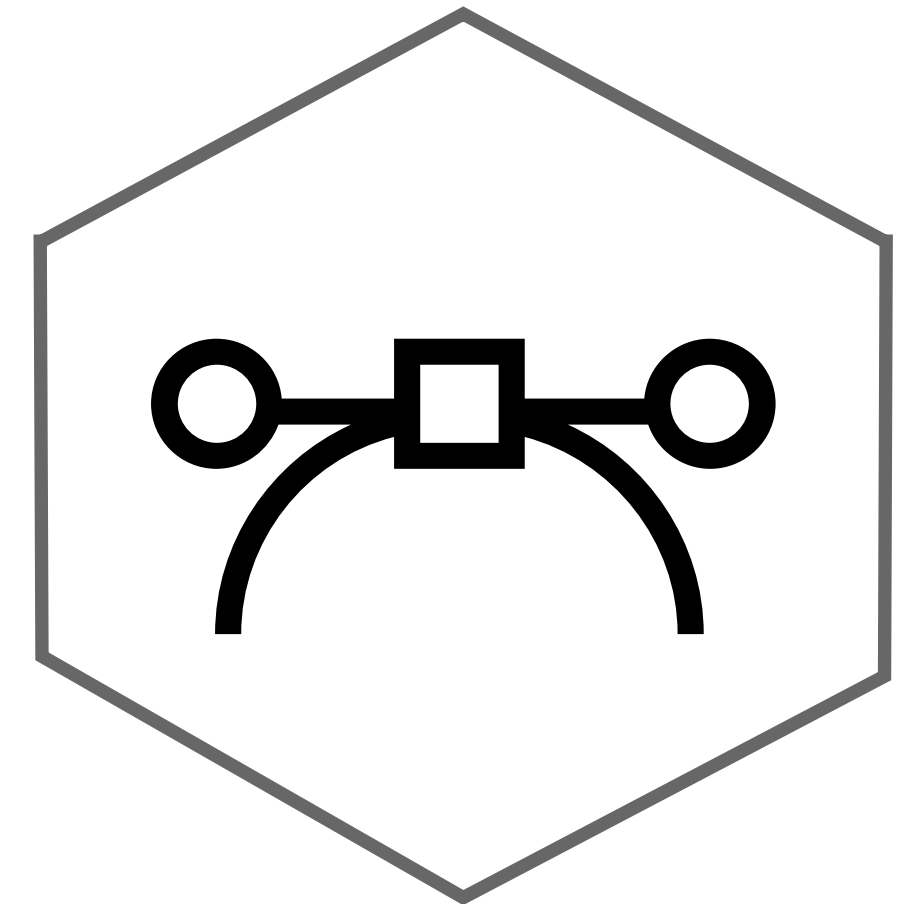
aula passada...



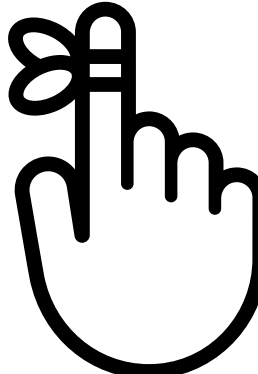
Movimento em voo livre segue uma trajetória **parabólica**



Movimento **curvilíneo** pode ser decomposto em movimento **retilíneo** ao longo dos eixos **x, y, z**

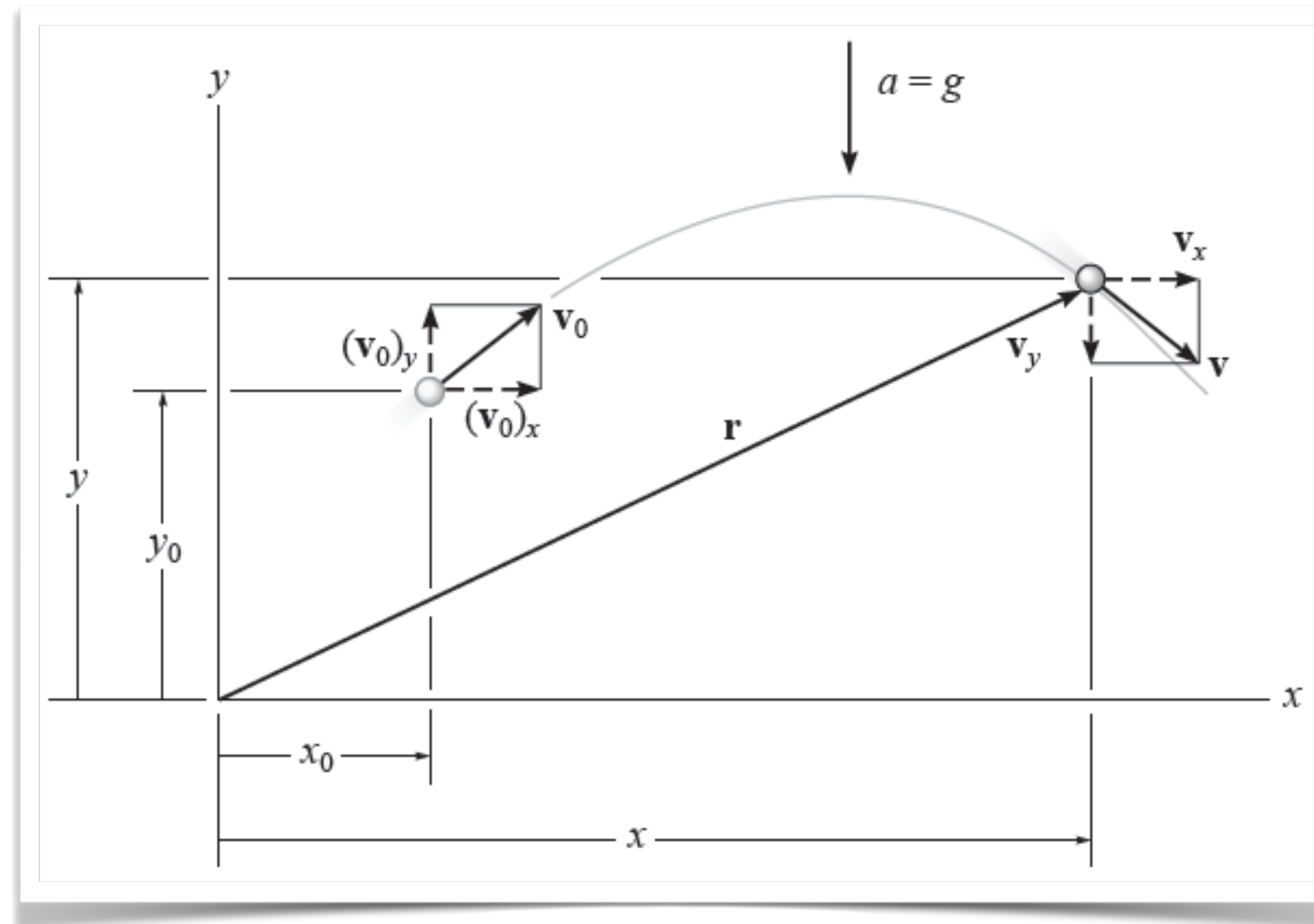


Velocidade é **tangente** à **trajetória** e aceleração à **hodógrafa**

 aula passada...



Movimento em voo livre segue uma trajetória **parabólica**



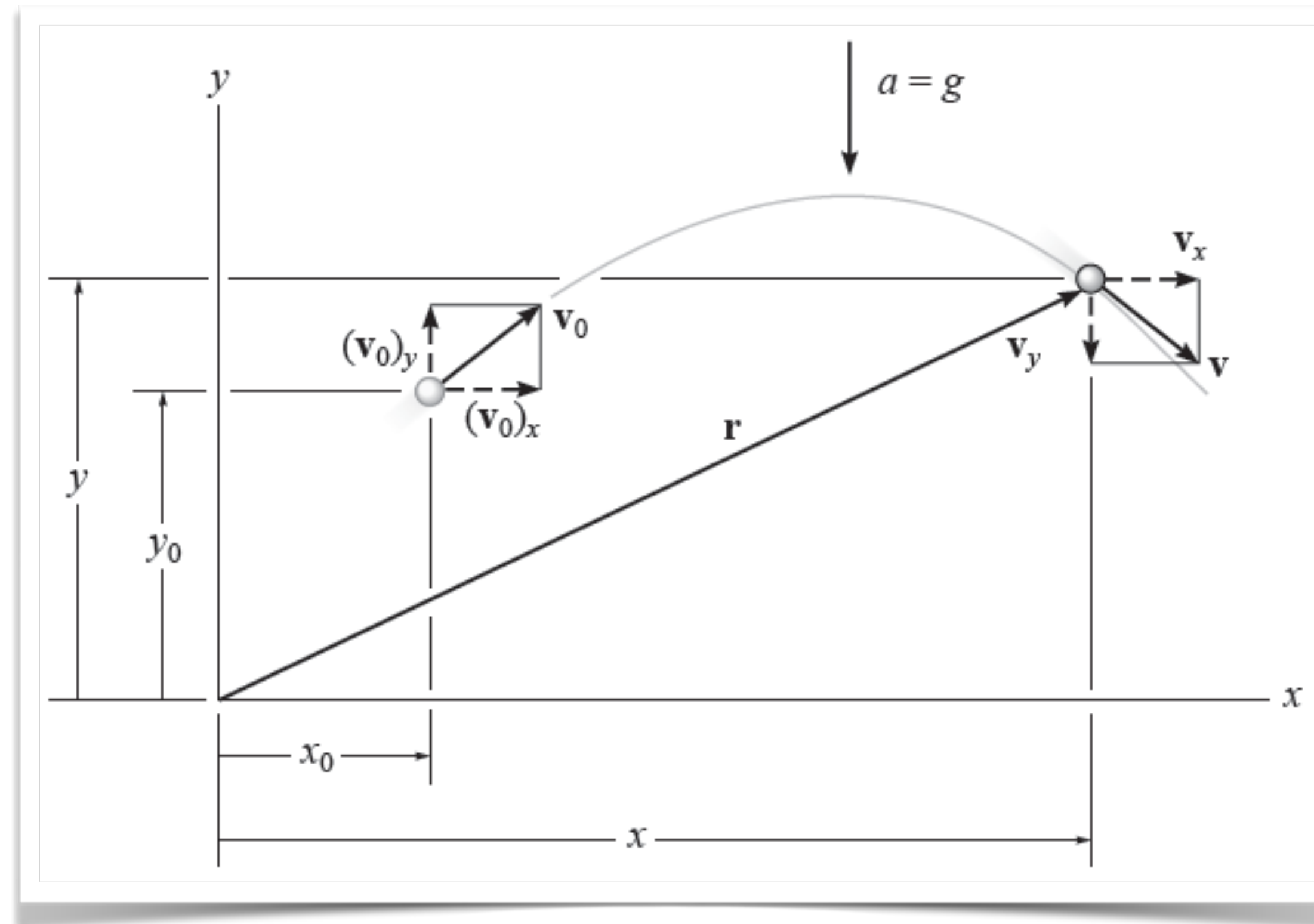
~~Resistência do ar~~

Peso

👉 aula passada...



Movimento em voo livre segue uma trajetória **parabólica**



$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

aula passada...

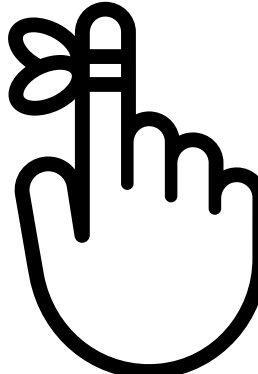


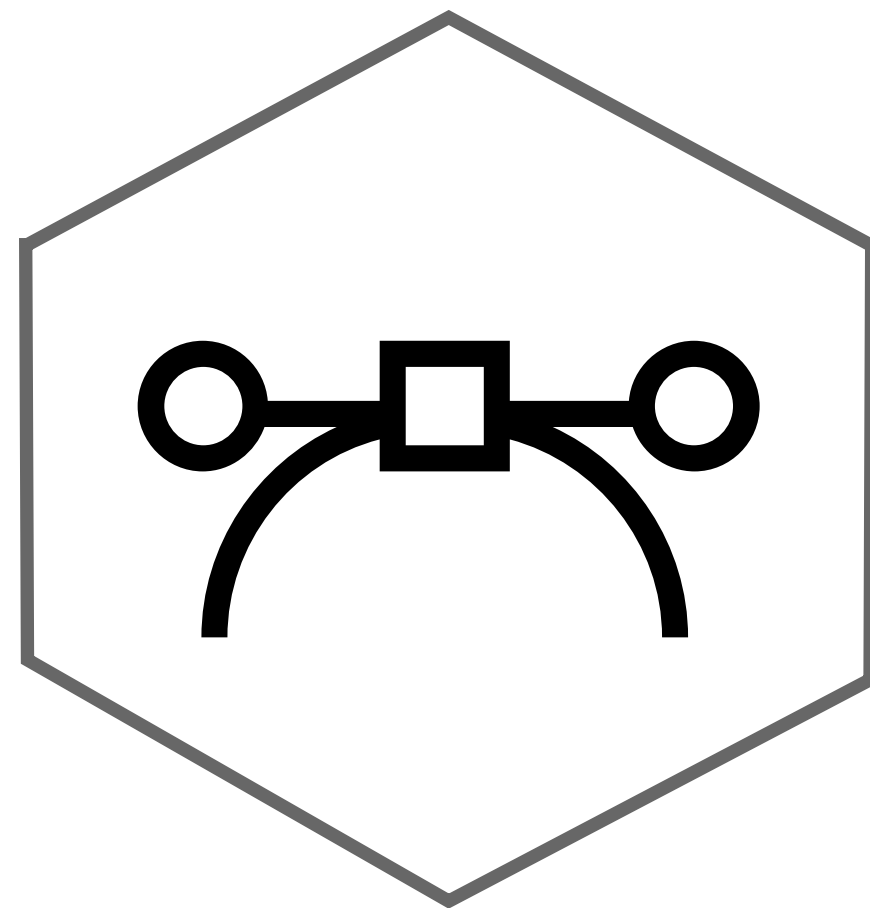
Movimento em voo livre segue uma trajetória **parabólica**

$(\begin{smallmatrix} + \\ \rightarrow \end{smallmatrix})$	$v = v_0 + a_c t;$	$v_x = (v_0)_x$
$(\begin{smallmatrix} + \\ \rightarrow \end{smallmatrix})$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2;$	$x = x_0 + (v_0)_x t$
$(\begin{smallmatrix} + \\ \rightarrow \end{smallmatrix})$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c (x - x_0);$	$v_x = (v_0)_x$

$(\begin{smallmatrix} + \\ \uparrow \end{smallmatrix})$	$v = v_0 + a_c t;$	$v_y = (v_0)_y - gt$
$(\begin{smallmatrix} + \\ \uparrow \end{smallmatrix})$	$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2;$	$y = y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} g t^2$
$(\begin{smallmatrix} + \\ \uparrow \end{smallmatrix})$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c (y - y_0);$	$v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$

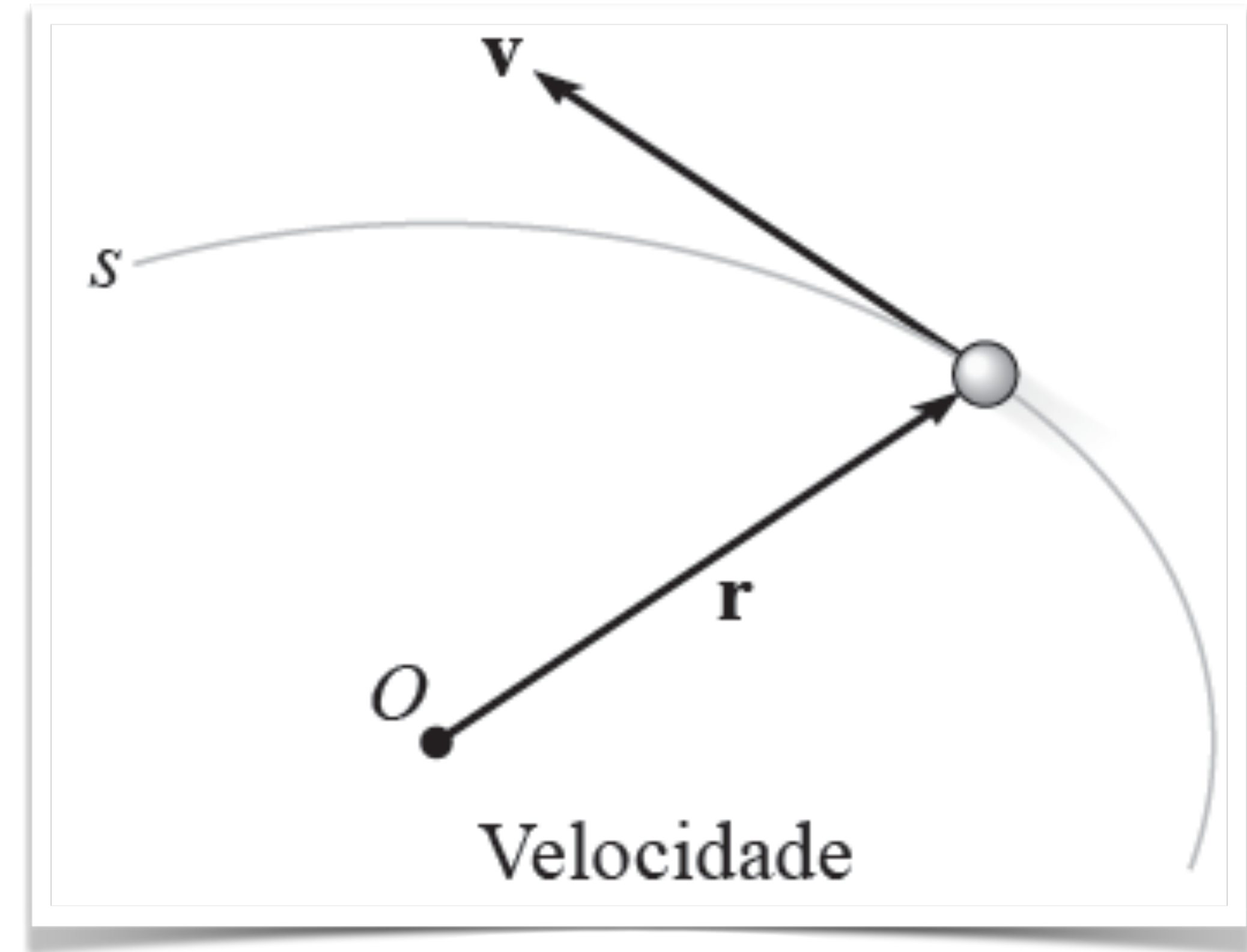
3 equações independentes

 aula passada...

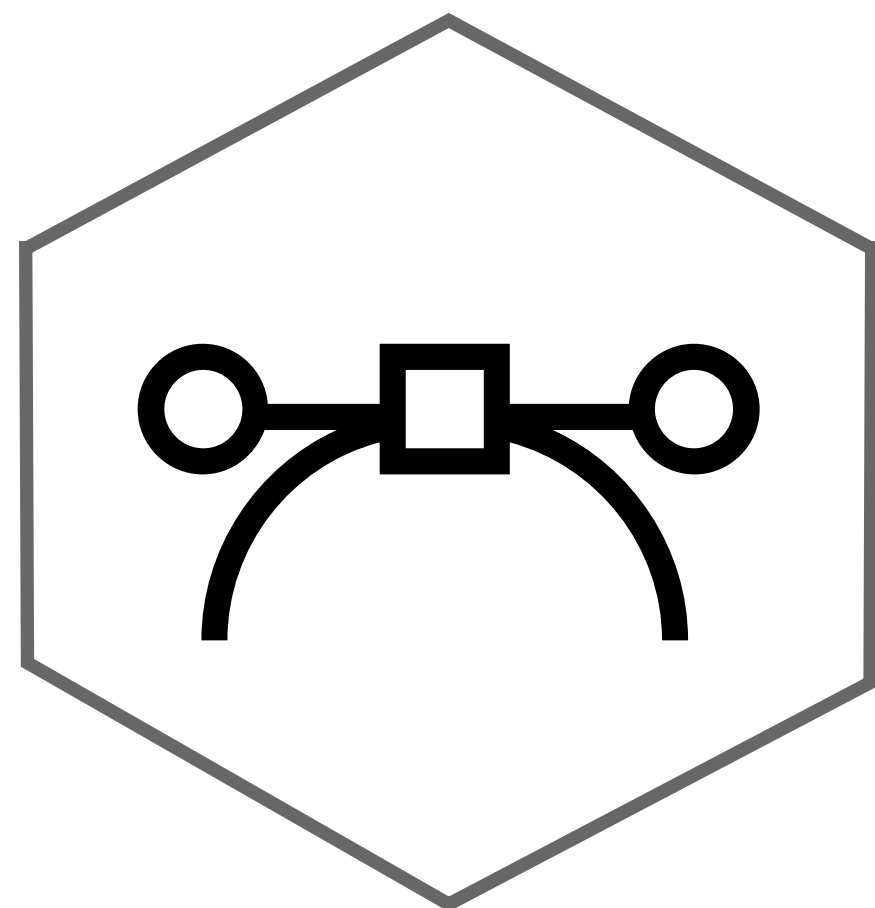


Velocidade é **tangente** à **trajetória** e aceleração à **hodógrafa**

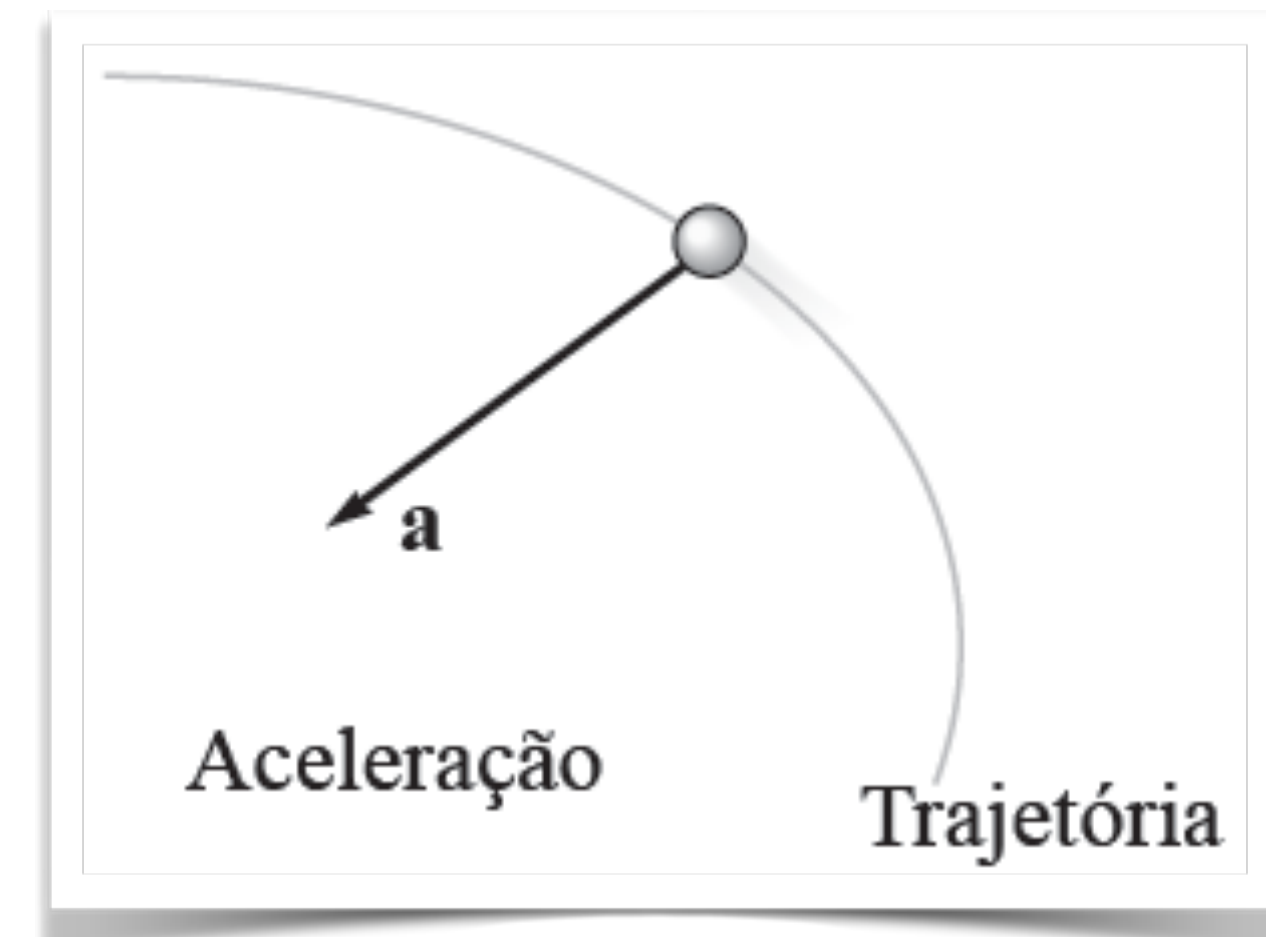
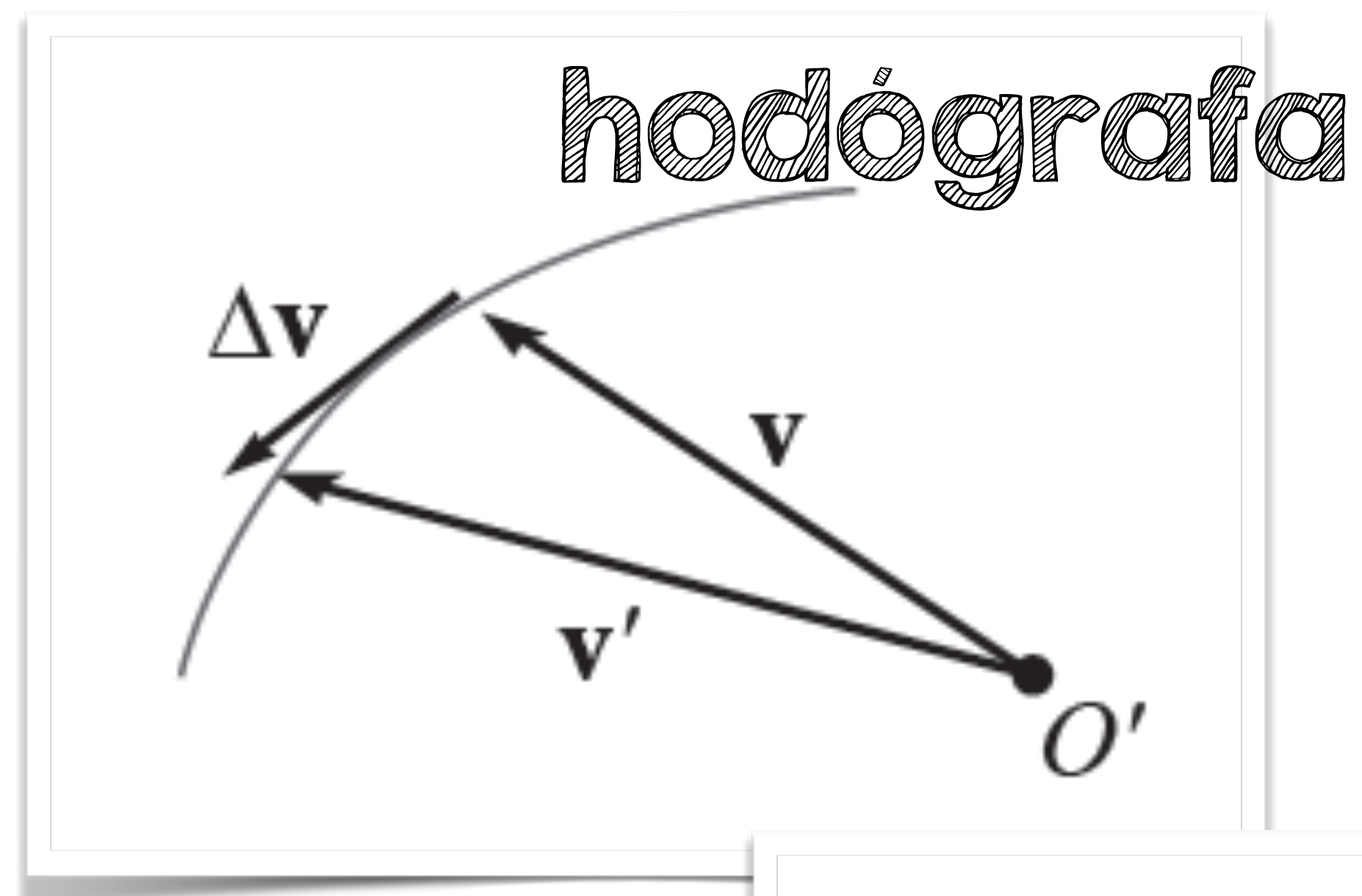
tangente à curva



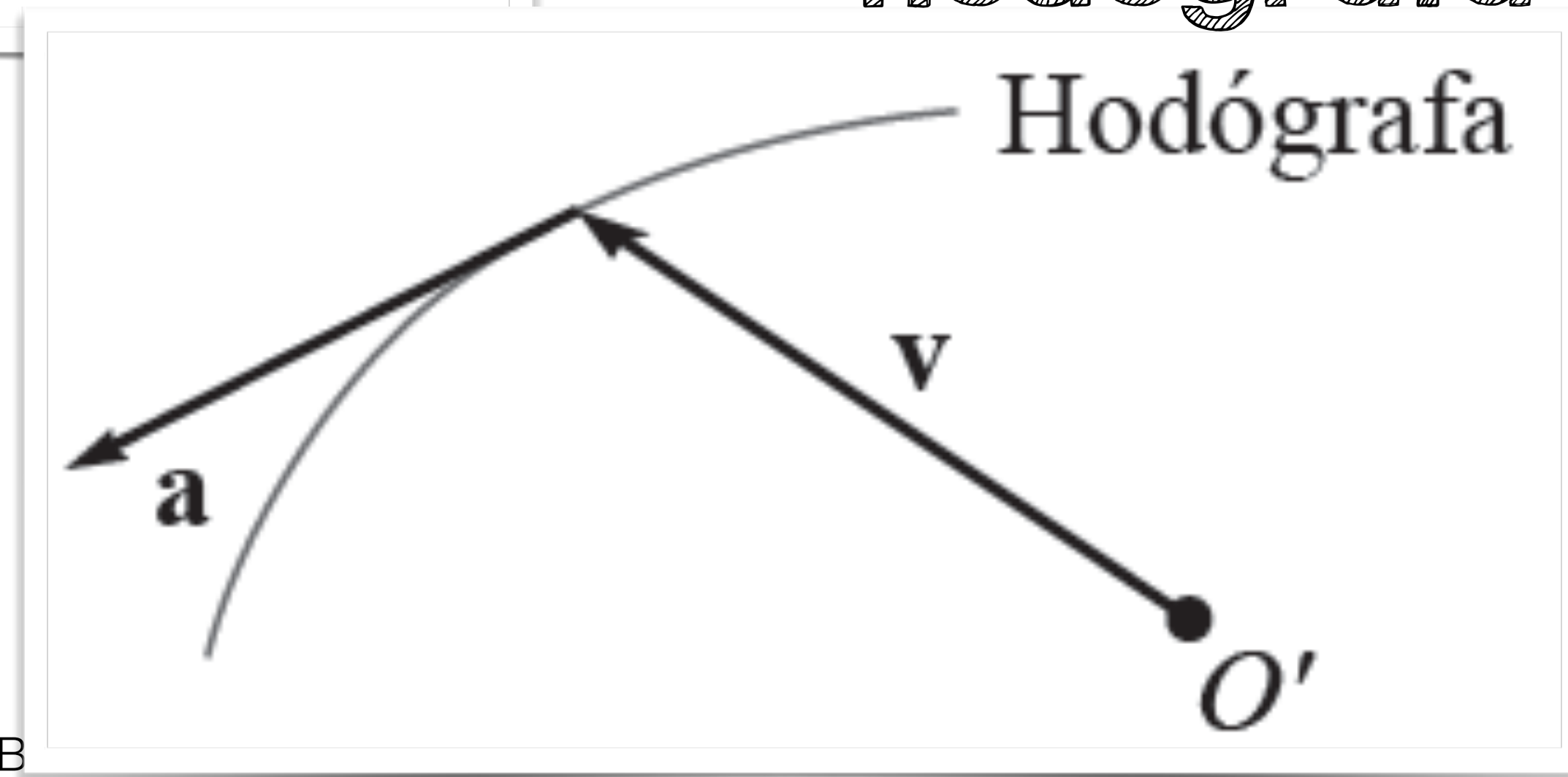
aula passada...

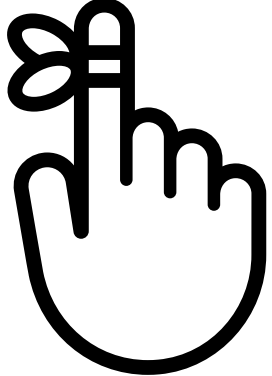


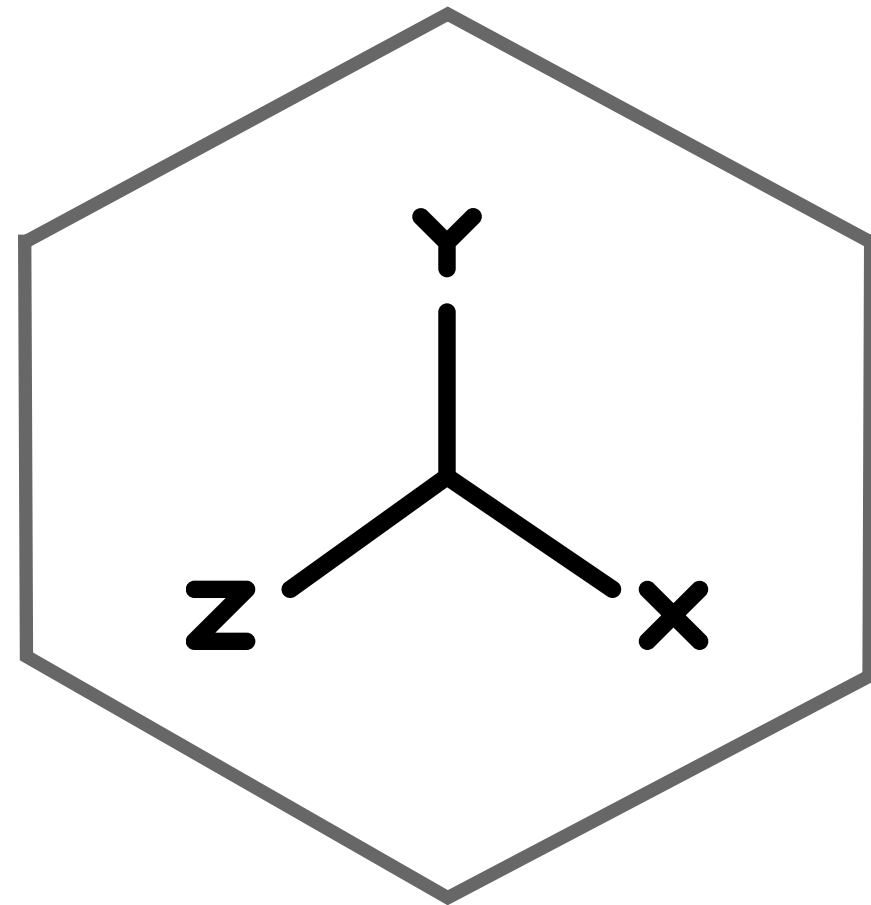
Velocidade é **tangente** à **trajetória** e aceleração à **hodógrafa**



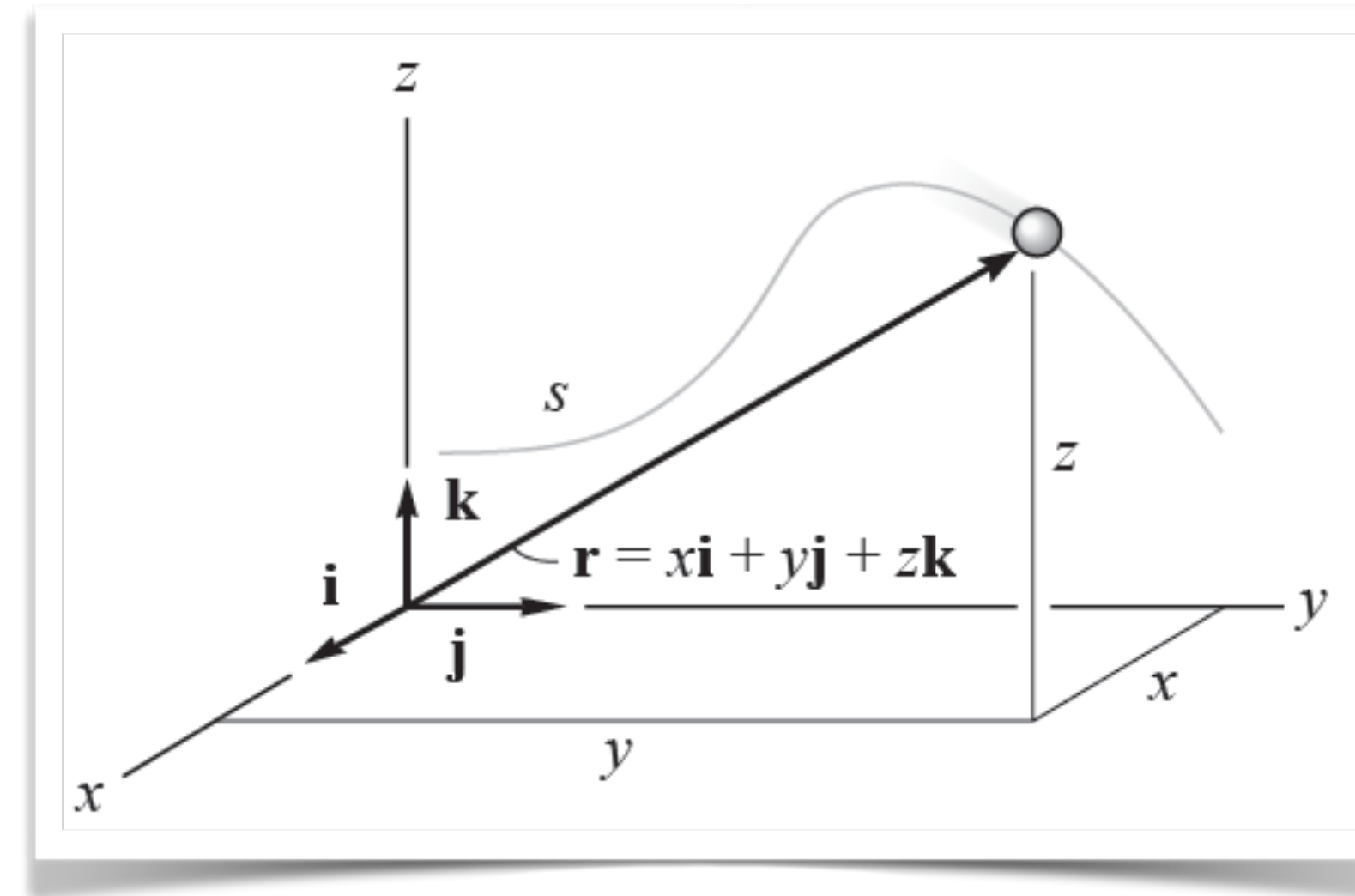
tangente à **hodógrafa**



 aula passada...



Movimento **curvilíneo**
pode ser decomposto
em movimento
retilíneo ao longo
dos eixos **x, y, z**

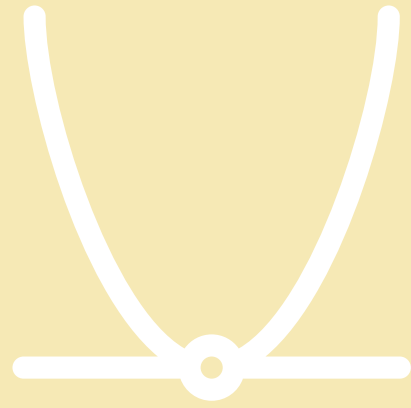


$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

Conteúdo



- Aula passada...
- **Componentes normal e tangencial**
- Exemplo

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Movimento curvilíneo em prática

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

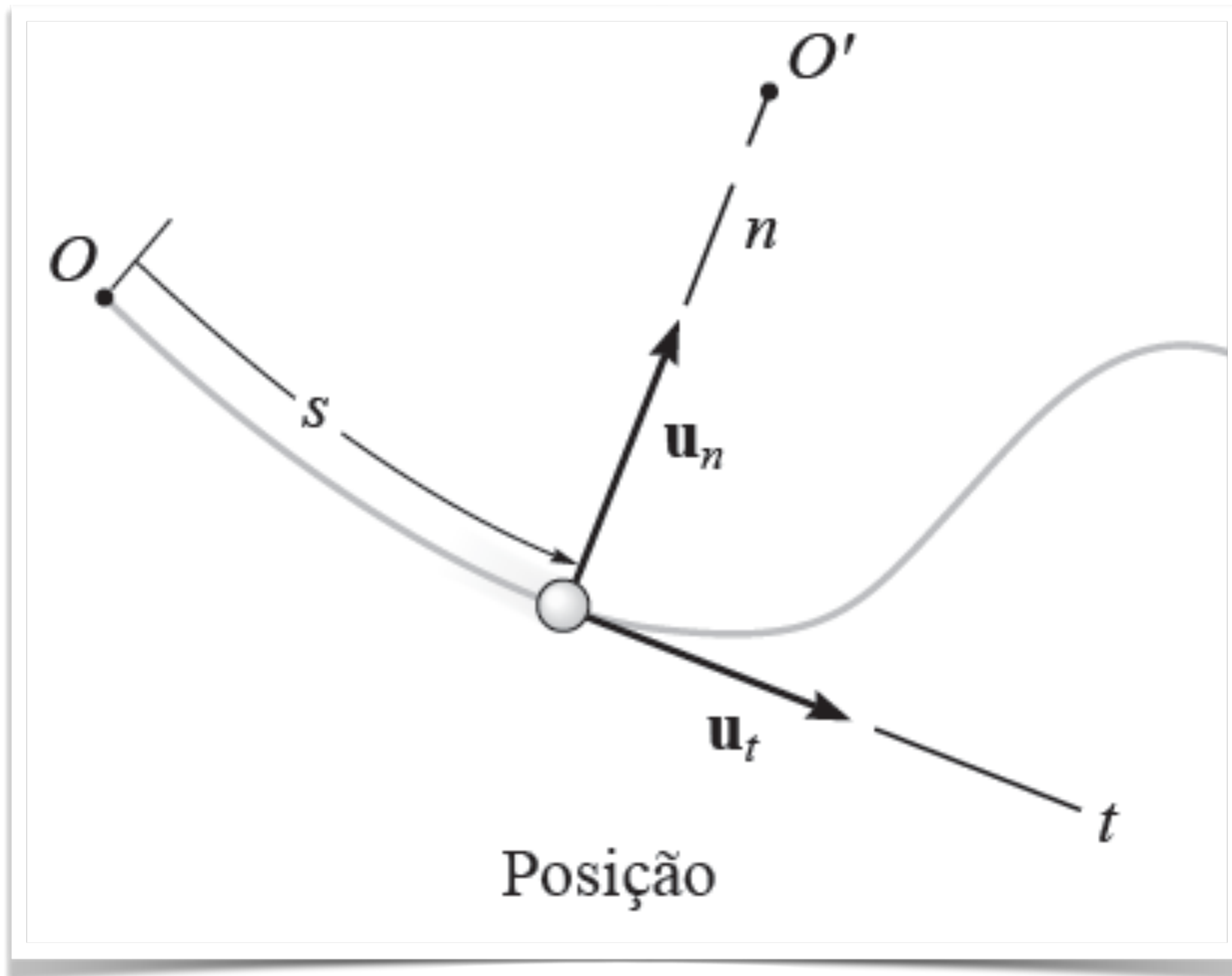


Movimento plano

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



trajetória
conhecida

origem na
partícula

Eixo normal

Comp. Normal e Tangencial

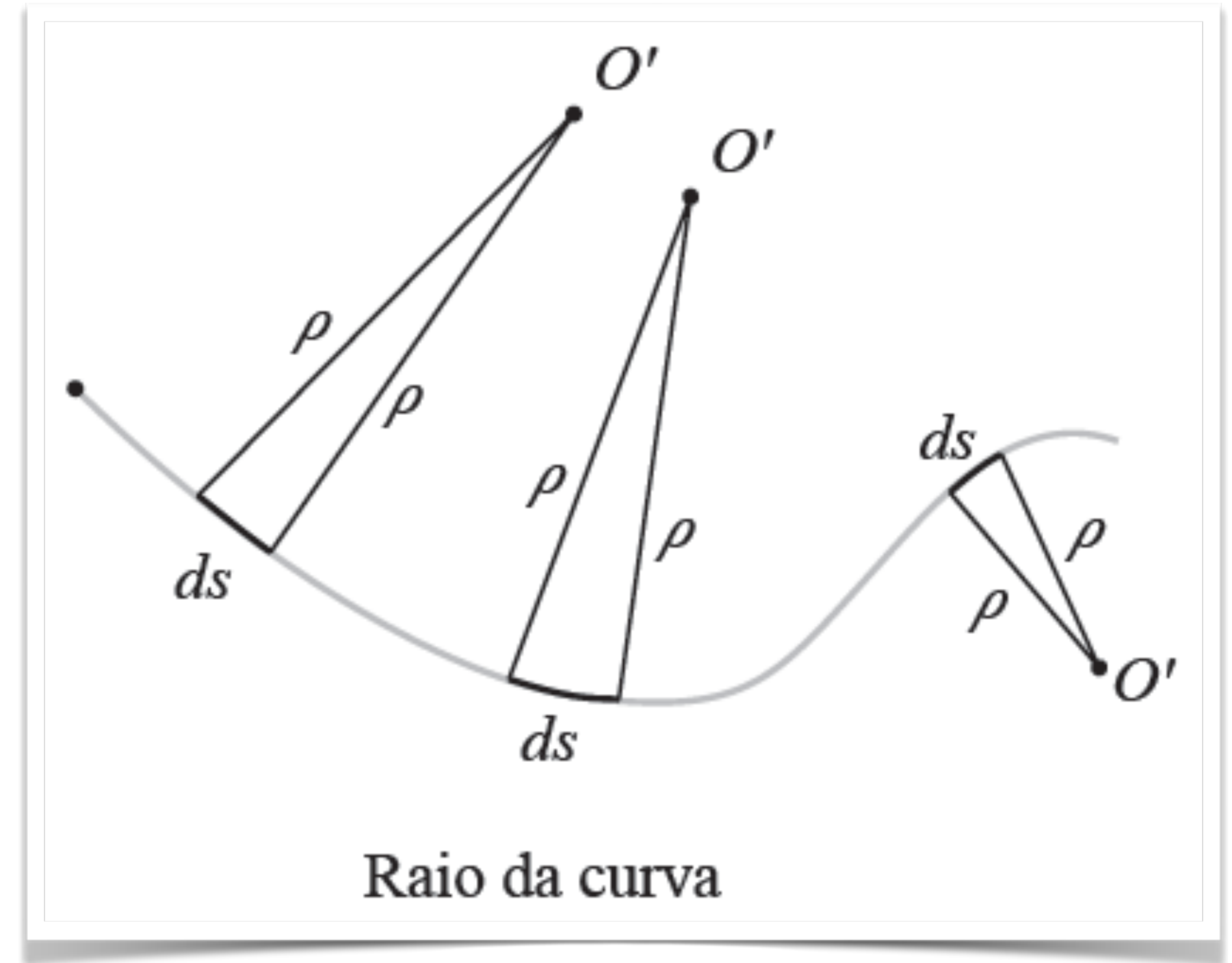
Componentes Cilíndricas

Conclusão

Raio de curvatura ρ

Centro de curvatura O'

Sempre do lado côncavo da curva

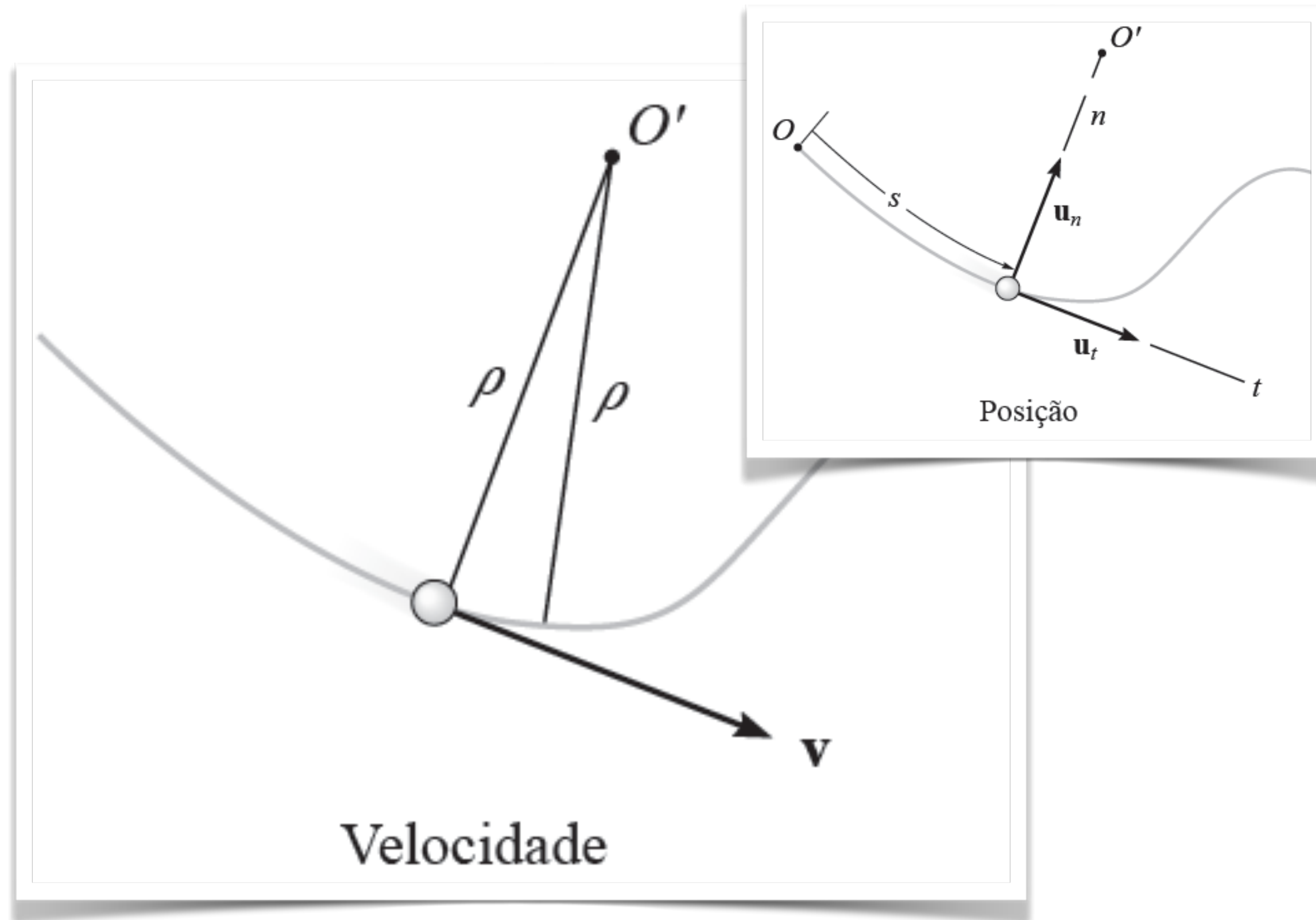


Velocidade

Comp. Normal e Tangencial

Componentes Cilíndricas

Conclusão



$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Direção sempre tangente à trajetória

Aceleração

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

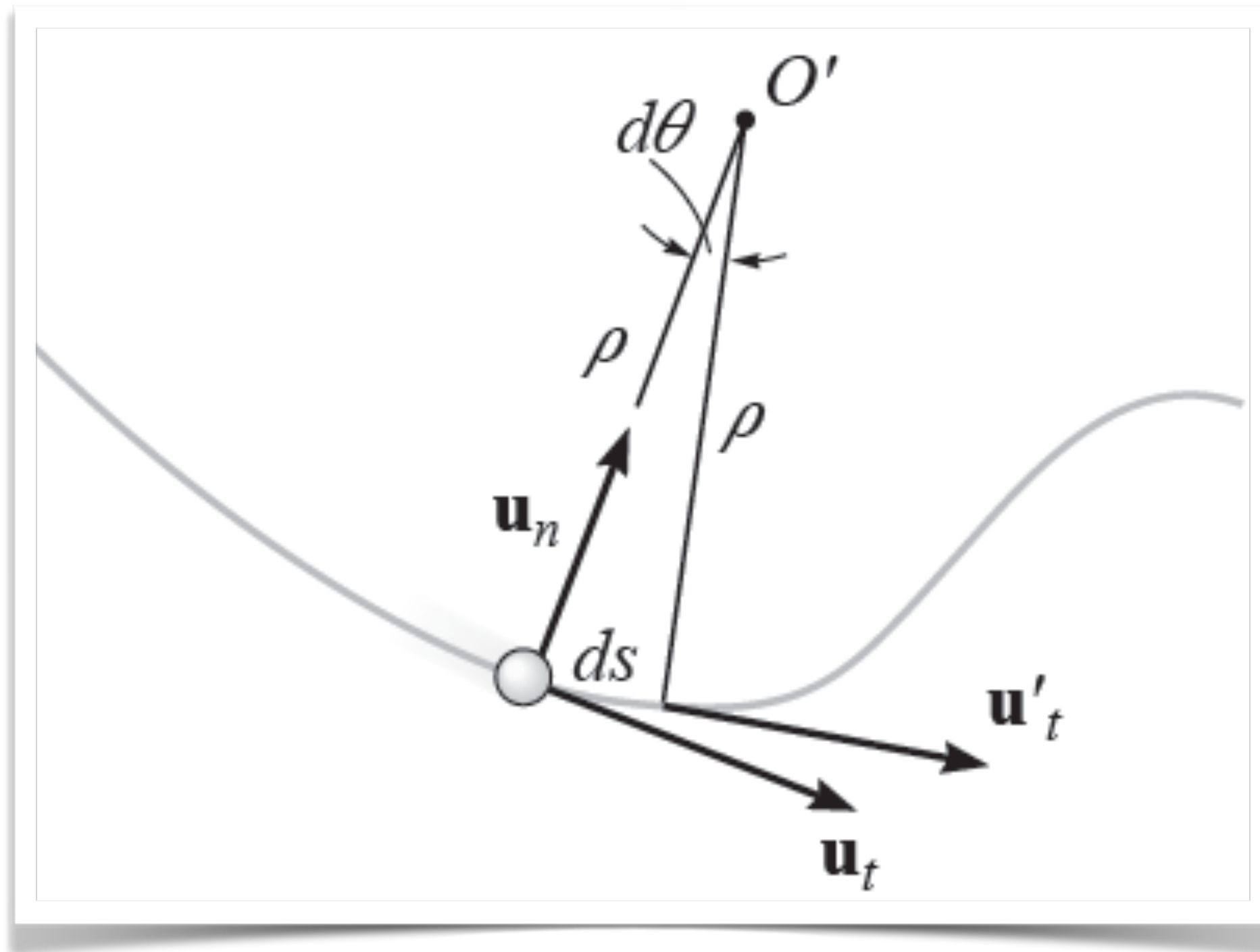
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{u}_t + v \dot{\mathbf{u}}_t$$

Aceleração

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$



$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} ?$$
$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \left(\frac{v}{\rho} \right) \mathbf{u}_n$$

Direção varia, magnitude constante

Comp. Normal e Tangencial

Componentes Cilíndricas

Conclusão

Aceleração

Comp. Normal e
Tangencial

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$

$$d\mathbf{u}_t = \left(\frac{v}{\rho} \right) \mathbf{u}_n$$

Componentes
Cilíndricas

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a \, ds = v \, dv$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Conclusão

Raio de curvatura

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Se trajetória pode ser descrita por:

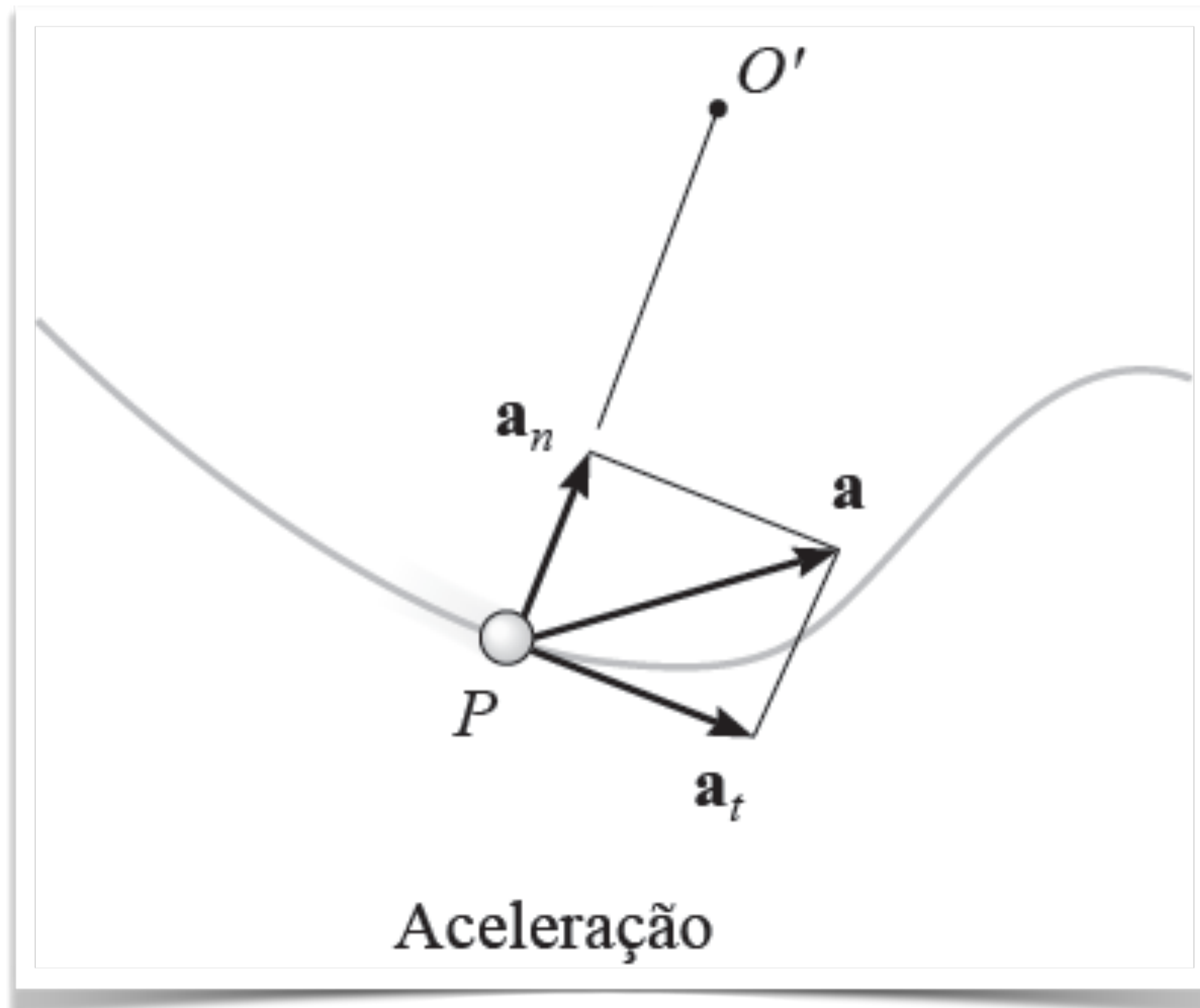
$$y = f(x)$$

Então:

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}{|d^2y/dx^2|}$$

Aceleração

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$



Intensidade?

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Aceleração — Casos particulares

Comp. Normal e Tangencial

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Componentes Cilíndricas

Movimento retilíneo: $a = a_t = \dot{v}$
 $\rho = \infty$

Conclusão

Componente **tangencial** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **intensidade** da velocidade

Aceleração — Casos particulares

Comp. Normal e Tangencial

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Componentes Cilíndricas

Velocidade escalar **constante**: $a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$
 $\dot{v} = 0$

Componente **normal** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **direção** da velocidade

aceleração centrípeta

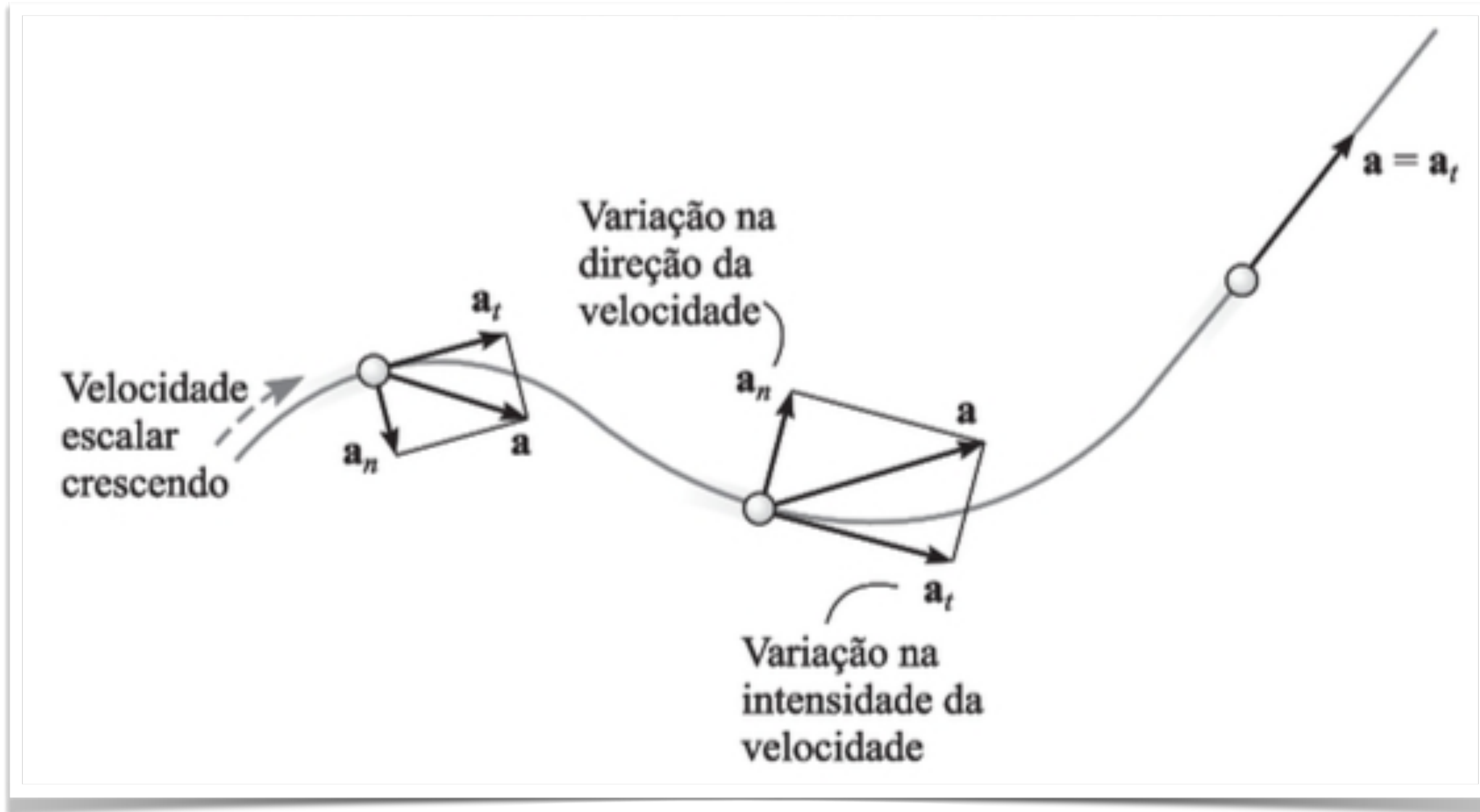
Conclusão

Aceleração

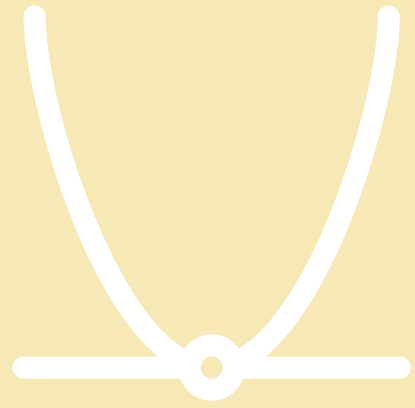
Comp. Normal e Tangencial

Componentes Cilíndricas

Conclusão



Conteúdo



- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- **Exemplo**

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

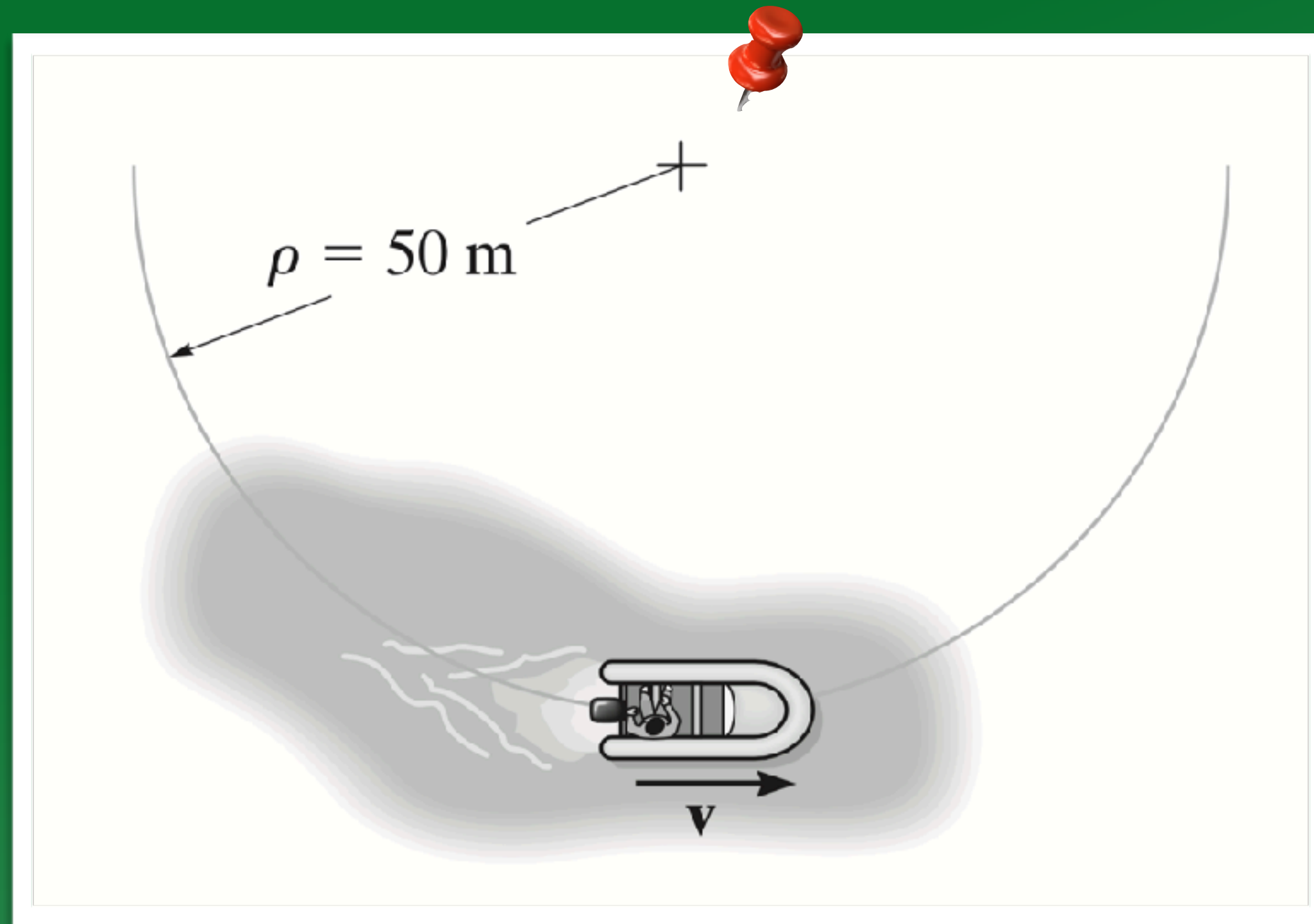
Conclusão

Problema 12.117

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



$$v = 0,8t$$

$$|\mathbf{v}| = ?$$

$$|\mathbf{a}| = ?$$

$$\text{para } \Delta S = 20 \text{ m}$$

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial



- **Coordenadas polares**
- Coordenadas cilíndricas
- Exemplo

Componentes
Cilíndricas

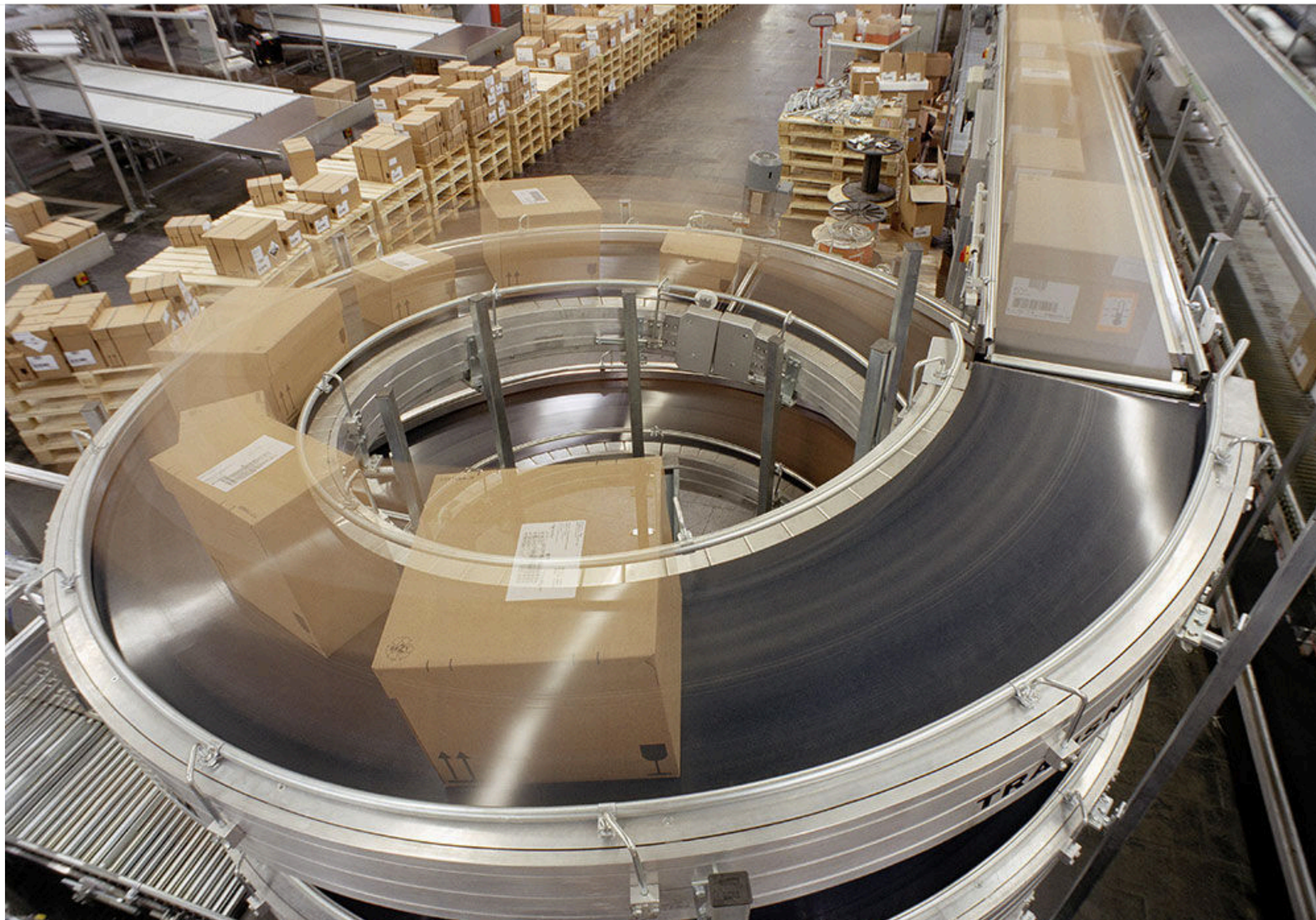
Conclusão

Coordenadas polares

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



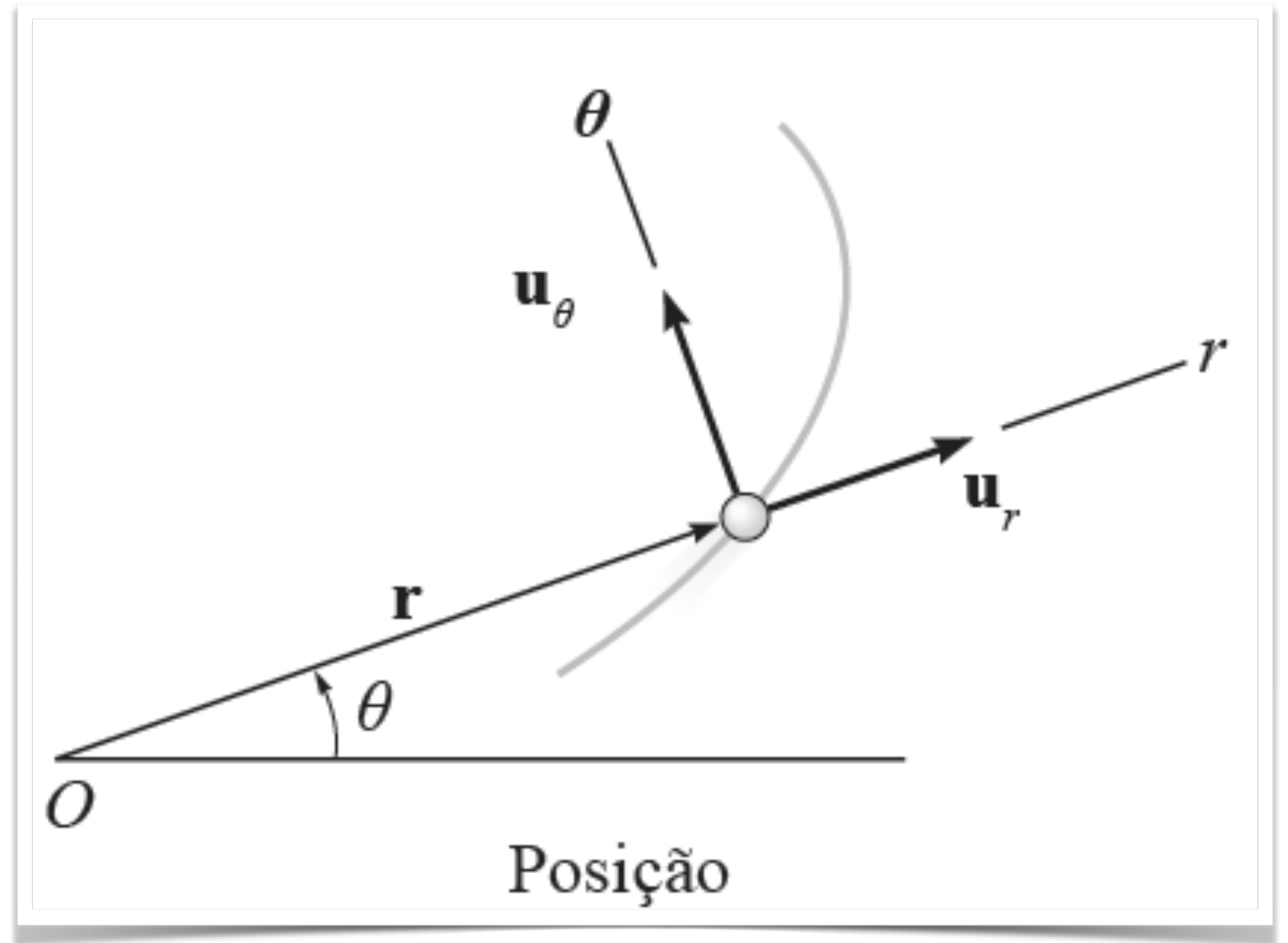
Posição

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$



Velocidade

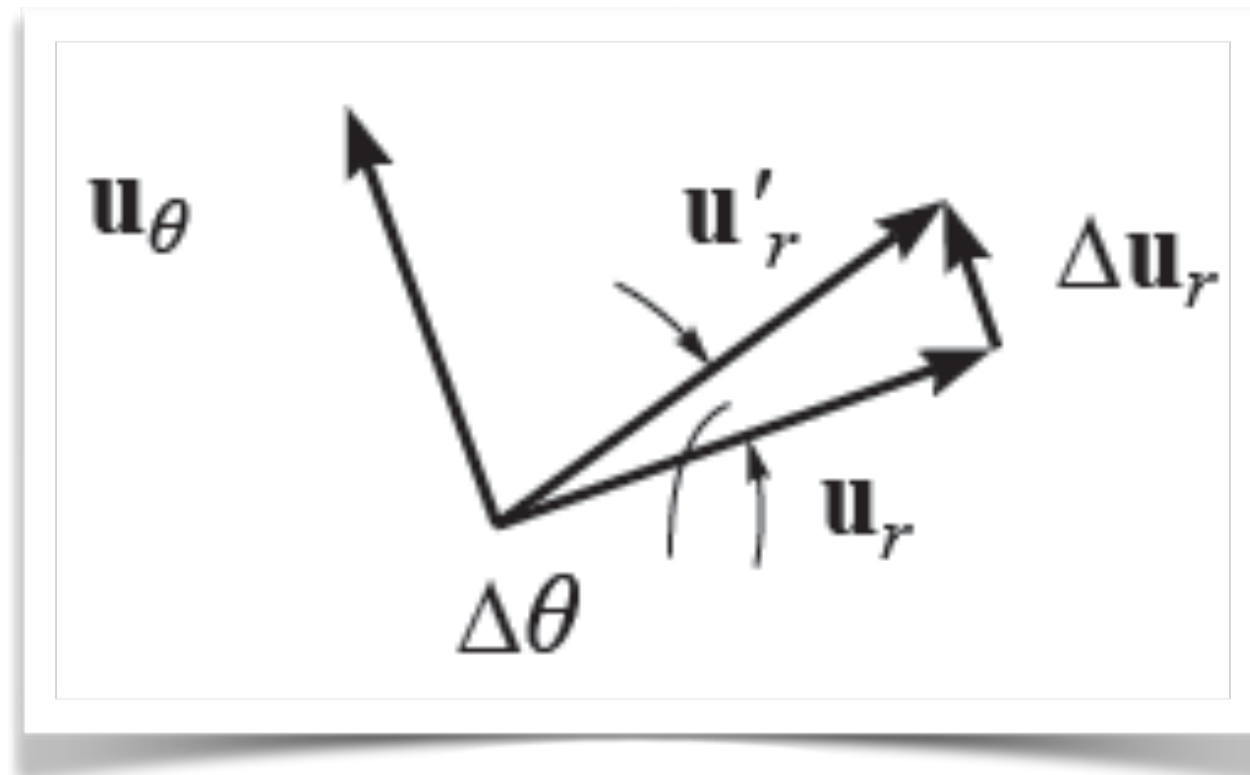
Comp. Normal e Tangencial

Componentes Cilíndricas

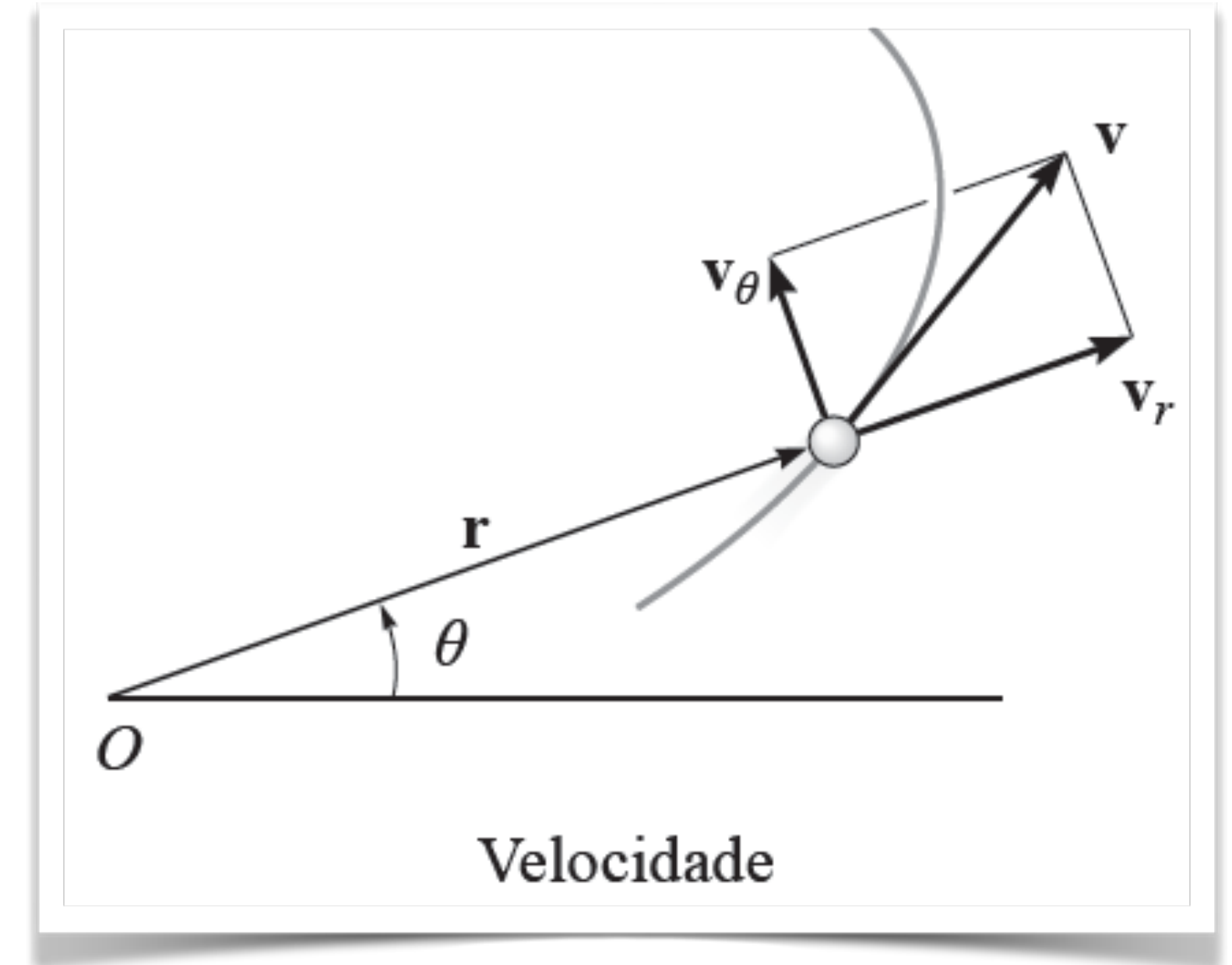
Conclusão

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\mathbf{u}}_r$$



$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$



$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$

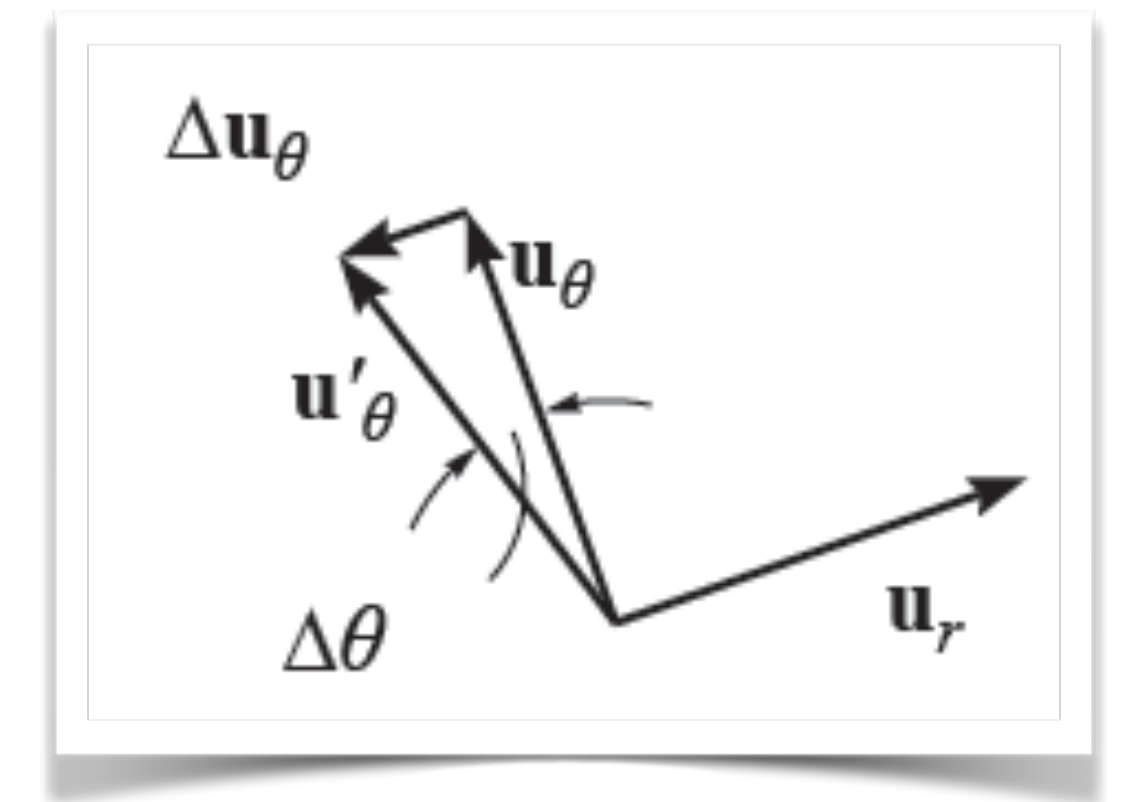
$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \end{cases}$$

Aceleração

Comp. Normal e Tangencial

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$



Componentes Cilíndricas

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_r \mathbf{u}_r + v_r \dot{\mathbf{u}}_r + \dot{v}_\theta \mathbf{u}_\theta + v_\theta \dot{\mathbf{u}}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r$$

Conclusão

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

Conteúdo

Comp. Normal e Tangencial



- Coordenadas polares
- **Coordenadas cilíndricas**
- Exemplo

Componentes Cilíndricas

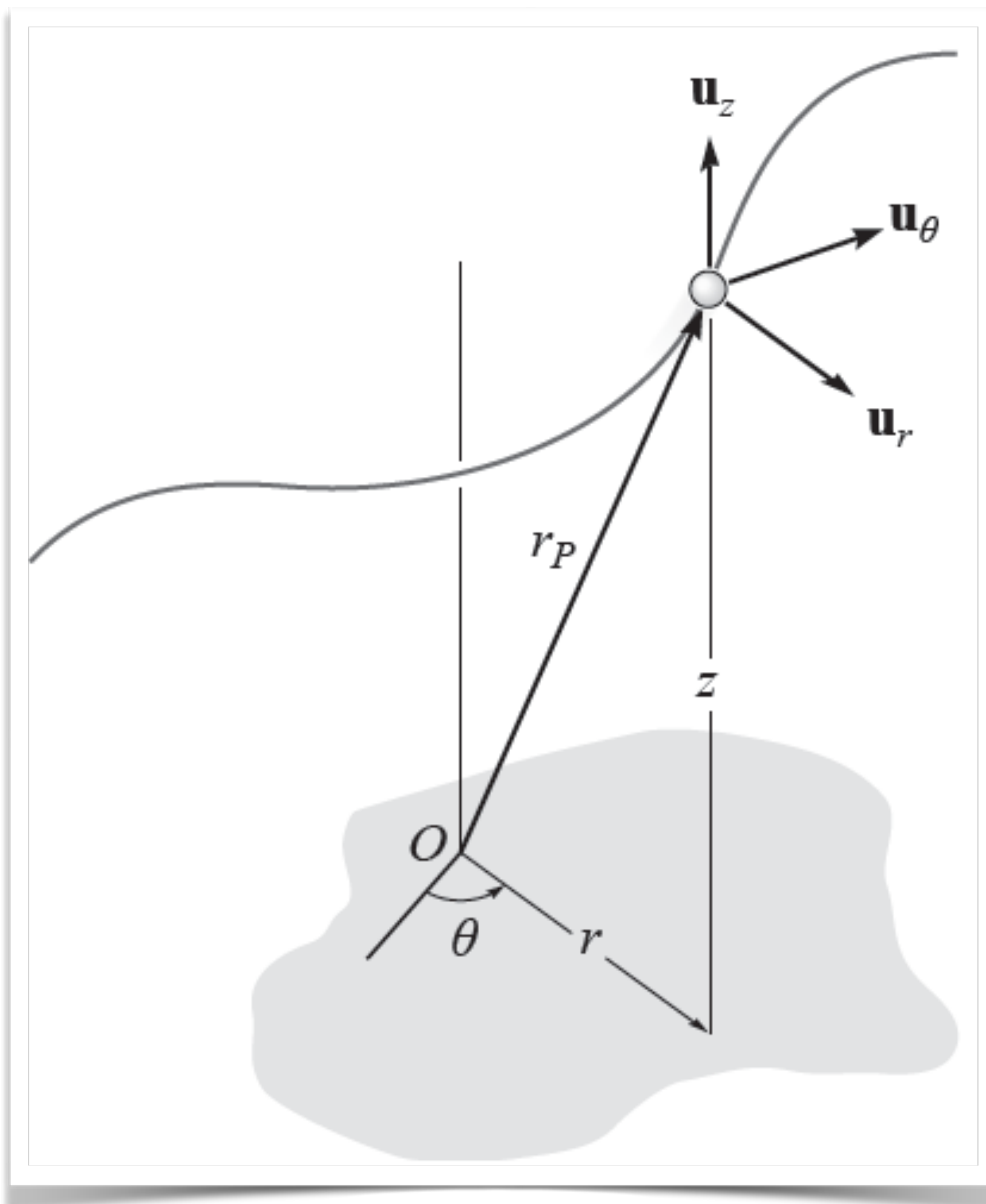
Conclusão

Coordenadas cilíndricas

Comp. Normal e Tangencial

Componentes Cilíndricas

Conclusão



Nova coordenada: **Z**

$$\dot{\mathbf{u}}_z = 0$$

(direção do vetor unitário em Z não muda!)

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$$

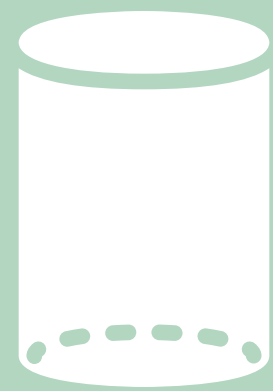
$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta$$

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial



- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- **Exemplo**

Componentes
Cilíndricas

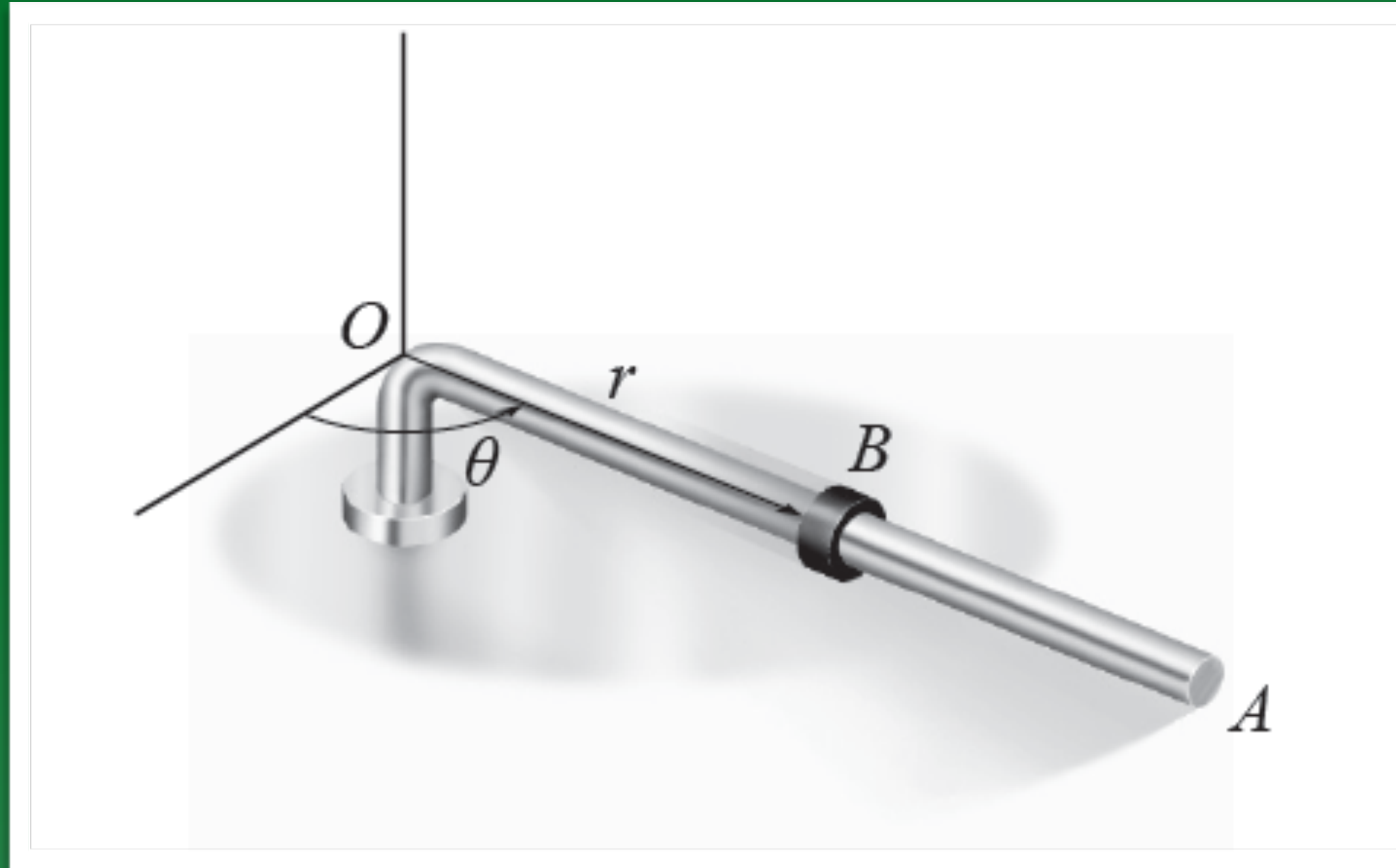
Conclusão

Exemplo 12.18

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



$$\theta = t^3$$

$$r = 100t^2 \text{ mm}$$

v, a para $t = 1 \text{ s}$

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas



- “Take-home messages”
- Próxima aula...

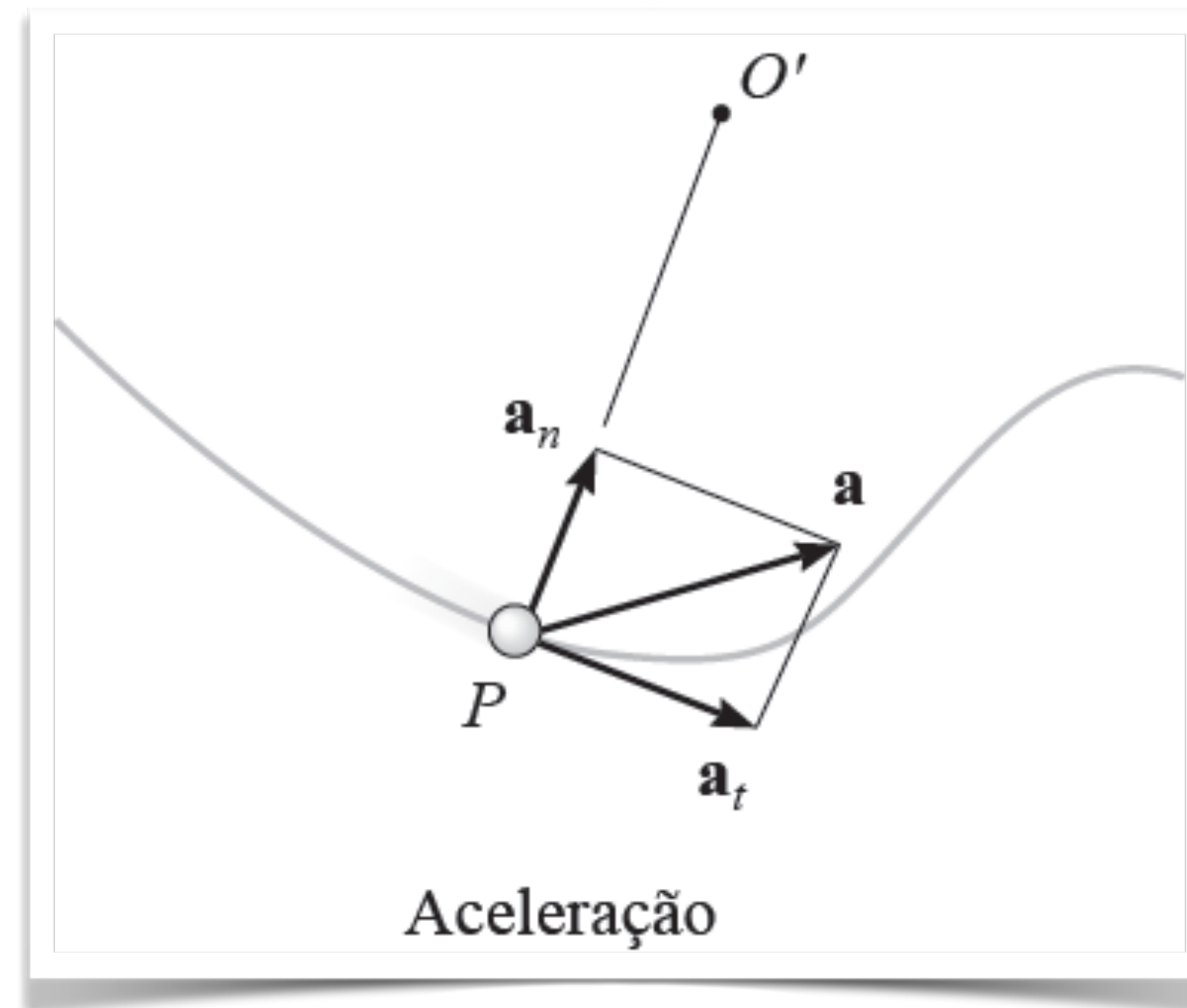
Conclusão

“Take-home messages”

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



Componente **tangencial** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **intensidade** da velocidade

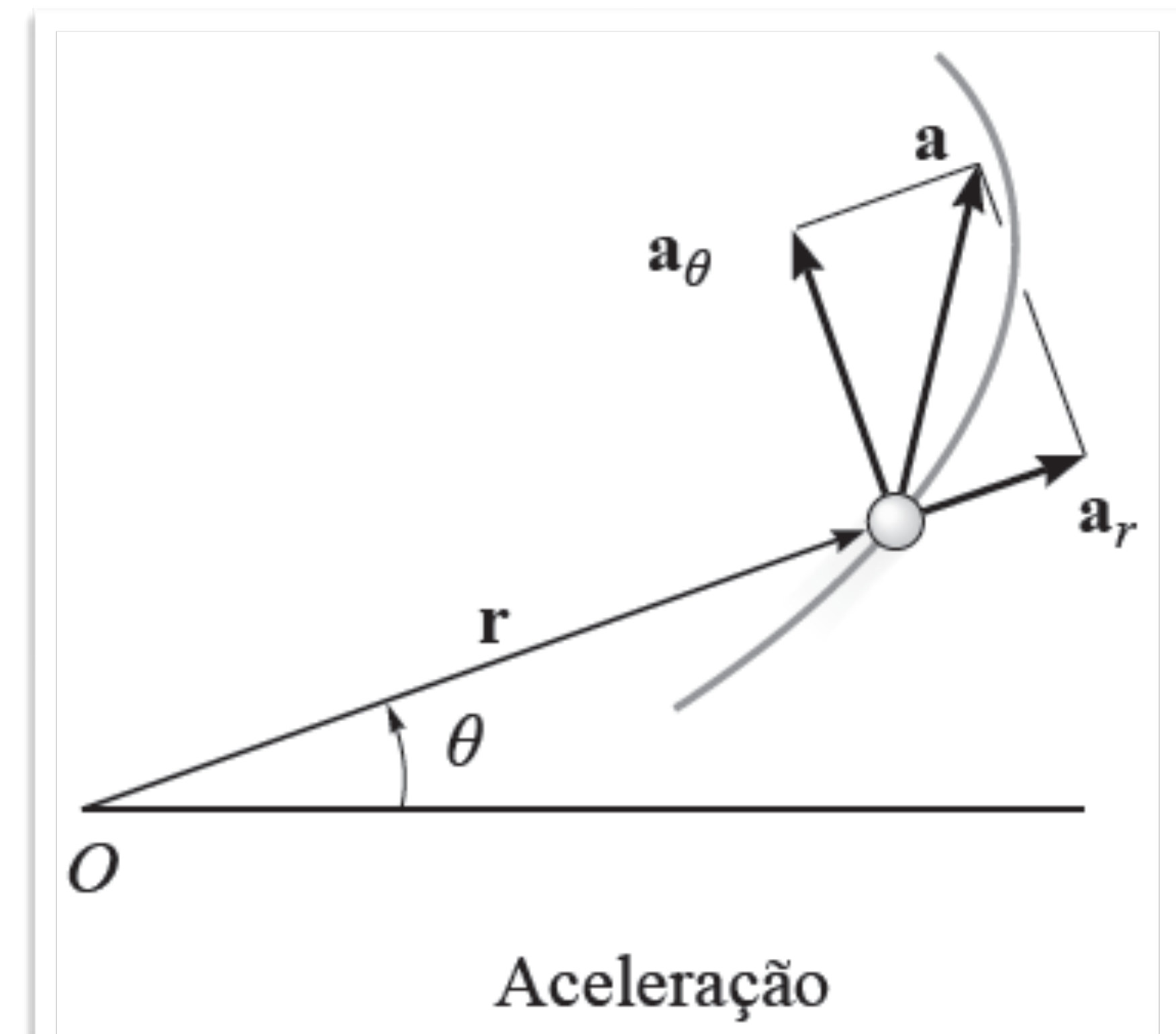
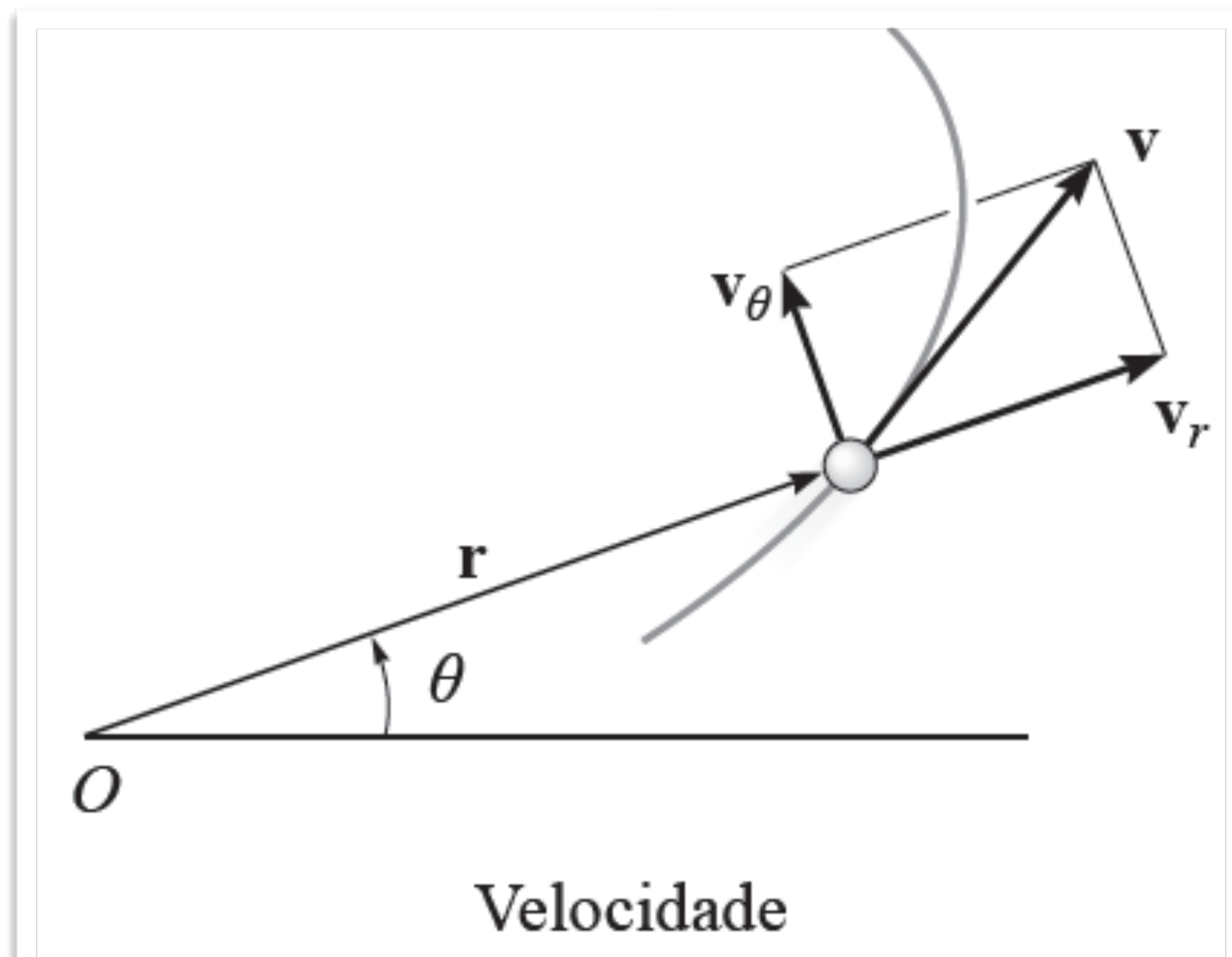
Componente **normal** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **direção** da velocidade

“Take-home messages”

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

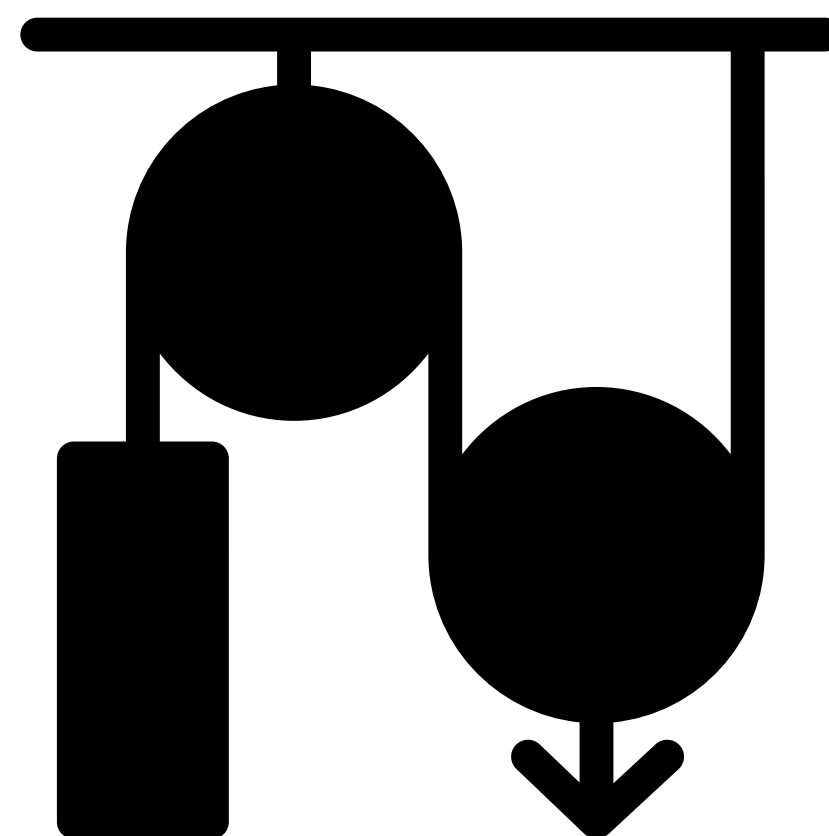


Próxima aula...

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



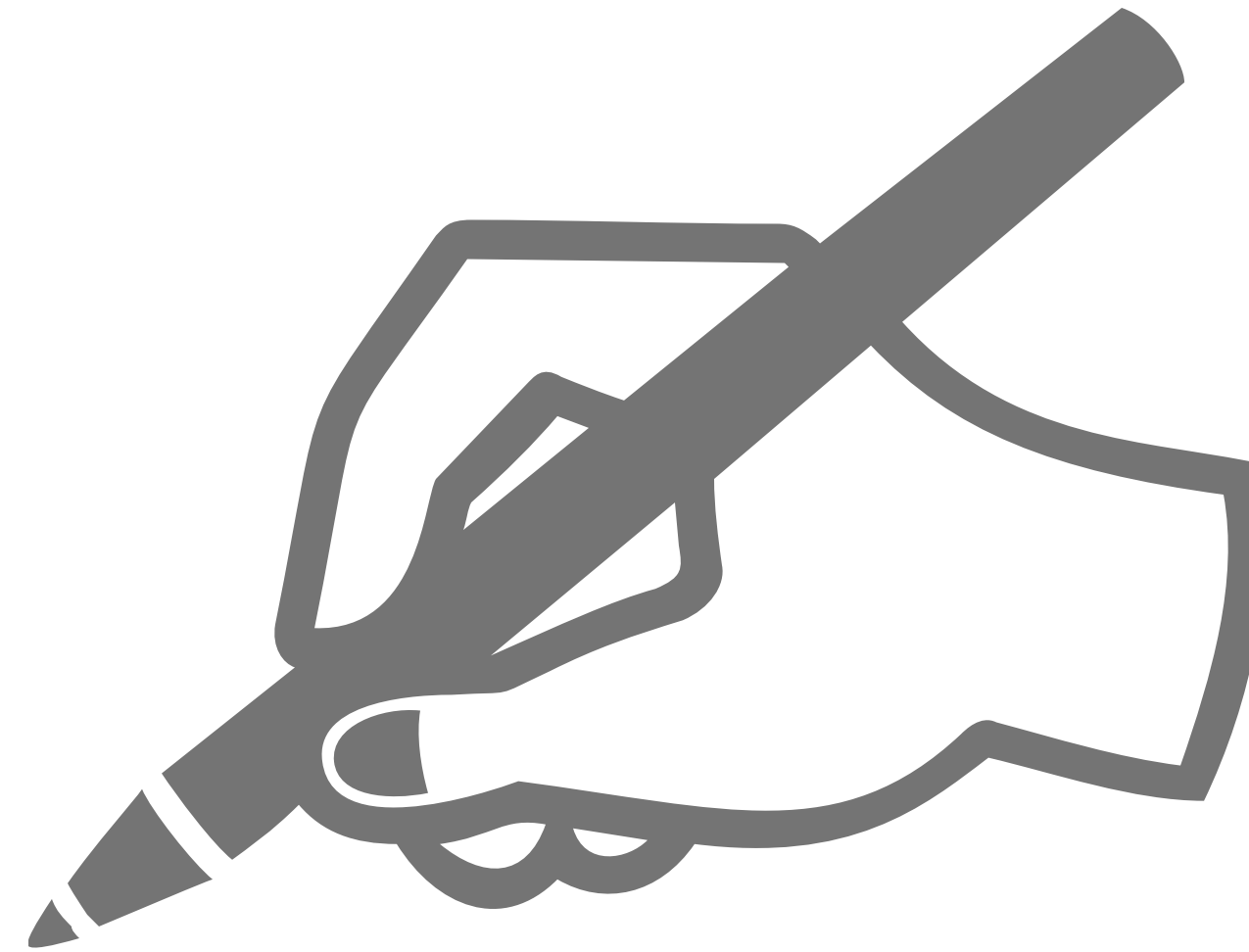
Movimento relativo:
cabos, roldanas, sistemas
em translação

Lista de exercícios para próxima aula...

Introdução

Movimento
Curvilíneo

Conclusão



12.118, 12.140, 12.151, 12.157, 12.165, 12.173



That's all Folks!