

MECÂNICA 1 - NOTURNO/2018

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Uma partícula de massa m se move no espaço sujeita à força cujas componentes em coordenadas esféricas são:

$$F_r = \frac{2\alpha \cos \theta}{r^3}, \quad F_\theta = \frac{\alpha \sin \theta}{r^3} \quad \text{e} \quad F_\phi = 0 \quad (\text{campo dipolar})$$

- a) Mostre que a projeção do momento angular $\vec{L}$ no eixo z é uma constante do movimento.
b) Mostre que esse campo de forças é conservativo e obtenha o seu potencial $V(\vec{r})$.

2) Uma partícula de massa m se move numa região do espaço onde age uma força $F = \frac{y\hat{j} + z\hat{k}}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$.

- a) A energia se conserva? Justifique, e, em caso afirmativo, calcule o potencial.
b) Quais as componentes do momento que são conservadas? Justifique.
c) Quais as componentes do momento angular em torno da origem que se conservam? Justifique.

3) Uma partícula de massa m se move ao longo de uma trajetória dada por:

$$x = x_0 \cos \omega_1 t$$
$$y = y_0 \sin \omega_2 t$$

- a) Ache as componentes x e y da força que atua sobre essa partícula. Mostre que essa força é conservativa.
b) Obtenha a energia potencial da partícula como função de x e y .
c) Determine a energia cinética da partícula. Obtenha a energia total.
d) Sob que condição a força obtida no item (a) será central? Nessa condição determine o momento angular e mostre que ele se conserva. Mostre que a órbita é uma elipse.

4) Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ (oscilador harmônico em três dimensões).

- a) Mostre que a trajetória da partícula está sempre contida num plano e identifique esse plano quando, em $t=0$, a partícula se encontra no ponto $(x,y,z)=(x_0,0,0)$ com velocidade $(v_x,v_y,v_z)=(0,v_0,0)$.
b) Mostre que as componentes da equação de Newton se separam em coordenadas cartesianas e use as respectivas soluções para mostrar que as órbitas do movimento são fechadas.
c) Obtenha a relação entre a energia E e o momento angular L para órbitas circulares.

5) Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central $F = -\frac{k}{r^2}$ com $k>0$. No ponto P , que

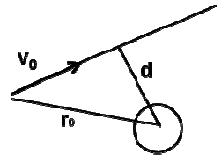
dista a da origem, sua velocidade é perpendicular a $\vec{r}$ e vale $v_0 = \sqrt{\frac{k}{2ma}}$.

- a) Esboce o gráfico do potencial efetivo em função de r , indicando o ponto P .
b) Qual é a energia cinética da partícula no ponto de máxima aproximação da origem?
c) O movimento está contido numa região finita do espaço? Justifique.
d) Calcule a frequência de pequenas oscilações radiais em torno do ponto de mínimo e compare com a frequência de revolução (movimento circular). O que se pode concluir sobre as órbitas?

6) Considere um corpo de massa m sujeito à força gravitacional terrestre. O corpo é lançado de um ponto que dista $\vec{r}_0$ do centro da Terra com uma velocidade v_0 cuja direção é perpendicular à linha que liga o corpo ao centro da Terra. Admita que o potencial gravitacional seja nulo no infinito, isto é $V(\infty)=0$.

- a) Determine a dependência radial do potencial efetivo $V_{\text{ef}}(r)$, em função de M_T , G , m , v_0 e r_0 e a partir de $V_{\text{ef}}(r)$ determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja circular.
b) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja parabólica.
c) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja elíptica.
d) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja hiperbólica.
e) Esboce o gráfico de $V_{\text{ef}}(r)$ indicando cada um dos casos acima.

7) Descobre-se um asteroide que está a uma distância $r_0 = 2,0 \times 10^9 \text{ m}$ da Terra com uma velocidade de $v_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ m/s}$. A distância entre a trajetória do asteroide nesse ponto e o centro da Terra é $d = 3 \times 10^7 \text{ m}$. A que distância mínima do centro da Terra passará o asteroide?



8) Observa-se um cometa a uma distância de $1,00 \times 10^8 \text{ km}$ do Sol, viajando em direção a ele à velocidade de $51,6 \text{ km por segundo}$, num ângulo de 45° em relação ao raio do Sol. Escreva a equação para a órbita do cometa, em coordenadas polares, com a origem no Sol e o eixo x passando pela posição em que o cometa foi observado. Considere a massa solar como $2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$.

9) Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força $\vec{F} = -k\vec{r}$, $k > 0$ (oscilador harmônico isotrópico). O momento angular da partícula é L .
a) Determine a energia potencial.

b) Mostre que o menor valor da energia para essa partícula é: $E_{\min} = \left(\frac{kL^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$.

c) Mostre que para uma dada energia total $E \geq E_{\min}$ a trajetória está situada dentro de um anel $r_1 \leq r \leq r_2$, com

$$r_1 = \sqrt{\frac{E}{k}} \left[1 - \sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ e } r_2 = \sqrt{\frac{E}{k}} \left[1 + \sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ onde } r_1 \text{ e } r_2 \text{ são as raízes da equação}$$

$$E = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

10) Uma partícula de carga q e massa m , em repouso num campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, é submetida, no instante $t=0$, a um campo elétrico oscilante $\vec{E} = E_0 \sin \omega t \hat{i}$. Determine o seu movimento. Resolva esse mesmo problema para o caso em que $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

11) Determine a lei de força para um campo central, que permite à partícula mover-se em órbita espiral dada por $r = k\theta^2$, onde k é uma constante.

12) Considere a família de órbitas para um potencial central onde a energia é uma constante. Mostre que se existir uma órbita circular estável, o momento angular associado a essa órbita, é o de maior valor em relação a todas as outras possíveis órbitas.

13) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que a massa do Sol subitamente se reduza à metade. Qual será, nesse caso, a órbita da Terra? A Terra escapará do sistema solar?

14) De acordo com a teoria da força nuclear de Yukawa, a força entre um nêutron e um próton tem o seguinte potencial: $V(r) = -\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}$, $K > 0$.

a) Determine a força, comparando-a com a força da lei do inverso do quadrado da distância.

b) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer, caso uma partícula de massa m se desloque sob a ação de tal força.

c) Determine L e E para o movimento em círculo de raio a . Determine o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.