



DISCIPLINA

PEF – 3528 – Ferramentas Computacionais na Mecânica das Estruturas Criação e Concepção

Aula 02

Valério S. Almeida - 2018
valerio.almeida@usp.br



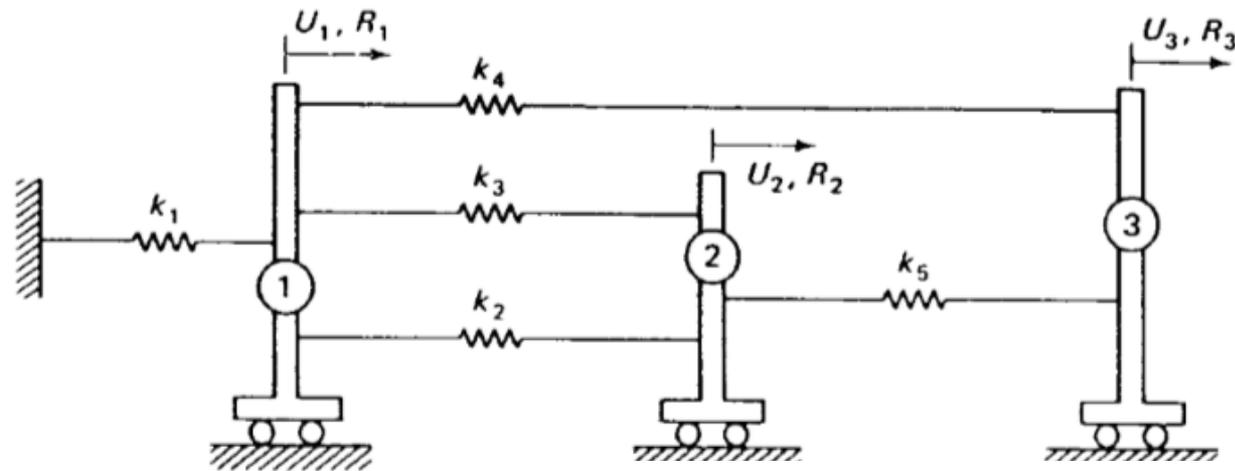
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Permite resolver problemas de difícil geometria com relativa facilidade. Originado em 1955, do método matricial de modelos reticulados (indústria aeronáutica). Sua formulação foi feita por Argyris e Kelsey (1955) e por Turner, Martin e Topp (1956).

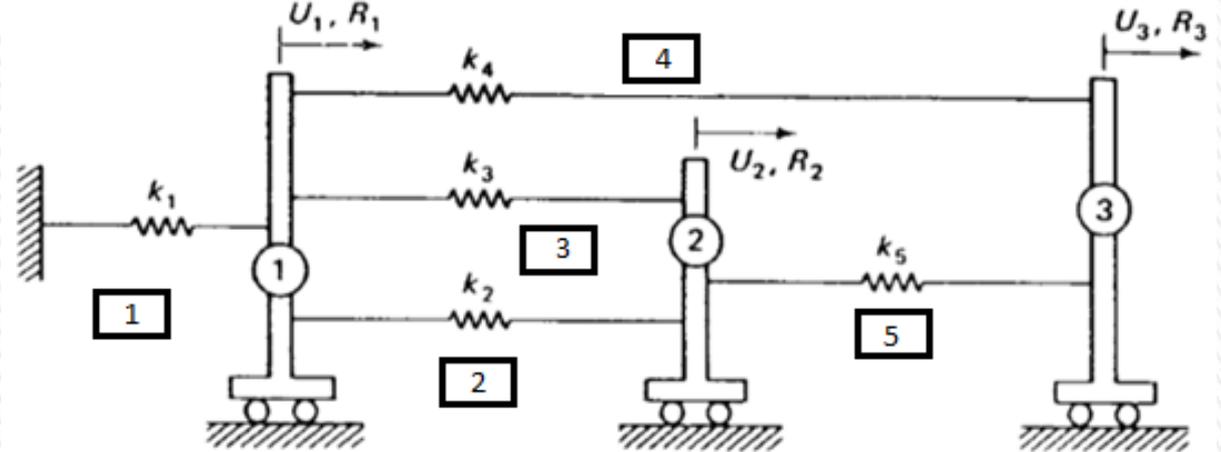
Mas, antes de apresentar e resolver a estrutura por MEF, vamos apresentar um problema mais simples:



SISTEMA LINEAR DE BARRAS COM MOLAS ELÁSTICAS



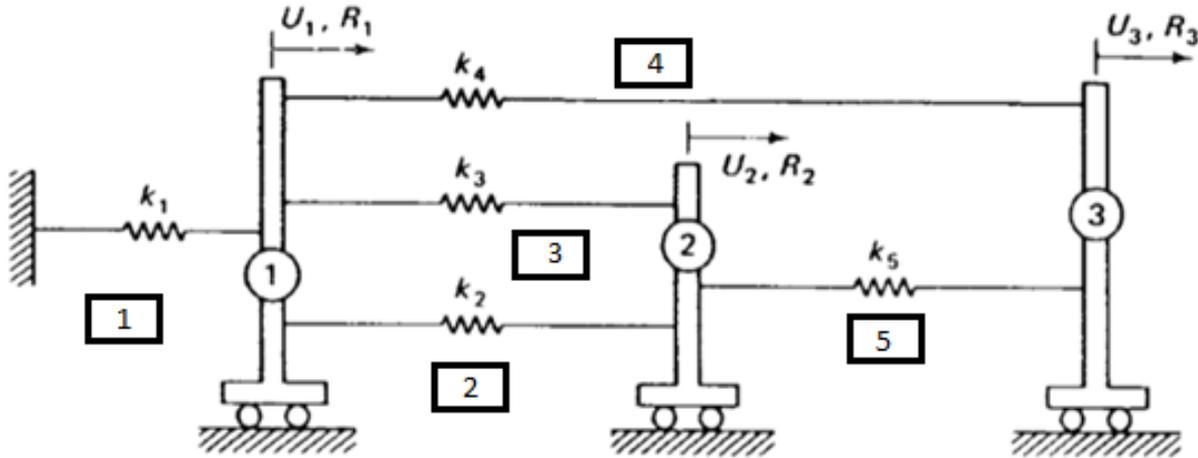
DIVIDA EM
ELEMENTOS E NÓS:



1 ELEMENTO 1

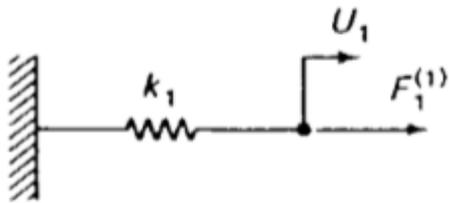
1 NÓ 1

Em cada nó associa-se deslocamento (U_1, U_2, U_3) e força (R_1, R_2, R_3)



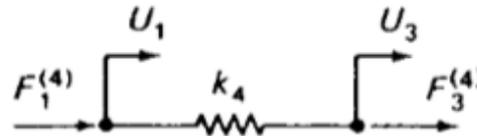
$$k_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 3



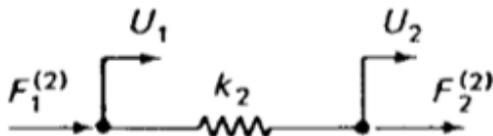
$$k_1 U_1 = F_1^{(1)}$$

ELEMENTO 1



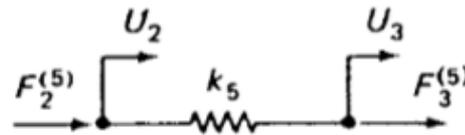
$$k_4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(4)} \\ F_3^{(4)} \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 4



$$k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

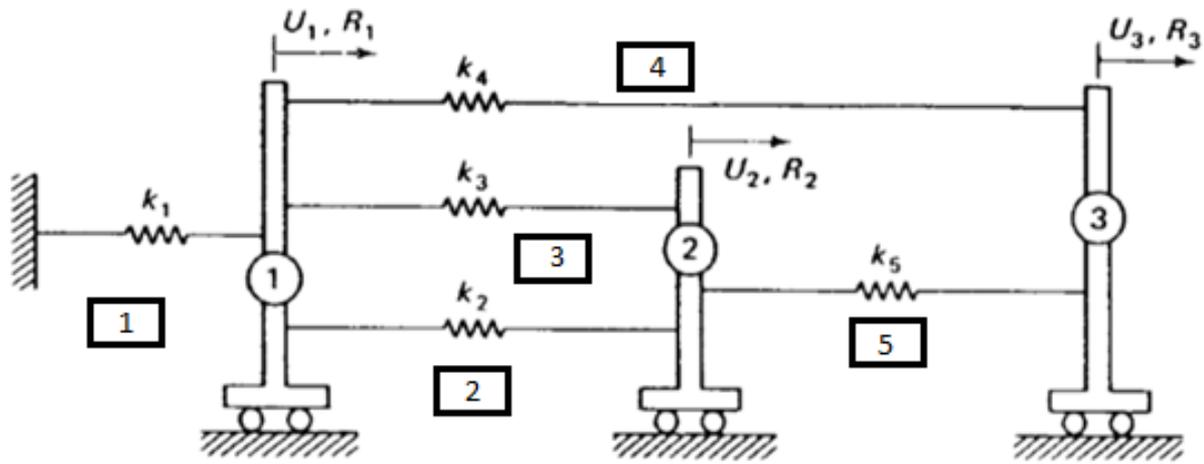
ELEMENTO 2



$$k_5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(5)} \\ F_3^{(5)} \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 5

Eqs. (1)



Equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + F_1^{(4)} &= R_1 \\
 F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + F_2^{(5)} &= R_2 \\
 F_3^{(4)} + F_3^{(5)} &= R_3
 \end{aligned}$$

Eq. (2)

Substituindo as Eqs. (1) na Eq. (2), tem-se o sistema linear a ser resolvido

$$\begin{bmatrix}
 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) & -(k_2 + k_3) & -(k_4) \\
 -(k_2 + k_3) & (k_2 + k_3 + k_5) & -(k_5) \\
 -(k_4) & -(k_5) & (k_4 + k_5)
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

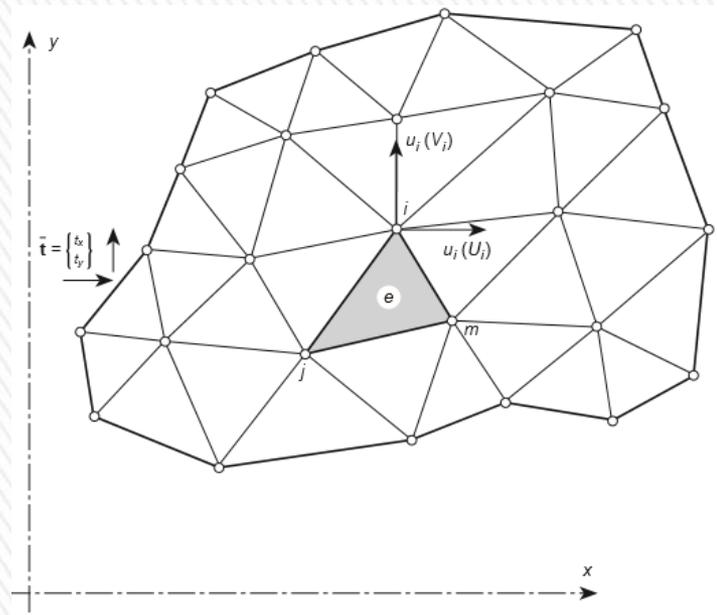
$$K.U = R$$

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Subdividir o domínio em subdomínios, em elementos finitos;

Aplicam as funções aproximadas para o campo das variáveis pertinentes nas EDPs de um problema de valor de contorno (PVC);

Para o caso de se basear no método dos deslocamentos, o campo aproximado é o dos deslocamentos, associados a parâmetros nodais.



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Permite resolver problemas de difícil geometria com relativa facilidade.

Originado em 1955, do método matricial de modelos reticulados (indústria aeronáutica). Sua formulação foi feita por Argyris e Kelsey (1955) e por Turner, Martin e Topp (1956).

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

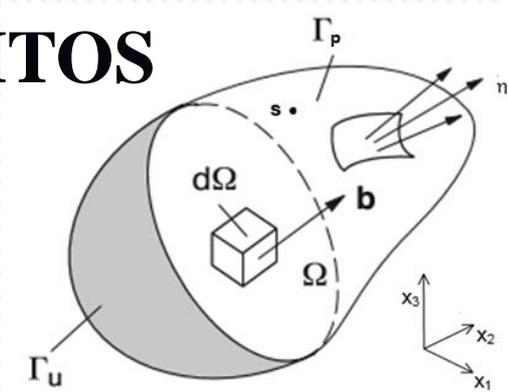
Partindo-se então das equações diferenciais de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\bar{p}_i = p_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad \text{em } \Gamma_p \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{forças de superfície prescritas}$$

$$\bar{u}_i = u_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{deslocamentos prescritos}$$

$$\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_u$$



Método dos Resíduos Ponderados

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + b_i) \hat{u}_i dV = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

\hat{u}_i : campo de deslocamentos contínuo e virtual, que satisfaça: $\hat{u}_i = 0$ em Γ_u

Aplicando-se o teorema da divergência, e uma identidade matemática, tem-se:

$$\int_V \hat{\varepsilon}^T \cdot \sigma dV = \int_V \hat{u} \cdot b dV + \int_{S_{\Gamma_p}} \hat{u} \cdot \bar{p} dS$$

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Na mecânica dos sólidos, é comum empregar o famoso método de Bubnov-Galerkin no PTV, o qual impõe que as funções pesos e admissíveis são iguais $u = \hat{u}_i$

$$u = H(x_i) u^{nodal} \quad i = 1,2,3 \quad \sigma = D\varepsilon$$

$$\varepsilon = B(x_i) u^{nodal} \quad i = 1,2,3$$

H e B são as matrizes de interpolação de desloc. e desloc. - deformação.

Para um elemento finito genérico “e”:

$$\{\hat{u}_e^{nodal}\}^T \left[\int_V B_e^T D_e B_e dV \right] \cdot \hat{u}_e^{nodal} = \{\hat{u}_e^{nodal}\}^T \int_V H_e^T b_e dV + \{\hat{u}_e^{nodal}\}^T \int_{S_{\Gamma_p}} H_e^T \bar{p}_e dS$$

$$K_e \cdot u_e^{nodal} = F_e$$

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

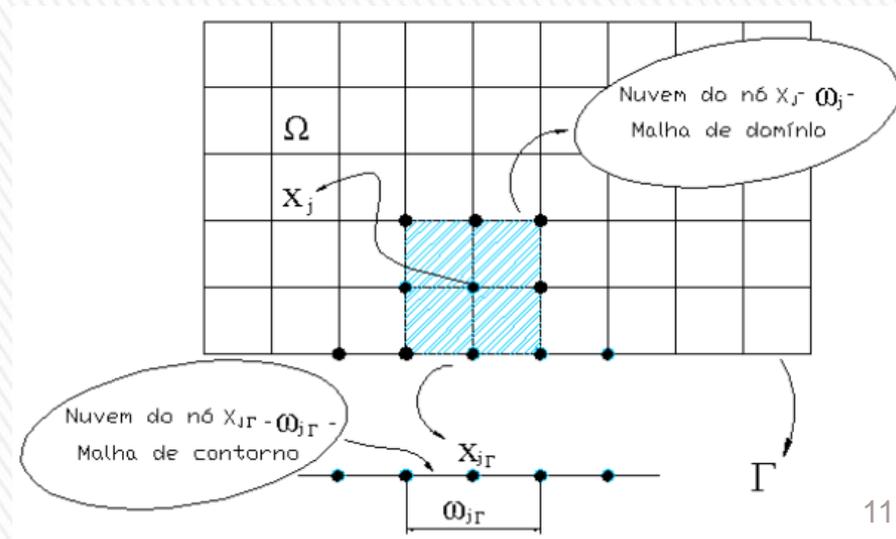
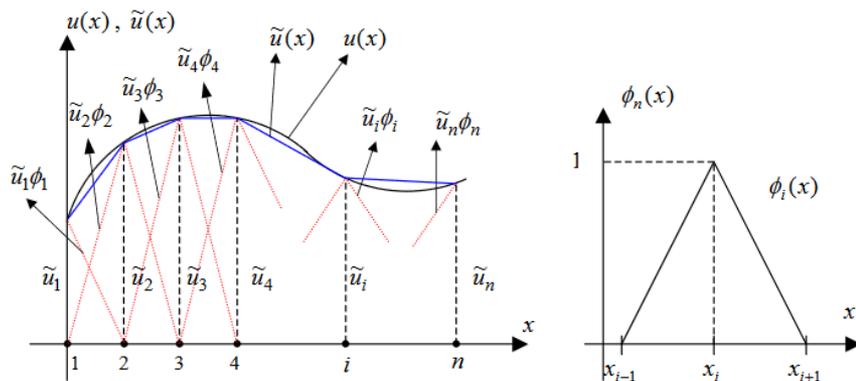
Características:

As funções aproximações, tem valor unitário no nó i e nulo nos outros nós. Técnica de interpolação lagrangiana:

$$\tilde{u}(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) + \dots + \alpha_i \phi_i(x) + \dots + \alpha_n \phi_n(x)$$

$$\alpha_i = \tilde{u}_i$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$



Aproximação local

MEF:

- Formulação local, facilita modelos não-lineares
- Existem grande família de elementos finitos
 - Geometria complexa é imediato
- Dificuldade para aproximar campos singulares, gradientes de tensões, descontinuidades (Mec. Fratura)
 - Exige eficientes técnicas de remalhamento
- Fácil realizar enriquecimento “ h ” localmente
- Matrizes esparsas, simétricas e em banda

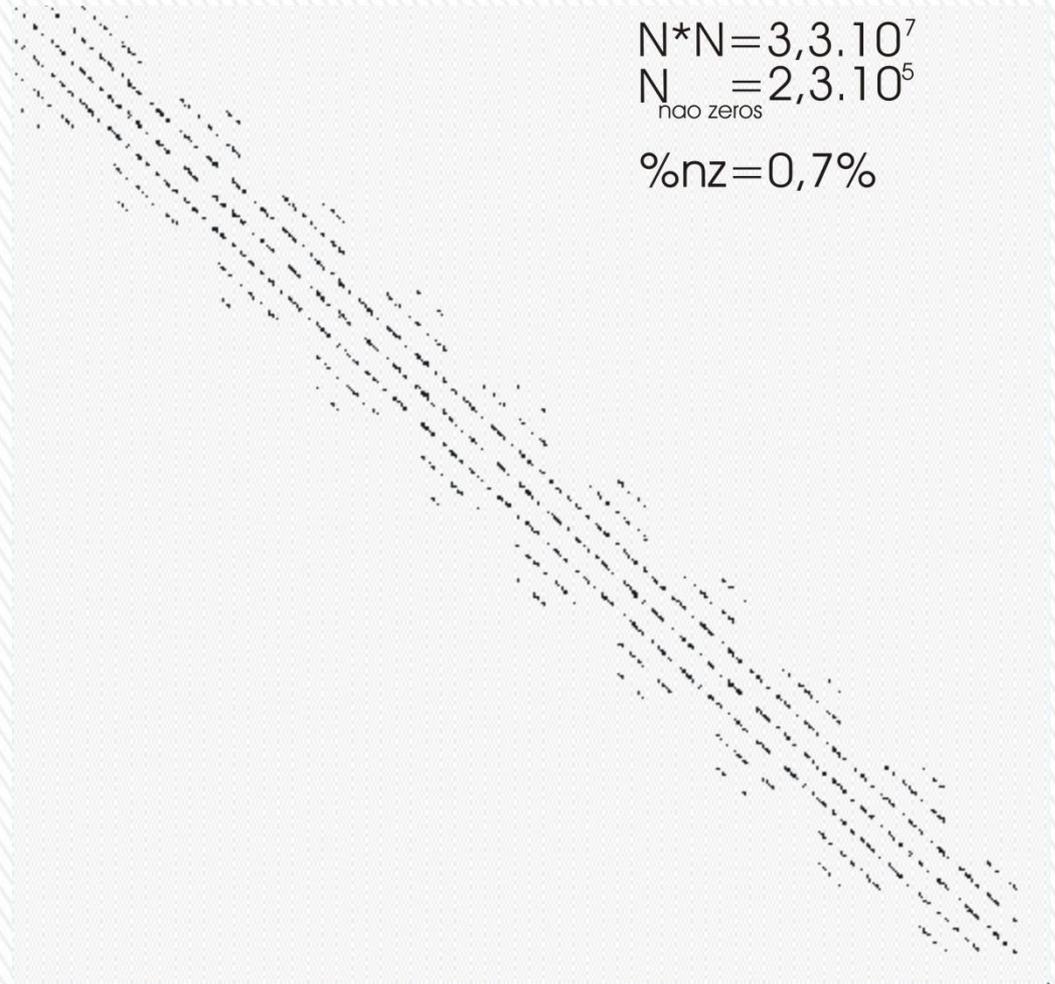
Características da matriz de rigidez (K)

ser altamente esparsa

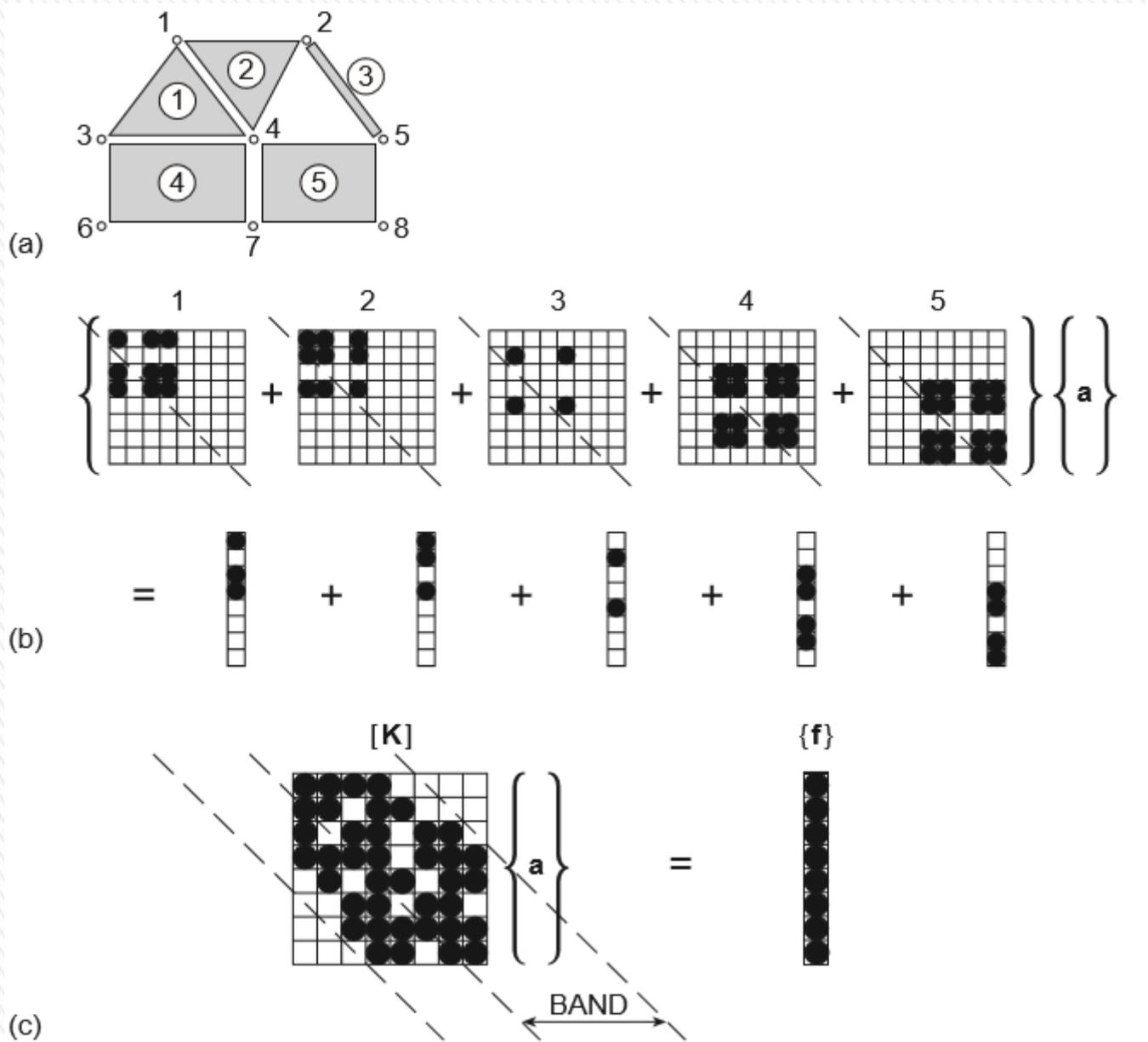
ser positiva-definida

ser simétrica

ser bem estruturada



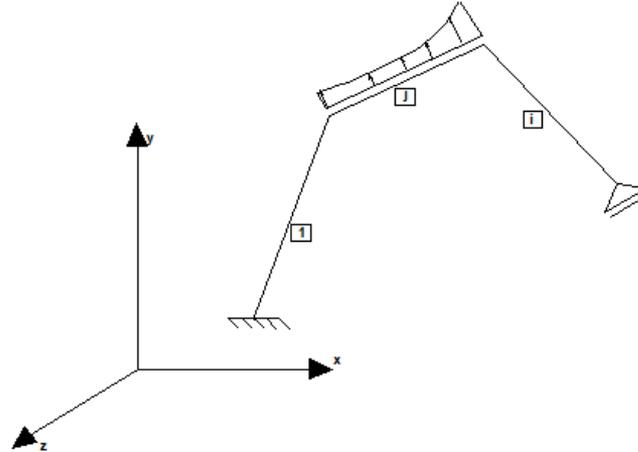
MEF: MONTAGEM DA MATRIZ K



MEF – PÓRTICO PLANO

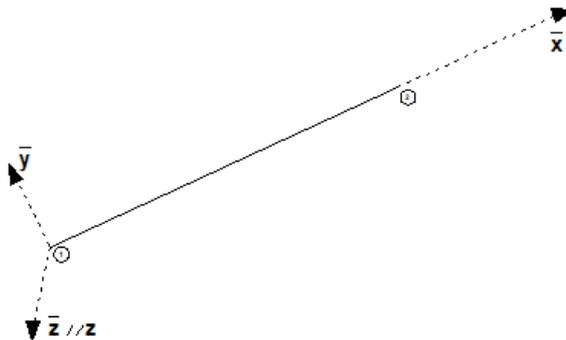
2 - DEFINIÇÃO DE MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇA NODAL LOCAL

Seja o pórtico plano qualquer, definido em um sistema de coordenadas global, conforme figura abaixo:



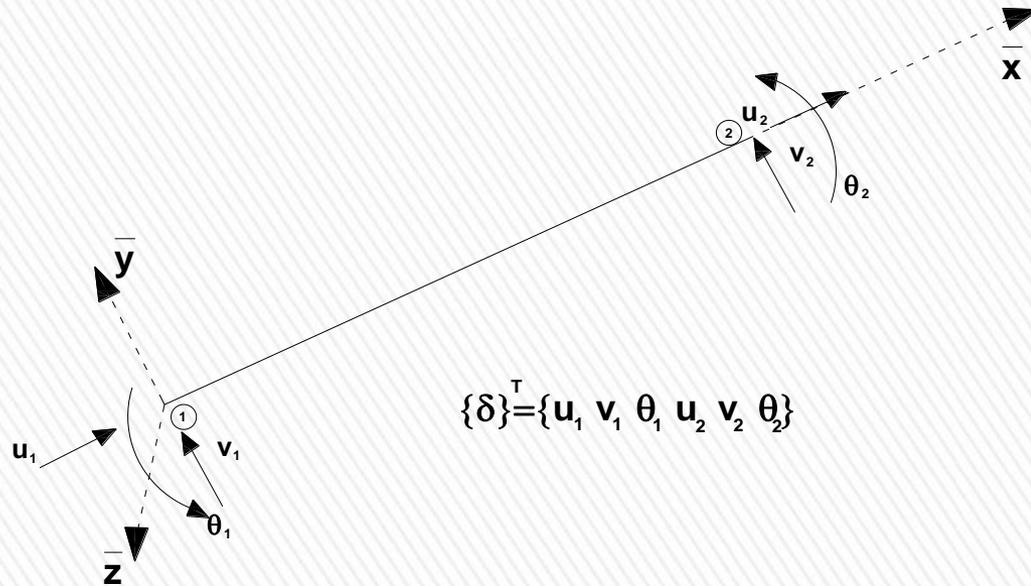
Toma-se um elemento genérico “j” conhecidos suas coordenadas neste sistema global, sua área, módulo de Young e momento de inércia, que são admitidos constantes ao longo do elemento.

Define-se um sistema local $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dextrorso, de modo que o eixo \bar{x} seja orientado do nó local ① para o nó final ② e que os versores \bar{z} e \bar{z} sejam idênticos.

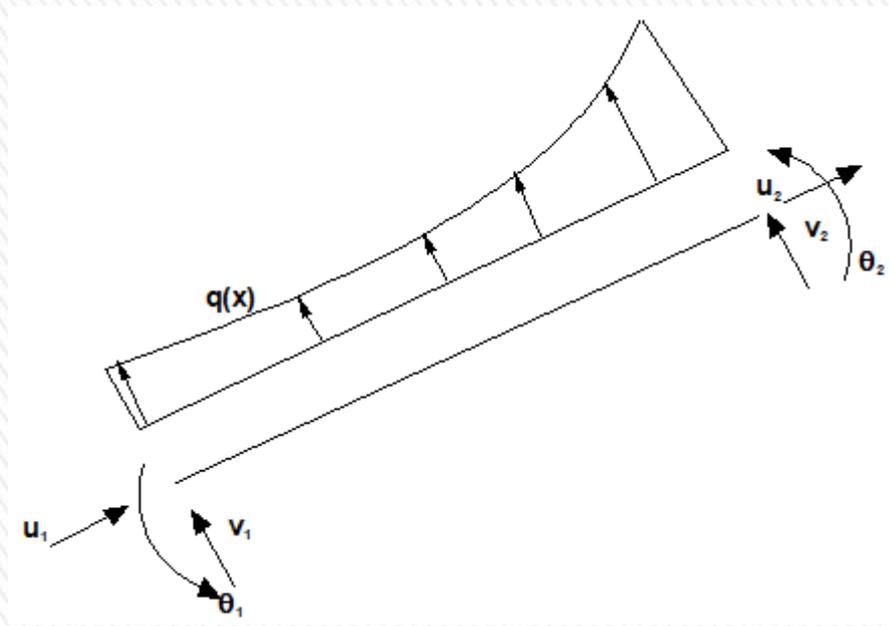


Associam-se aos nós locais do elemento “j” os três graus de liberdade existentes no pórtico plano com sentido positivo indicado pelo sistema local, ou seja,

MEF – PÓRTICO PLANO

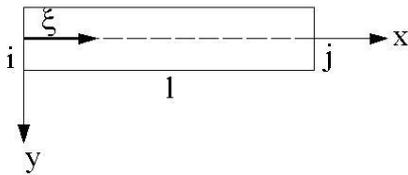


Deste modo, a barra genérica “j” pode ser indicada como:



MEF – PÓRTICO PLANO

Determinação da Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Treliça



$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi$$

$$\text{onde: } \xi = \frac{x}{l}$$

Que pode ser representada matricialmente por:

$$\boxed{\oplus} \quad u(\xi) = \{1 \quad \varepsilon\} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Os parâmetros nodais a ser considerados são os deslocamentos longitudinais u_i e u_j nos nós i e j . Portanto, impondo as condições de contorno:

$$u(\xi = 0) = u_i$$

$$u(\xi = 1) = u_j$$

E trabalhando os resultados, obtém-se:

$$\alpha_0 = u_i$$

$$\alpha_1 = u_j - u_i$$

Chegando à seguinte relação entre parâmetros nodais e generalizados:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (32)$$

MEF – PÓRTICO PLANO

Determinação da Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Treliça

$$u(\xi) = \{1 - \varepsilon \quad \varepsilon\} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Portanto:

$$[\phi_t] = \{1 - \varepsilon \quad \varepsilon\} \quad (34)$$

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Que são, respectivamente, a função de forma e o **Vetor de Deslocamentos Nodais** para elementos de treliça.

Pode-se então, determinar a derivada segunda da função de forma:

$$[B_t] = \frac{d[\phi_t]}{d\xi} = \{-1 \quad 1\} \quad (36)$$

Substituindo (34), (35) e (36) em (33), obtém-se as seguintes relações:

$$u(\varepsilon) = [\phi_t] \cdot \{U_n\} \quad (37)$$

$$\frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} = [B_t] \cdot \{U_n\} \quad (38)$$

Sabe-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{du}{d\varepsilon} \quad (39)$$

Substituindo (38) em (39), fica:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\ell} \cdot [B_t] \cdot \{U_n\} \quad (40)$$

Para treliça, temos:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^t = \varepsilon_x \quad (41)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}^t = \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (42)$$

Substituindo (41) e (42) em (7), temos:

MEF – PÓRTICO PLANO

Determinação da Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Treliça

$$[D] = [D]^t = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{E \epsilon_x}{\epsilon_x} = E \quad (43)$$

Substituindo (40), (41) e (42) em (2), fica:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\{U_n\}^t \cdot [B_t]^t \cdot \frac{1}{\ell}) \cdot E \cdot ([B_t] \cdot \{U_n\} \cdot \frac{1}{\ell}) dV$$
$$U = \frac{1}{2} \cdot \{U_n\}^t \cdot \left(\int_z \int_y \int_x [B_t]^t \cdot \frac{1}{\ell^2} \cdot E \cdot [B_t] dx dy dz \right) \cdot \{U_n\} \quad (44)$$

Sabe-se que: $\left(\int_z \int_y dy dz = A \right)$ (área da seção transversal) e $dx = \ell \cdot d\epsilon$. Substituindo em (44), fica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{U_n\}^t \cdot \left(\int_0^1 [B_t]^t \cdot \frac{EA}{\ell} \cdot [B_t] d\epsilon \right) \cdot \{U_n\} \quad (45)$$

onde:

$$\int_0^1 [B_t]^t \cdot \frac{EA}{\ell} \cdot [B_t] d\epsilon - \text{Matriz de Rigidez para um Elemento de Treliça } [K_t]. \quad (46)$$

Considerando E e A constantes, substituindo $[B_t]$ (36) em (46) e efetuando as integrações, temos:

$$[K_t] = \frac{EA}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Que é a **Matriz de Rigidez para um Elemento Finito de Treliça sem considerar a variação de espessura** (A constante).

MEF – PÓRTICO PLANO

Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Viga:

O elemento finito de viga (Fig. 2.1) é desenvolvido mediante a consideração de uma função aproximadora cúbica para representar o deslocamento transversal do tipo:

$$v(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi + \alpha_2 \cdot \xi^2 + \alpha_3 \cdot \xi^3$$

onde: $\xi = \frac{x}{\ell}$ representa um sistema de coordenadas homogêneas.



Fig. 2.1 (Elemento Finito de Viga)

Que pode ser representada matricialmente por:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Onde se pode obter as rotações derivando a função dos deslocamentos, resultando:

$$\theta(\xi) = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = (\alpha_1 + 2\alpha_2 \cdot \xi + 3\alpha_3 \cdot \xi^2) \cdot \frac{1}{\ell}$$

Os parâmetros nodais a ser considerados são os deslocamentos transversais v_i e v_j e as rotações θ_i e θ_j nos nós i e j. Portanto, impondo as condições de contorno existentes no extremo do elemento de viga nas relações de deslocamentos e de rotações, de maneira que seja satisfeito as seguintes condições:

$$v(\xi = 0) = v_i$$

$$v(\xi = 1) = v_j$$

$$\theta(\xi = 0) = \theta_i$$

$$\theta(\xi = 1) = \theta_j$$

Podemos expressar os parâmetros da função ponderada da seguinte forma:

$$\alpha_0 = v_i$$

$$\alpha_1 = \theta_i \cdot \ell$$

$$\alpha_2 = -3 \cdot v_i + 3 \cdot v_j - 2 \cdot \theta_i \cdot \ell - \theta_j \cdot \ell$$

$$\alpha_3 = 2 \cdot v_i - 2 \cdot v_j + \theta_i \cdot \ell + \theta_j \cdot \ell$$

Os quais podem ser representados por:

MEF – PÓRTICO PLANO

Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Viga:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 0 \\ -3 & -2\ell & 3 & -\ell \\ 2 & \ell & -2 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), tem-se:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 0 \\ -3 & -2\ell & 3 & -\ell \\ 2 & \ell & -2 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Então, o campo de deslocamento de um elemento de viga qualquer pode ser indicado por:

$$v(\xi) = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad \xi\ell - 2\ell\xi^2 + \ell\xi^3 \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad -\ell\xi^2 + \ell\xi^3\} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

De modo que

$$[\phi] = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad \xi\ell - 2\ell\xi^2 + \ell\xi^3 \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad -\ell\xi^2 + \ell\xi^3\} \quad (2.4)$$

$$\{Um\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

são, respectivamente, a **Função de Forma** (2.4) e o **Vetor de Deslocamentos Nodais** (2.5).

Pode-se então, determinar a derivada segunda da função de forma:

$$[B] = \frac{d^2[\phi]}{d\xi^2} = \{-6 + 12\xi \quad -4\ell + 6\ell\xi \quad 6 - 12\xi \quad -2\ell + 6\ell\xi\} \quad (2.6)$$

Seguindo as hipóteses clássicas da resistência dos materiais para as vigas, apenas considera-se as tensões atuantes e deformações na direção do eixo x (σ_x e ϵ_x). As outras direções são desprezadas.

Com isto, têm-se, da Resistência dos Materiais, as seguintes hipóteses cinemáticas (Fig. 2.2):

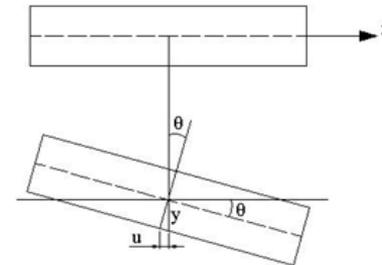


Fig. 2.2 (Trecho de Viga Indeformada e Deformada)

$\text{sen } \theta = -\frac{u}{y} \Rightarrow u = -y \cdot \text{sen } \theta$ (tem valor negativo devido ao sistema de referência entre y e u)

Para ângulos muito pequenos: $\text{sen } \theta \cong \tan \theta \cong \theta$ e $\theta = \frac{dv}{dx}$, portanto:

$$u = -y \cdot \frac{dv}{dx}$$

Sabe-se que $\epsilon_x = \frac{du}{dx}$, Então:

$$\epsilon_x = -y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.7)$$

Deixando (2.7) em função de ξ , temos:

$$\epsilon_x = -y \cdot \frac{1}{\ell^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} = -y \cdot \frac{1}{\ell^2} \cdot [B] \cdot \{Um\} \quad (2.8)$$

Para viga, temos:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon\}^t = \epsilon_x \quad (2.9)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}^t = \sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (1.7), temos:

$$[D] = [D]^t = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{E \cdot \epsilon_x}{\epsilon_x} = E \quad (2.11)$$

Substituindo (2.8), (2.9) e (2.10) em (1.2), fica:

MEF – PÓRTICO PLANO

Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Viga:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{Un\}^t \cdot [B]^t \cdot \frac{y^2}{\ell^4} \cdot E \cdot [B] \cdot \{Un\} \, dV$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{Un\}^t \left(\int_z \int_y \int_x [B]^t \cdot \frac{y^2}{\ell^4} \cdot E \cdot [B] \, dx dy dz \right) \cdot \{Un\}$$

Como $dx = \ell \cdot d\xi$ e $\int_z \int_y y^2 \, dy dz = I_z$, fica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{Un\}^t \left(\int_0^1 [B]^t \cdot \frac{1}{\ell^3} \cdot E I_z \cdot [B] \, d\xi \right) \cdot \{Un\} \quad (2.12)$$

Onde:

$$\int_0^1 [B]^t \cdot \frac{1}{\ell^3} \cdot E I_z \cdot [B] \, d\xi \text{ - Matriz de Rigidez para Elementos de Viga [K].} \quad (2.13)$$

Considerando E e I_z constantes, substituindo [B] (2.6) em (2.13) e efetuando as integrações temos:

$$[K] = \frac{E I_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

que é a **Matriz de Rigidez para Elementos Finitos de Viga sem considerar a variação de espessura** (I_z constante).

MEF – PÓRTICO PLANO

Determinação da Matriz de Rigidez para Elementos Finitos de Pórticos Planos

A Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Pórtico Plano pode ser determinada através da união entre a Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Viga (Equação (26)) com a Matriz de Rigidez para Elemento Finito de Treliça (Equação (47)).

Isso se deve ao fato de os pórticos planos terem como incógnitas nodais duas translações (deslocamentos longitudinais (U) e transversais (V)) e uma rotação (giro (θ)).

Unindo (26) e (47), obtém-se a seguinte matriz de rigidez para pórticos planos considerando o sistema de coordenadas locais para cada elemento, ou seja, o eixo x acompanha a inclinação de cada trecho distinto do pórtico:

$$[K_p] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Que é a Matriz de Rigidez para um Elemento Finito de Pórtico Plano sem considerar a variação de espessura (I_z e A constantes).

MEF – PÓRTICO PLANO

Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Treliça:

Considere a força externa linearmente distribuída no elemento de treliça (Fig. 6.1):

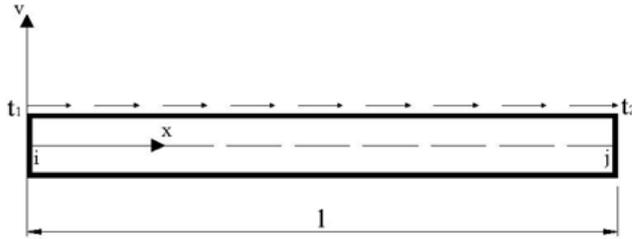


Fig. 6.1 (Força Externa Linearmente Distribuída no Elemento de Treliça)

Considere também o sistema de coordenadas local a cada elemento finito, ou seja, os eixos x e y acompanham a inclinação de cada elemento. A carga externa P varia linearmente através das seguintes relações de t_1 e t_2 (contribuição transversal da carga externa) e de u_1 e u_2 (contribuição vertical da carga externa):

$$P_t(\xi) = \{1 - \xi \quad \xi\} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = [\bar{\phi}_t] \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

$$P(\xi) = \{1 - \xi \quad \xi\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [\bar{\phi}_t] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Têm-se de (1.1) que:

$$\Omega = -\int_0^l \{P_t(x)\}^t \cdot \{u(x)\} dx = -\int_0^1 \{P_t(\xi)\}^t \cdot \{u(\xi)\} \cdot l d\xi \quad (6.3)$$

Substituindo (6.1) e (6.2) em (6.3), têm-se:

$$\Omega = -\int_0^1 \{[\bar{\phi}_t] \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}\}^t \cdot [\bar{\phi}_t] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot l d\xi, \text{ que fica:}$$

$$\Omega = -\{t_1 \quad t_2\} \cdot l \cdot \left(\int_0^1 [\bar{\phi}_t]^t \cdot [\phi] d\xi \right) \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Substituindo as Expressão da Função de Forma expressas em $\bar{\phi}_t$ (6.1) e $\bar{\phi}_t$ (6.2) em (6.4) e efetuando as integrações, obtém-se:

$$\Omega = -\{u_1 \quad u_2\} \cdot l \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Desenvolvendo e utilizando o princípio da mínima energia potencial, chega-se à:

$$\{f_t\} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \cdot t_1 + \frac{1}{6} \cdot t_2 \right) \cdot l \\ \left(\frac{1}{6} \cdot t_1 + \frac{1}{3} \cdot t_2 \right) \cdot l \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Que é o **Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Elementos Finitos de Treliça com Carga Distribuída Variando Linearmente $\{f_t\}$** .

Para o caso de força distribuída ser constante, ou seja, $t_1 = t_2 = t$, a equação (6.6) fica:

$$\{f_t\}_c = \begin{pmatrix} \frac{t \cdot l}{2} \\ \frac{t \cdot l}{2} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Que é o **Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Elementos Finitos de Treliça com Carga Distribuída Constante $\{f_t\}_c$** .

MEF – PÓRTICO PLANO

Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Viga:

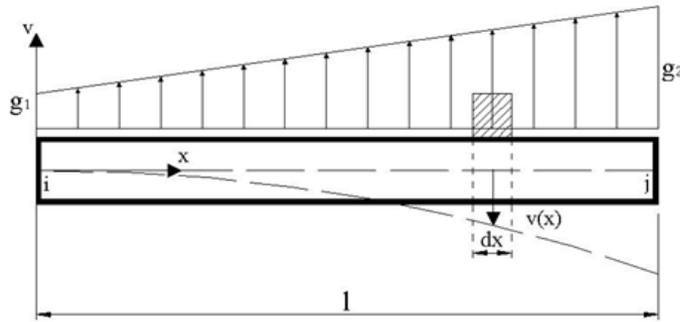


Fig. 3.1 (Força Externa Linearmente Distribuída no Elemento de Viga)

Onde $\xi = \frac{x}{l}$

A carga externa P varia linearmente através da seguinte relação de g_1 e g_2 :

$$P(\xi) = \{1 - \xi \quad \xi\} \cdot \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = [\bar{\phi}] \cdot \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Portanto:

$$[\bar{\phi}] = \{1 - \xi \quad \xi\} \quad (3.2)$$

Que é a **Função de Forma**.

Têm-se, de (1.1) que $\Omega = - \int_{\Gamma} \{P\}^t \cdot \{v\} d\Gamma$.

Transformando (1.1) para o contorno Γ ficar em função de $\xi = x/l$, fica:

$$\Omega = - \int_0^l \{P(x)\}^t \cdot \{v(x)\} dx = - \int_0^1 \{P(\xi)\}^t \cdot \{v(\xi)\} \cdot l d\xi \quad (3.3)$$

Têm-se de (2.3) que:

$$v(\xi) = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad \xi \cdot l - 2 \cdot l \cdot \xi^2 + l \cdot \xi^3 \quad 3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^3 \quad - l \cdot \xi^2 + l \cdot \xi^3\} \cdot \{Un\} = [\phi] \cdot \{Un\}$$

Onde o vetor $\{Un\}$ pode ser verificado em (2.5).

Substituindo (2.3) e (3.1) em (3.3), têm-se:

$$\Omega = - \int_0^1 \{[\bar{\phi}] \cdot \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}\}^t \cdot [\phi] \cdot \{Un\} \cdot l d\xi$$

que fica:

$$\Omega = - \{g_1 \quad g_2\} \cdot l \cdot \left(\int_0^1 [\bar{\phi}]^t \cdot [\phi] d\xi \right) \cdot \{Un\} \quad (3.4)$$

Substituindo as Expressões das Funções de Forma $\bar{\phi}$, Eq. (3.2) e ϕ , Eq. (2.4) na Eq. (3.4) e efetuando as integrações utilizando os recursos do programa "Mathcad 2000 Professional", têm-se:

$$\Omega = - \{g_1 \quad g_2\} \cdot l \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{\ell}{20} & \frac{3}{20} & \frac{-\ell}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{\ell}{30} & \frac{7}{20} & \frac{-\ell}{20} \end{pmatrix} \cdot \{Un\} \quad (3.5)$$

Que pode ser escrita como:

$$\Omega = - \{Un\}^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{7 \cdot \ell}{20} & \frac{3 \cdot \ell}{20} \\ \frac{\ell^2}{20} & \frac{\ell^2}{20} \\ \frac{3 \cdot \ell}{20} & \frac{7 \cdot \ell}{20} \\ \frac{-\ell^2}{30} & \frac{-\ell^2}{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Desenvolvendo (3.6) chega-se à:

$$\Omega = - \{Un\}^t \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{20} \cdot g_1 + \frac{3}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell \\ \left(\frac{1}{20} \cdot g_1 + \frac{1}{30} \cdot g_2 \right) \cdot \ell^2 \\ \left(\frac{3}{20} \cdot g_1 + \frac{7}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell \\ \left(-\frac{1}{30} \cdot g_1 - \frac{1}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Para se obter o **Vetor da Forças Nodais Equivalentes**, é necessário minimizar a equação (3.7):

MEF – PÓRTICO PLANO

Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Viga:

$$\alpha \Omega = \min [-\{U\}]^t \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{20} \cdot g_1 + \frac{3}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell \\ \left(\frac{1}{20} \cdot g_1 + \frac{1}{30} \cdot g_2 \right) \cdot \ell^2 \\ \left(\frac{3}{20} \cdot g_1 + \frac{7}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell \\ \left(-\frac{1}{30} \cdot g_1 - \frac{1}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell^2 \end{pmatrix} = 0$$

Obtendo-se:

$$\{f\} = \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{20} \cdot g_1 + \frac{3}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell \\ \left(\frac{1}{20} \cdot g_1 + \frac{1}{30} \cdot g_2 \right) \cdot \ell^2 \\ \left(\frac{3}{20} \cdot g_1 + \frac{7}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell \\ \left(-\frac{1}{30} \cdot g_1 - \frac{1}{20} \cdot g_2 \right) \cdot \ell^2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Que é o **Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Elementos Finitos de Viga com Carga Distribuída Variando Linearmente {f}**.

Para o caso de força distribuída ser constante, ou seja, $g_1 = g_2 = g$, o vetor de forças nodais equivalentes fica:

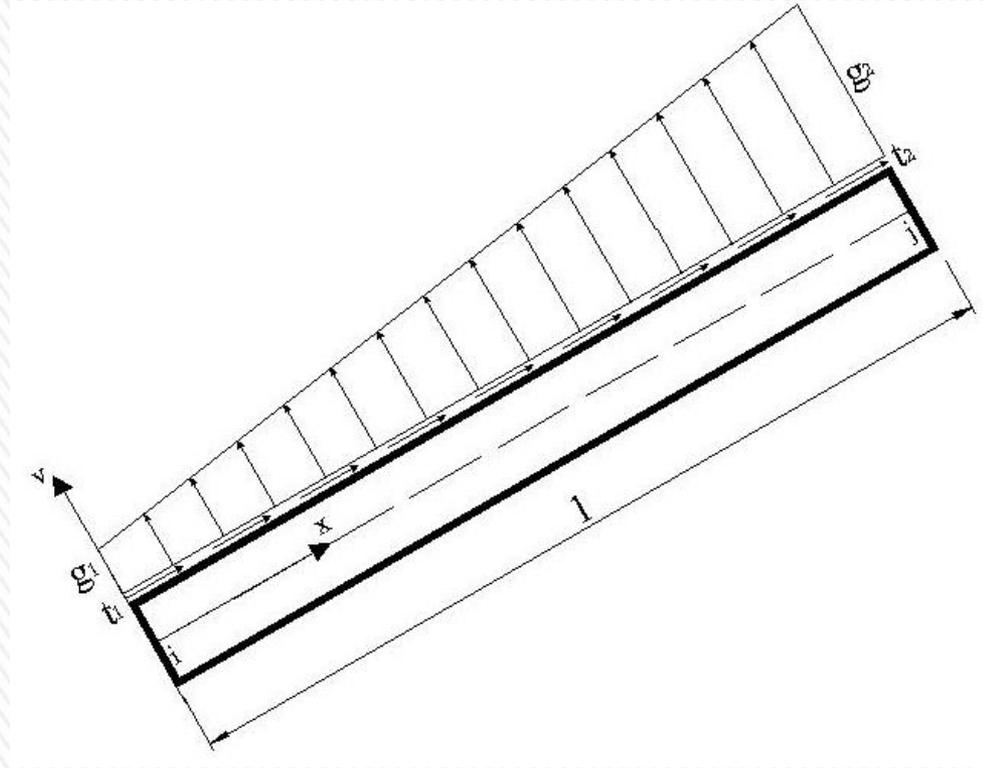
$$\{\{f\}_c\} = \begin{pmatrix} \frac{g \cdot \ell}{2} \\ \frac{g \cdot \ell^2}{12} \\ \frac{g \cdot \ell}{2} \\ -\frac{g \cdot \ell^2}{12} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Que é o **Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Elementos Finitos de Viga com Carga Distribuída Constante {f}c**.

MEF – PÓRTICO PLANO

Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Pórtico Plano (distribuída):

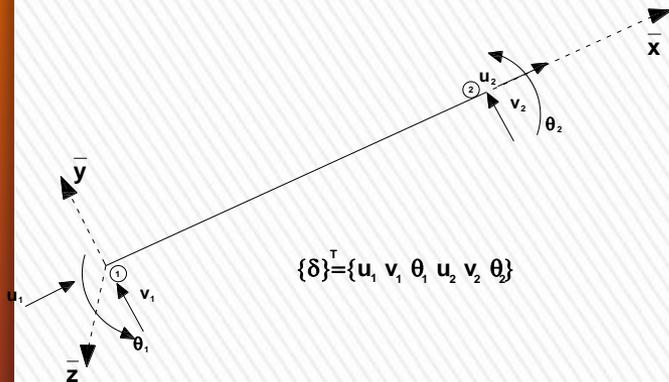
$$\{f_p\} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \cdot t_1 + \frac{1}{6} \cdot t_2\right) \cdot l \\ \left(\frac{7}{20} \cdot g_1 + \frac{3}{20} \cdot g_2\right) \cdot l \\ \left(\frac{1}{20} \cdot g_1 + \frac{1}{30} \cdot g_2\right) \cdot l^2 \\ \left(\frac{1}{6} \cdot t_1 + \frac{1}{3} \cdot t_2\right) \cdot l \\ \left(\frac{3}{20} \cdot g_1 + \frac{7}{20} \cdot g_2\right) \cdot l \\ \left(-\frac{1}{30} \cdot g_1 - \frac{1}{20} \cdot g_2\right) \cdot l^2 \end{pmatrix}$$



MEF – PÓRTICO PLANO

Sistema algébrico do elemento no eixo local:

$$\begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_{CONCENTRADA} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_{DISTRIBUIDA}$$



Que pode ser escrita com a seguinte redação:

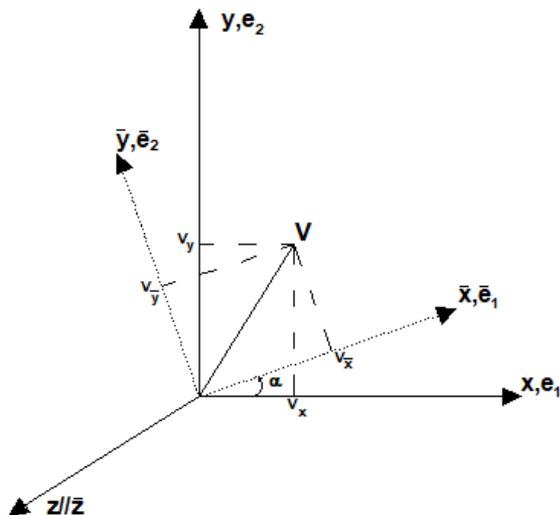
$$[k]_{6 \times 6} \cdot \{\delta\}_{6 \times 1} = \{f\}_{6 \times 1}$$

$[k]$: matriz de rigidez para o elemento de pórtico plano prismático no sistema local com E, I, A constantes.

$\{\delta\}, \{f\}$: vetor de deslocamentos e forças nodais equivalentes nodais do elemento, sistema local.

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

Seja um vetor V contido no plano xy , de versores (e_1, e_2) . Defina-se um sistema cartesiano local (\bar{x}, \bar{y}) , de versores (\bar{e}_1, \bar{e}_2) , também contido no plano xy , mas rotacionado (sentido positivo dextrorso) de um ângulo α entre o eixo x e este novo eixo \bar{x} , conforme esquematizado na figura abaixo.



O vetor V pode ser decomposto como:

$$V = V_x \cdot \bar{e}_1 + V_y \cdot \bar{e}_2 \quad (23)$$

E

$$V_x = V_x \cdot \cos \alpha + (-)V_y \cdot \text{sen} \alpha \quad V_y = V_x \cdot \text{sen} \alpha + V_y \cdot \cos \alpha \quad (24)$$

Assim, a eq. (24) pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \quad (25)$$

A matriz que relaciona as componentes no sistema (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) é dita matriz de transformação de bases e é também ortogonal. Sabe-se da álgebra que se uma matriz é ortogonal, por exemplo, a matriz $[A]$, é possível demonstrar que:

$$[A]^{-1} = [A]^T \quad (26)$$

Ou seja, a inversa de uma matriz é sua transposta. Relembrando que uma matriz transposta é definida conforme um exemplo indicado na relação (27):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Assim, na relação (25), usando a propriedade de ortogonalidade da matriz de transformação, é possível redigi-la da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \quad (28)$$

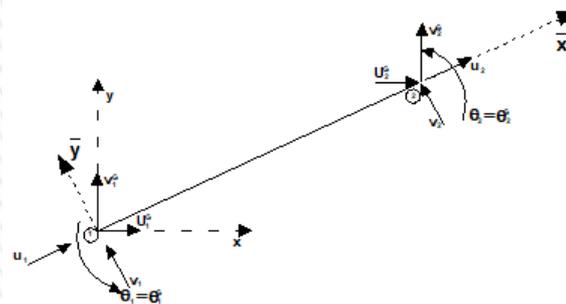
Ou

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = [\hat{R}] \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Onde \hat{R} é dita matriz de rotação.

Voltando para a barra de pórtico plano genérica "j", pode-se transformar os vetores deslocamentos locais para um sistema global.

$$\begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (30)$$



Expandindo para considerar o nó local (2):

$$\begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \\ U_2^G \\ V_2^G \\ \theta_2^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

Ou

$$\{U\}^e_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [\bar{R}]^T & [0] \\ [0] & [\bar{R}]^T \end{bmatrix} \cdot \{\delta\}_{6 \times 1} \rightarrow \{U\}^e_{6 \times 1} = [R]^T \cdot \{\delta\}_{6 \times 1} \quad (32)$$

De maneira correlata, a mesma transformação é aplicada ao vetor de forças, assim:

$$\{F\}^e_{6 \times 1} = [R]_{6 \times 6}^T \cdot \{F\}_{6 \times 1} \quad (33)$$

Com a matriz de rotação transposta definida como:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (34)$$

Ou, definida na forma direta:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde

$\{U\}^e$: vetor de deslocamentos nodais do elemento, no **sistema global**;

$\{F\}^e$: vetor de forças nodais equivalentes do elemento, **sistema global**.

A equação (22), deve também ser equacionada para o sistema de referência global.

$$[k]_{6 \times 6} \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (22)$$

Isto é feito, aplicando as propriedades de ortogonalidade da matriz de rotação sobre as relações (32) e (33) em (22), da seguinte maneira:

$$[k]_{6 \times 6} \cdot \{\delta\} = [R] \cdot \{F\}^e \rightarrow [k]_{6 \times 6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = [R] \cdot \{F\}^e \quad (35)$$

Pré-multiplicando a relação (35) por $[R]^{-1}$:

$$[R]^{-1} \cdot [k]_{6 \times 6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = [R]^{-1} \cdot [R] \cdot \{F\}^e \quad (36)$$

Lembrando da álgebra que $[A]^{-1} \cdot [A] = [I]$, onde I é a matriz identidade e da definição (26), a expressão (36) resulta em:

$$[R]^T \cdot [k]_{6 \times 6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = \{F\}^e \quad (37)$$

Ou de modo compacto:

$$[K]_{6 \times 6}^e \cdot \{U\}^e = \{F\}^e \quad (38)$$

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

$$[K]_{6 \times 6}^e = [R]^T \cdot [k] \cdot [R] \quad (39)$$

$[K]^e$: matriz de rigidez do elemento, no **sistema global**;

Resumindo, para cada elemento:

- i) Definem-se carga distribuída, área, inércia, módulo de elasticidade e seus nós inicial e final, de modo que seu sistema local já fique determinado;
- ii) Calcula seus cossenos diretores (*cos* e *sen*) e comprimento;
- iii) Obtém as forças nodais equivalentes no sistema local;
- iv) Obtem a matriz de rigidez no sistema local;
- v) Obtem a matriz de rotação, relação (34);
- vi) Obtém as forças nodais equivalentes no sistema global, eq. (33), usando a relação das forças nodais equivalentes no sistema local;
- vii) Obtem a matriz de rigidez no sistema global, eq. (39), usando a matriz de rigidez no sistema local.