Física Moderna I
Aula 12

Marcelo G Munhoz
Pelletron, sala 245, ramal 6940
munhoz@if.usp.br

Propriedades ondulatórias da matéria

- Se as partículas que constituem a matéria (como os elétrons) possuem propriedades ondulatórias, como podemos descrever um elétron então?
- O que seria essa “onda” que constitui o elétron? O elétron é uma onda se propagando em que meio?
- Como descrever essa “onda” do elétron matematicamente?

Dualidade Onda-Partícula

- A mesma idéia da dualidade onda-partícula da radiação eletromagnética é válida para a matéria
- Bohr elaborou o Princípio da complementaridade:
  - "o caráter ondulatório e o corpuscular da natureza são complementares, isto é, ou se observa a manifestação do comportamento ondulatório de um sistema físico ou do comportamento corpuscular, nunca os dois simultaneamente"

Dualidade Onda-Partícula

- Max Born introduziu uma interpretação probabilística para a dualidade onda-partícula
- Como no caso da radiação eletromagnética, podemos descrever a propagação da matéria a partir de uma abordagem ondulatória
- Essa onda, chamada de *função de onda* e representada pela letra grega Ψ, determina a **probabilidade** da partícula ser observada em uma certa posição em um certo instante de tempo

Interpretação probabilística

- A intensidade da radiação eletromagnética está associada à amplitude ao quadrado do campo eletromagnético e, ao mesmo tempo, ao número de fótons
- Einstein interpretou essa amplitude ao quadrado do campo eletromagnético como uma medida do número médio de fótons por unidade de volume
- Da mesma forma, a intensidade ao quadrado da função de onda $|\Psi|^2$ determina o número de partículas de um sistema físico, ou a **probabilidade** de encontrar uma partícula em uma certa posição em um dado instante de tempo

Interpretação probabilística

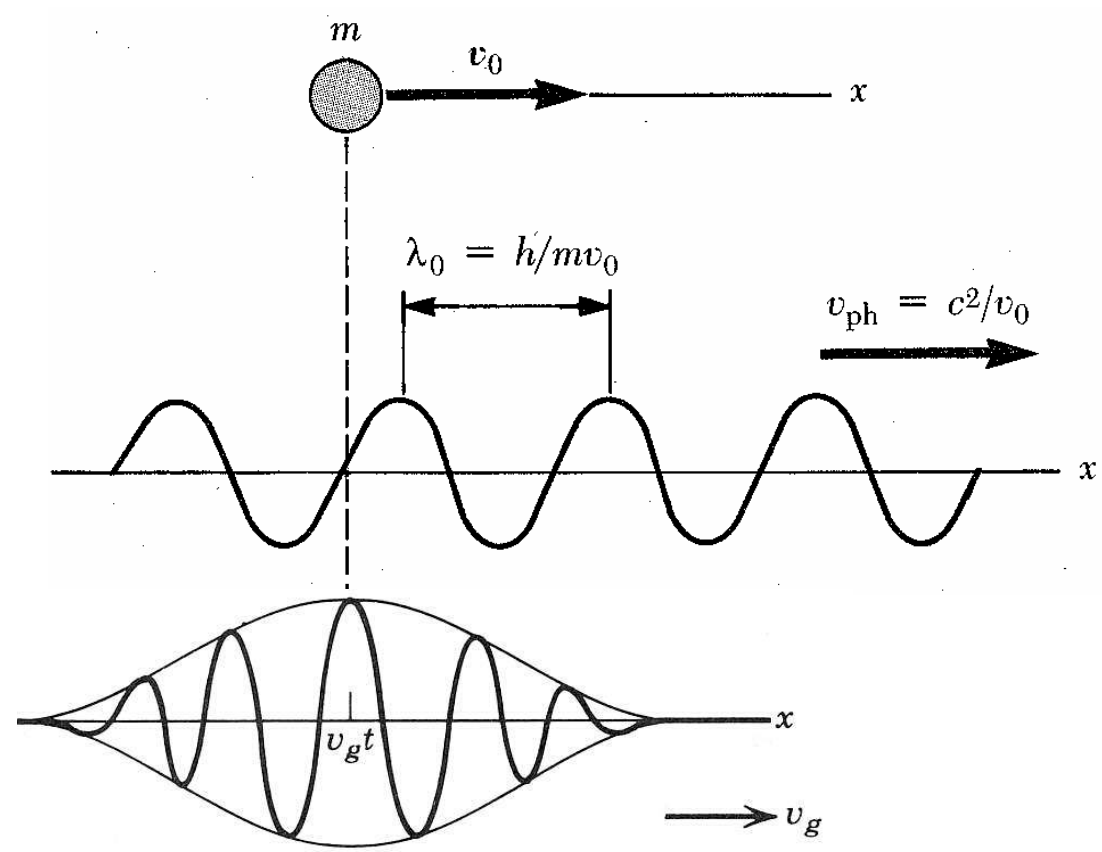
- Portanto, segundo essa interpretação, só podemos determinar um comportamento probabilístico para as partículas de matéria, a partir de sua função de onda
- Apesar dos observáveis (posição e momento, por exemplo) terem um caráter probabilístico (não-determinístico), a função de onda tem um comportamento que pode ser determinado de maneira exata

Propriedades ondulatórias da matéria

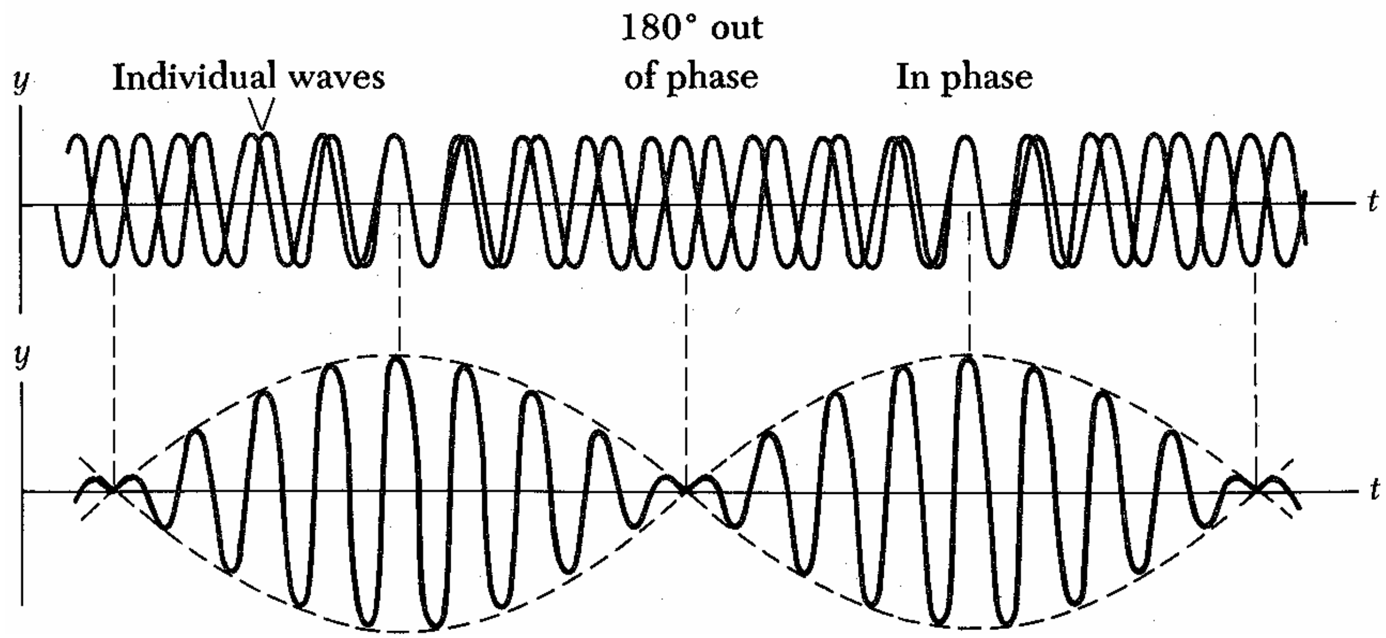
- Se as partículas que constituem a matéria (como os elétrons) possuem propriedades ondulatórias, como podemos descrever um elétron então?
- O que seria essa "onda" que constitui o elétron? O elétron é uma onda se propagando em que meio?
- Como descrever essa "onda" do elétron matematicamente?

Propriedades ondulatórias da matéria

- Para representar uma partícula, devemos utilizar uma onda "localizada" no espaço, ou seja, um "pacote de ondas", cuja velocidade de grupo coincide com a velocidade da partícula



Propriedades ondulatórias da matéria



- Um pacote de ondas é obtido a partir da combinação de várias ondas de frequências diferentes

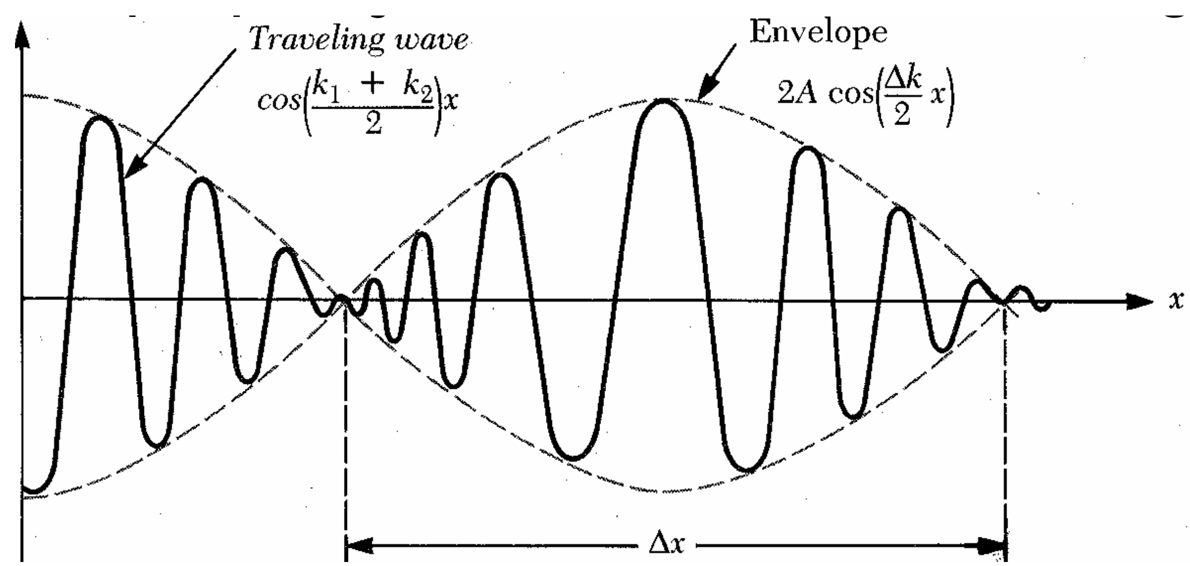
- Neste exemplo, duas ondas de frequências próximas se combinam resultando em vários pacotes ou grupos de onda

Propriedades ondulatórias da matéria

- Na realidade, a onda resultante corresponde a uma onda de frequência maior “envolta” por uma onda de frequência menor

- O pacote de onda apresenta uma relação entre sua largura e os comprimentos de onda que o compõe:

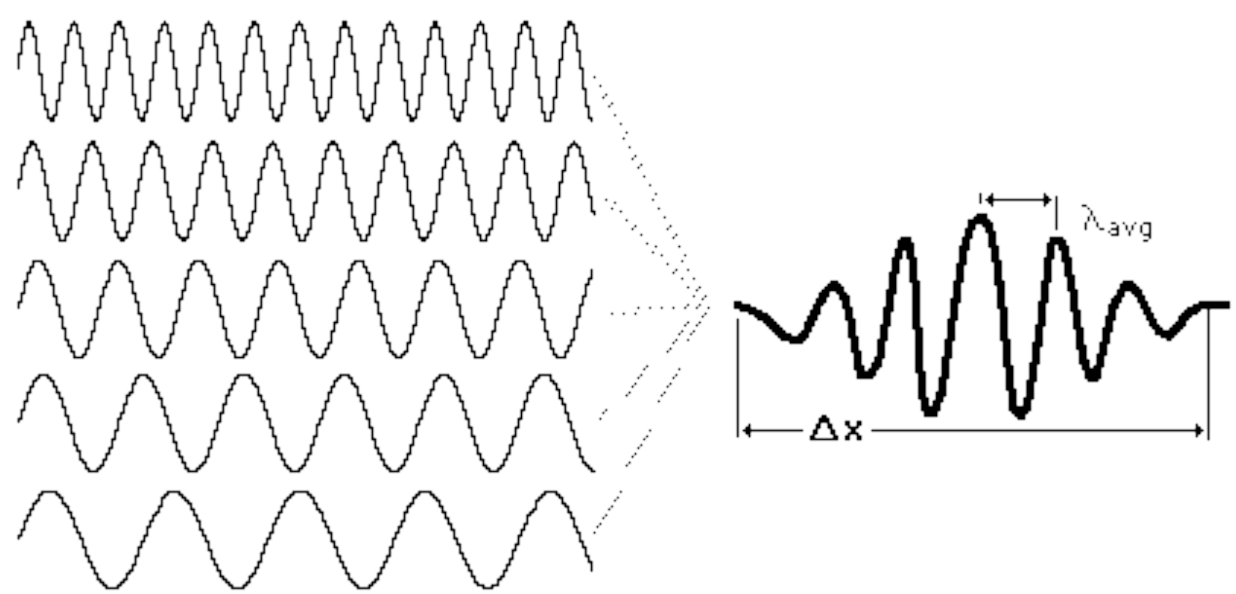
$$\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$$



Propriedades ondulatórias da matéria

- Integral de Fourier: para se construir um pacote de onda é preciso combinar muitas frequências, ou seja:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{N} A_i cos\left(k_i x - \omega_i t\right)$$

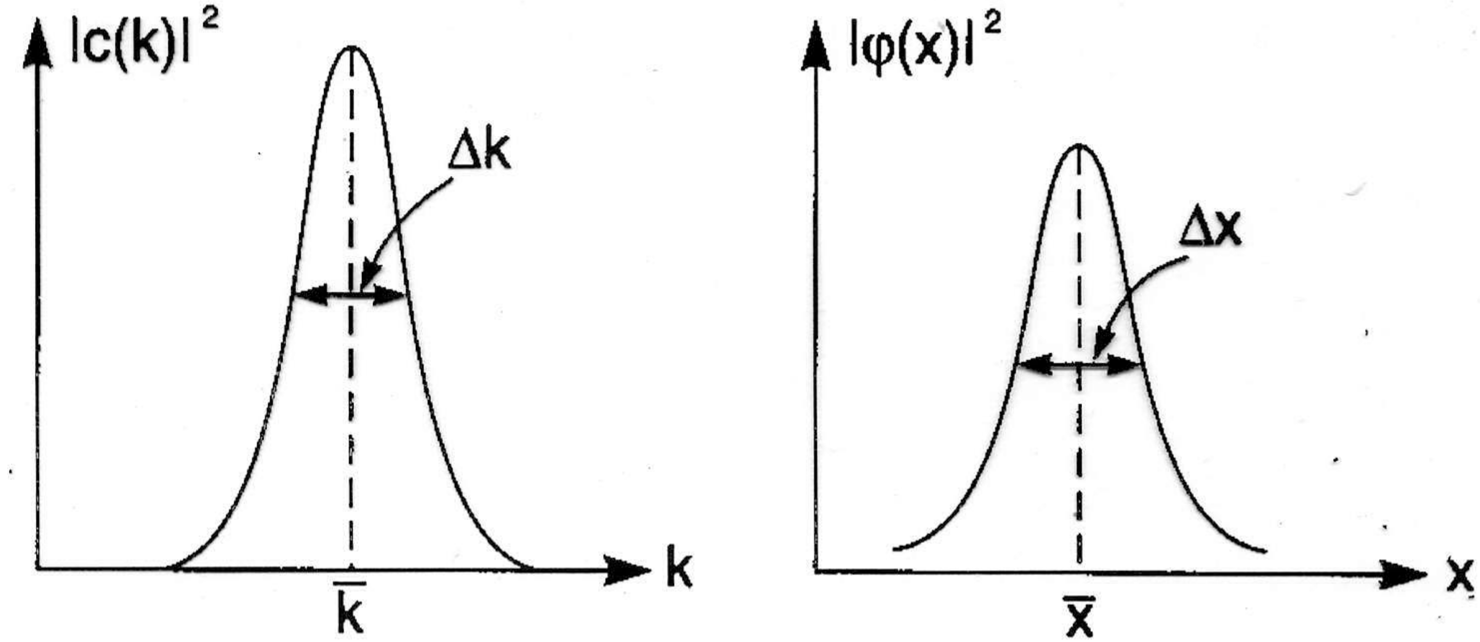


- que no limite do contínuo resulta em:

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) cos\left(kx - \omega t\right) dk$$

- <u>Animação</u>

Propriedades ondulatórias da matéria



- Quanto mais estreito o pacote de onda, uma maior a dispersão de comprimentos de onda é necessária e vice-versa, sendo que pode-se mostrar pelas integrais de Fourier que: $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1/2$
- Animação

Propriedades ondulatórias da matéria

- Também usando as integrais de Fourier, podemos obter que a velocidade de grupo do pacote de onda é dado por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Sabendo que:

$$v_f = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$$

- tem-se que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(v_f \cdot k\right) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

- onde o segundo termo da expressão acima representa a dispersão do pacote de onda
- Animação (Wavepacket for a Free Particle)

Princípio da Incerteza

- Em 1927, Werner Heisenberg propõe o "Princípio da Incerteza" que diz que é impossível determinar simultaneamente a posição e o momento de uma partícula. Matematicamente:

  $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$

- É importante enfatizar que a limitação imposta por esse princípio não diz respeito à instrumentação necessária para se fazer esta medida, mas é uma característica intrínseca da natureza

Princípio da Incerteza

- A relação de dispersão entre os comprimentos de onda que compõe o pacote de onda e sua largura leva ao princípio da incerteza

  $$\Delta k \cdot \Delta x \geq 1/2 \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$$

  pois, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi \cdot p/h = p/\hbar$

- Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos, é necessário)

Princípio da Incerteza

- O Princípio da Incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo.
- Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1/2$$

- como

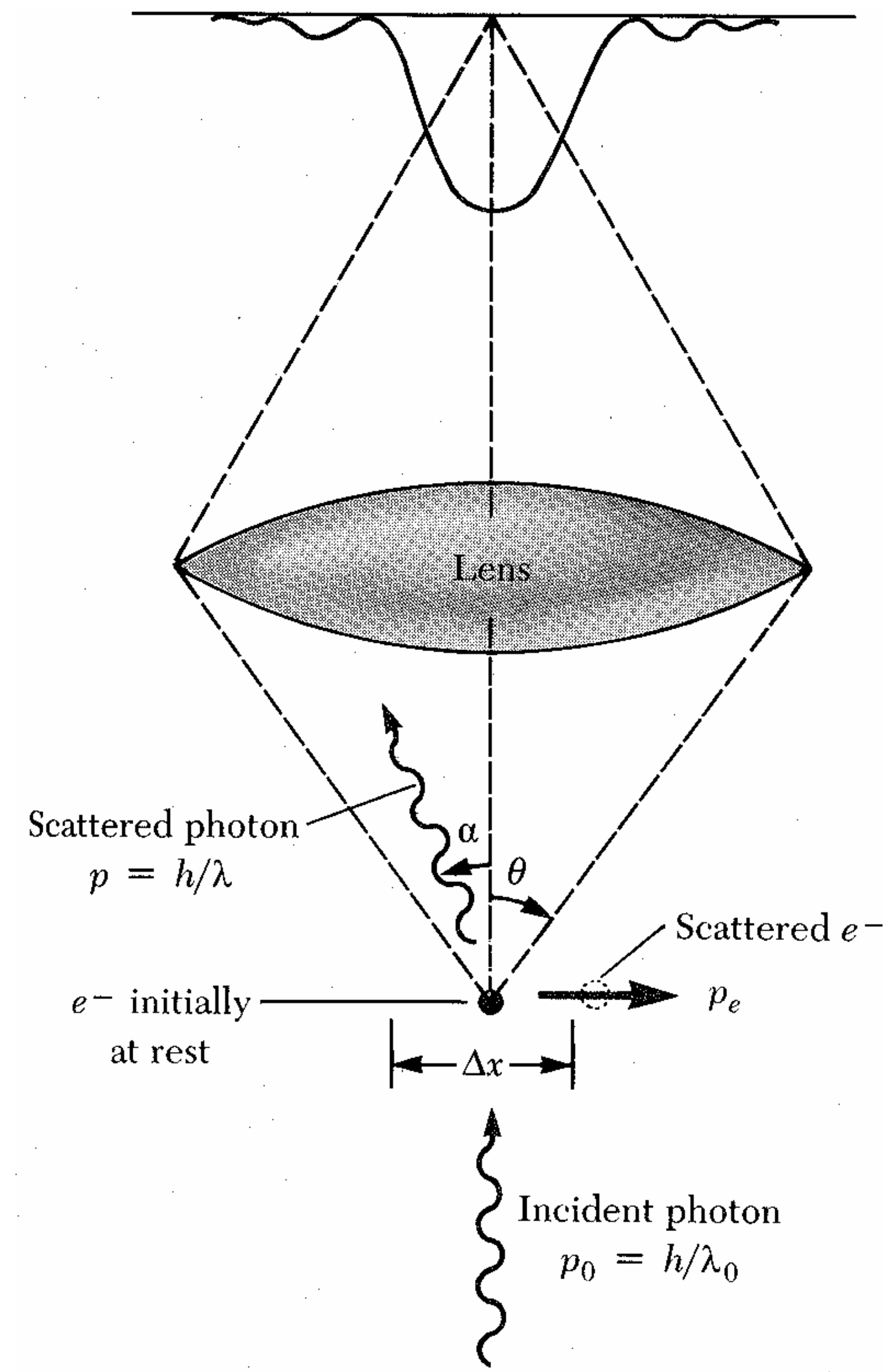
$$E = h\nu = h \cdot \omega/2\pi = \hbar\omega$$

- portanto:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

Princípio da Incerteza

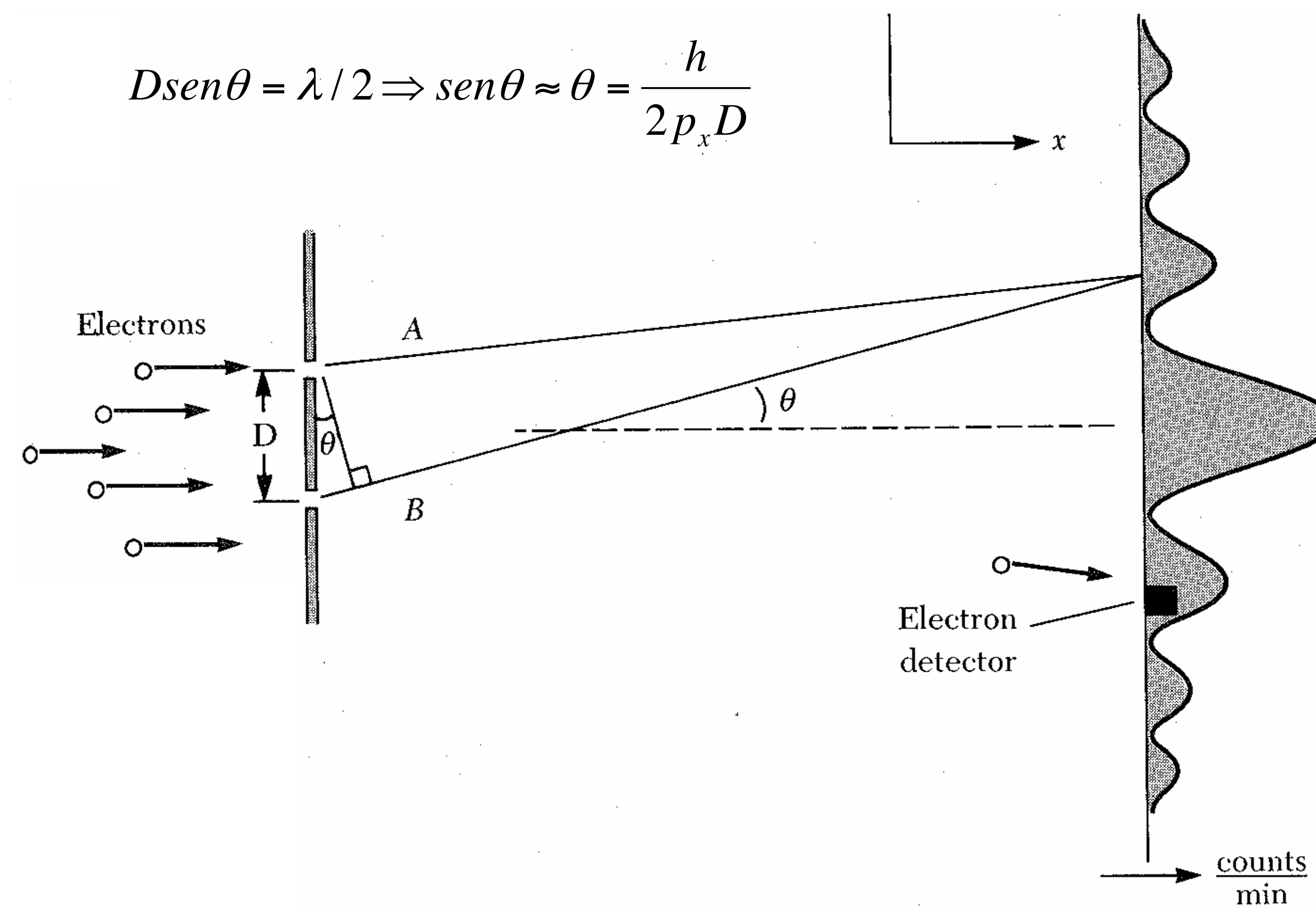
- O Princípio da incerteza pode ser interpretado fisicamente através do experimento imaginário (gedanken) proposto pelo próprio Heisenberg, que corresponde a medida da posição de um elétron através de um microscópio ideal



Experimento da fenda dupla

- Um feixe de elétrons incidindo em um sistema de fendas duplas apresenta o padrão de interferência ondulatório em um aparato colocado em frente às fendas, mesmo que façamos incidir um elétron por vez nas fendas

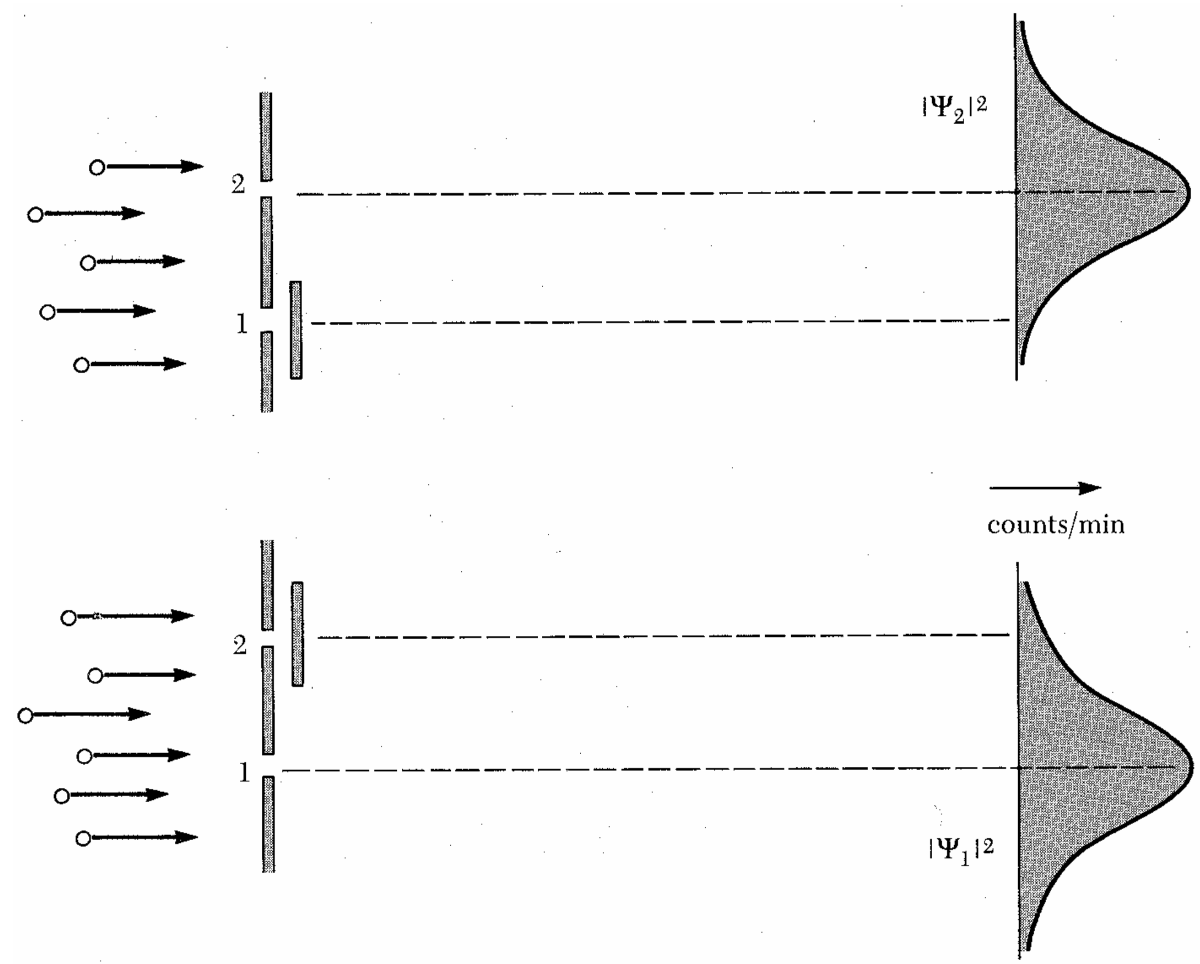
$$D sen\theta = \lambda / 2 \Rightarrow sen\theta \approx \theta = \frac{h}{2 p_x D}$$



Experimento da fenda dupla

- Podemos agora interpretar o que acontece no experimento da fenda dupla com elétrons a partir da idéia da função de onda

- Se fecharmos uma das fendas, medimos $|\Psi_1|^2$ ou $|\Psi_2|^2$, que é o mesmo resultado que obteríamos para um sistema físico composto exclusivamente de partículas



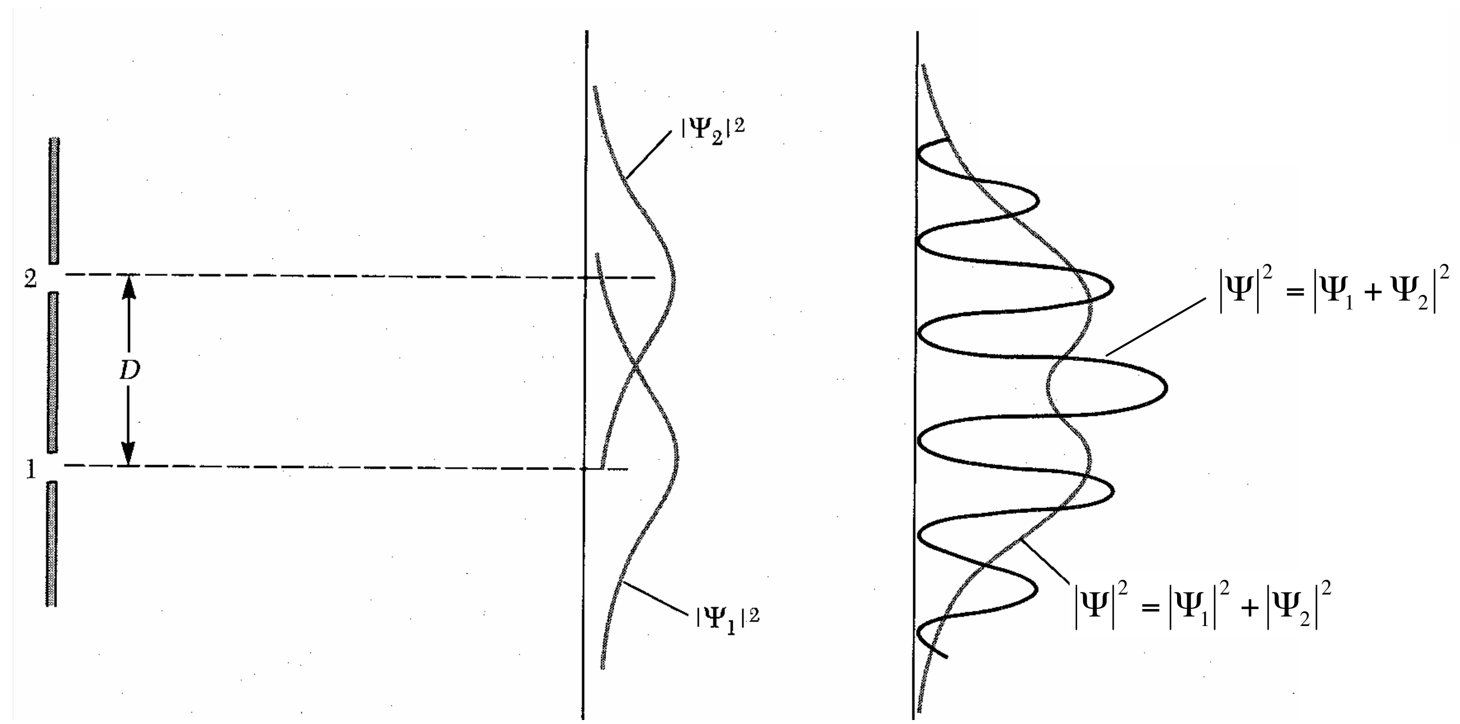
Experimento da fenda dupla

- Portanto, se o elétron se comportasse como partícula teríamos a distribuição correspondente a

$$|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$$

- Como ele se comporta como uma onda, temos

$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2$$



Experimento da fenda dupla

- É possível determinar por qual fenda o elétron passou?
- Para isso, precisamos detetar o elétron através da interação de uma partícula (um fóton, por exemplo)
- Isso gera uma variação no momento do elétron dada por:

$$\frac{\Delta p_y}{p_x} \ll \theta = \frac{h}{2p_x D} \Rightarrow \Delta p_y \ll \frac{h}{2D}$$

- Por outro lado, precisamos que: $\Delta y \ll D$
- Essas duas condições levam a $\Delta p_y \Delta y \ll \frac{h}{2D} \cdot D = \frac{h}{2}$

  que é uma violação do princípio de incerteza

Limitações da "Antiga" Teoria Quântica

- A hipótese de de Broglie associa propriedades ondulatórias com a matéria mas não diz como essas propriedades evoluem no tempo e espaço, ou seja, não determina de maneira exata a função de onda
- Ela também não diz como tratar sistemas em que o comprimento de onda não é constante, ou seja, quando forças estão presentes no sistema físico em estudo
- E não fornece uma relação quantitativa entre todas as propriedades ondulatórias (função de onda) e as propriedades corpusculares (observáveis) das partículas