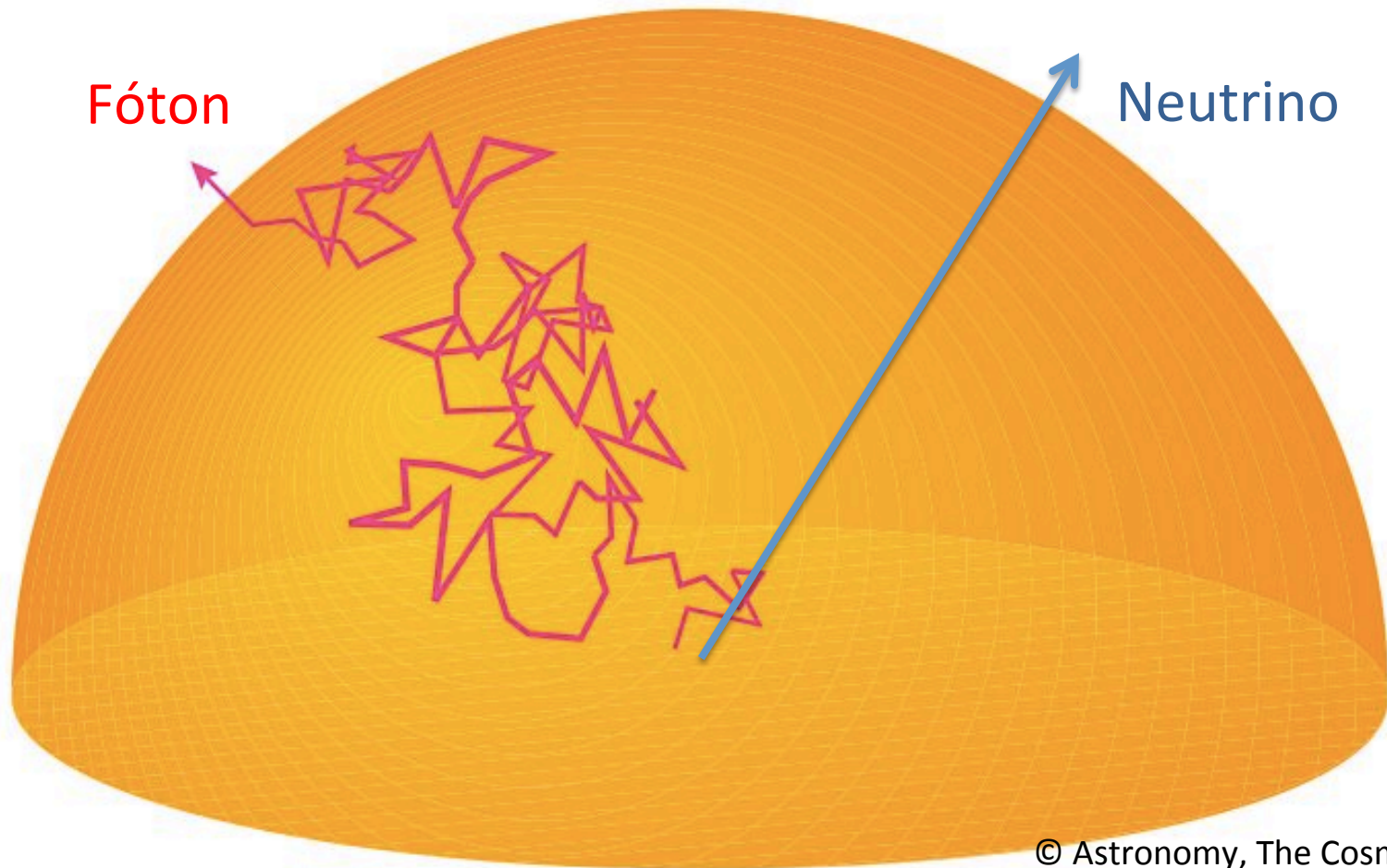


# Cap. 9: Atmosferas Estelares

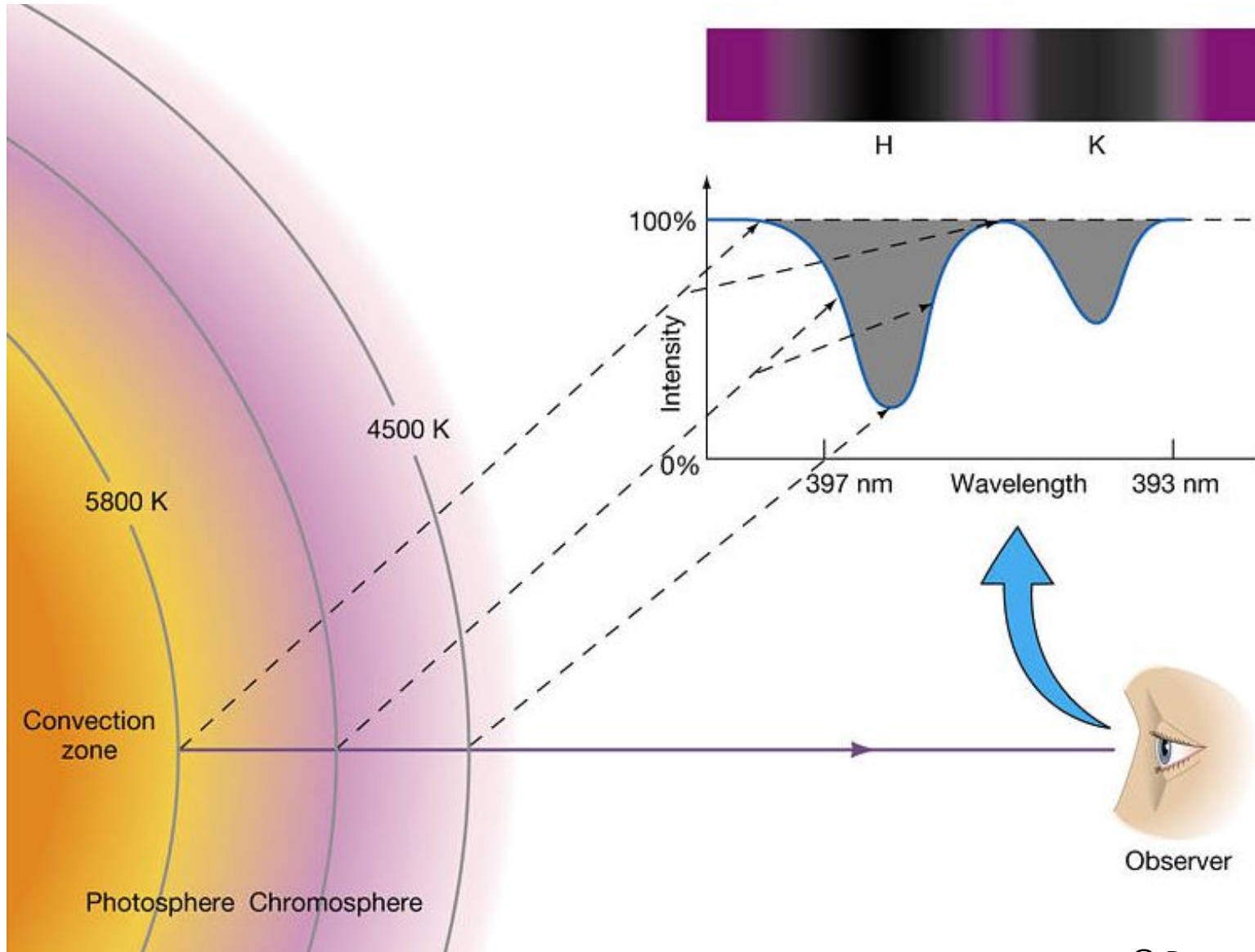
- Campo de radiação
- Opacidade estelar
- Transferência radiativa
- Equação de transferência
- O perfil das linhas espectrais

# 9.1 Campo de radiação

O interior estelar é opaco. A luz que recebemos é da atmosfera da estrela. A temperatura, densidade (pressão) e composição da atmosfera determinam a forma do espectro

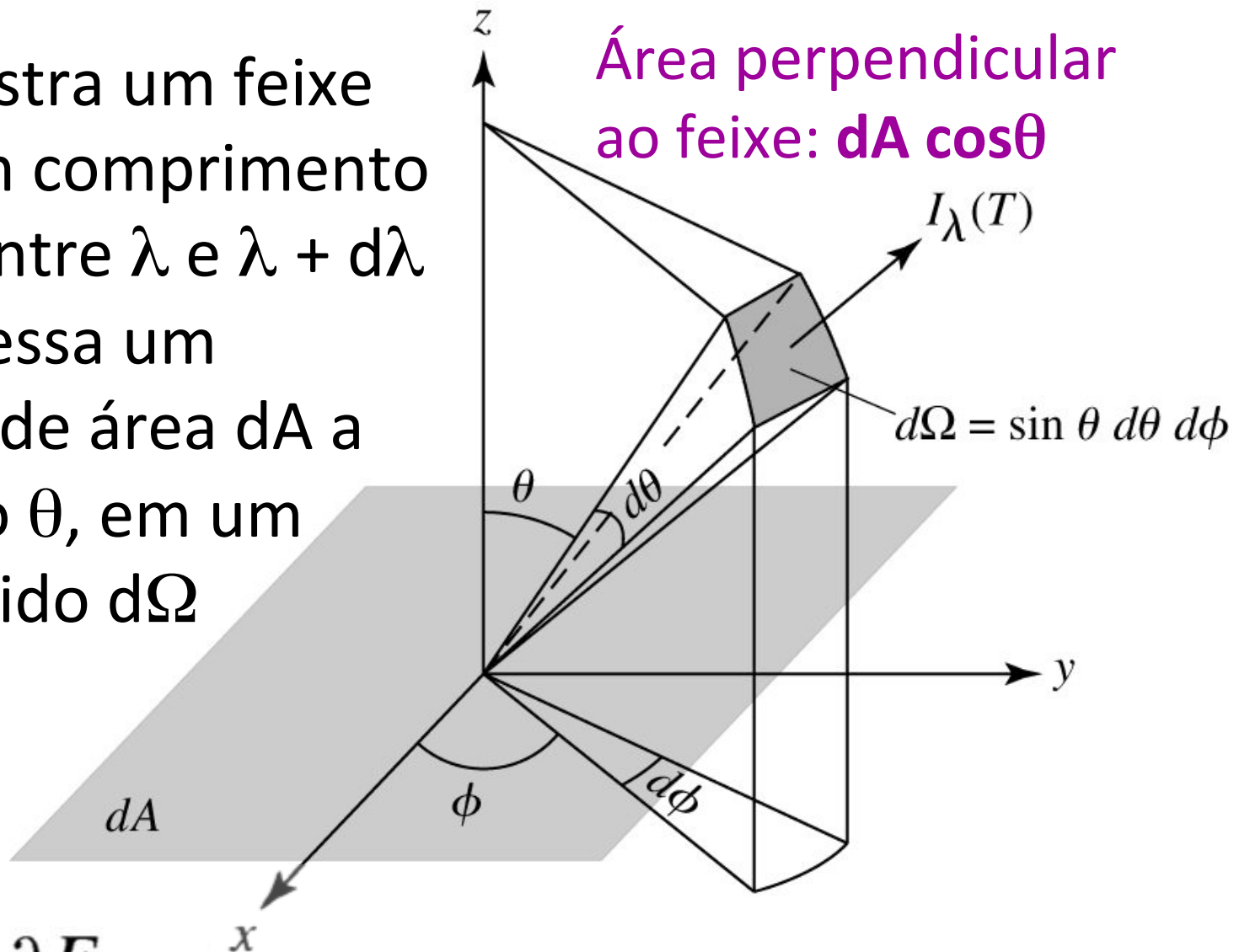


Para interpretar as linhas espectrais, precisamos descrever como a luz viaja através do gás da atmosfera



Nota: falta a emissão da cromosfera no centro da linha.

Figura mostra um feixe de luz com comprimento de onda entre  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  que atravessa um elemento de área  $dA$  a um ângulo  $\theta$ , em um ângulo sólido  $d\Omega$



Definindo:

$$E_\lambda \equiv \frac{\partial E}{\partial \lambda}$$

→ Quantidade de energia do feixe:

$$\delta E = E_\lambda d\lambda$$

Quantidade de energia do feixe  $\delta E = E_\lambda d\lambda$

Intensidade específica  
(ou Intensidade):

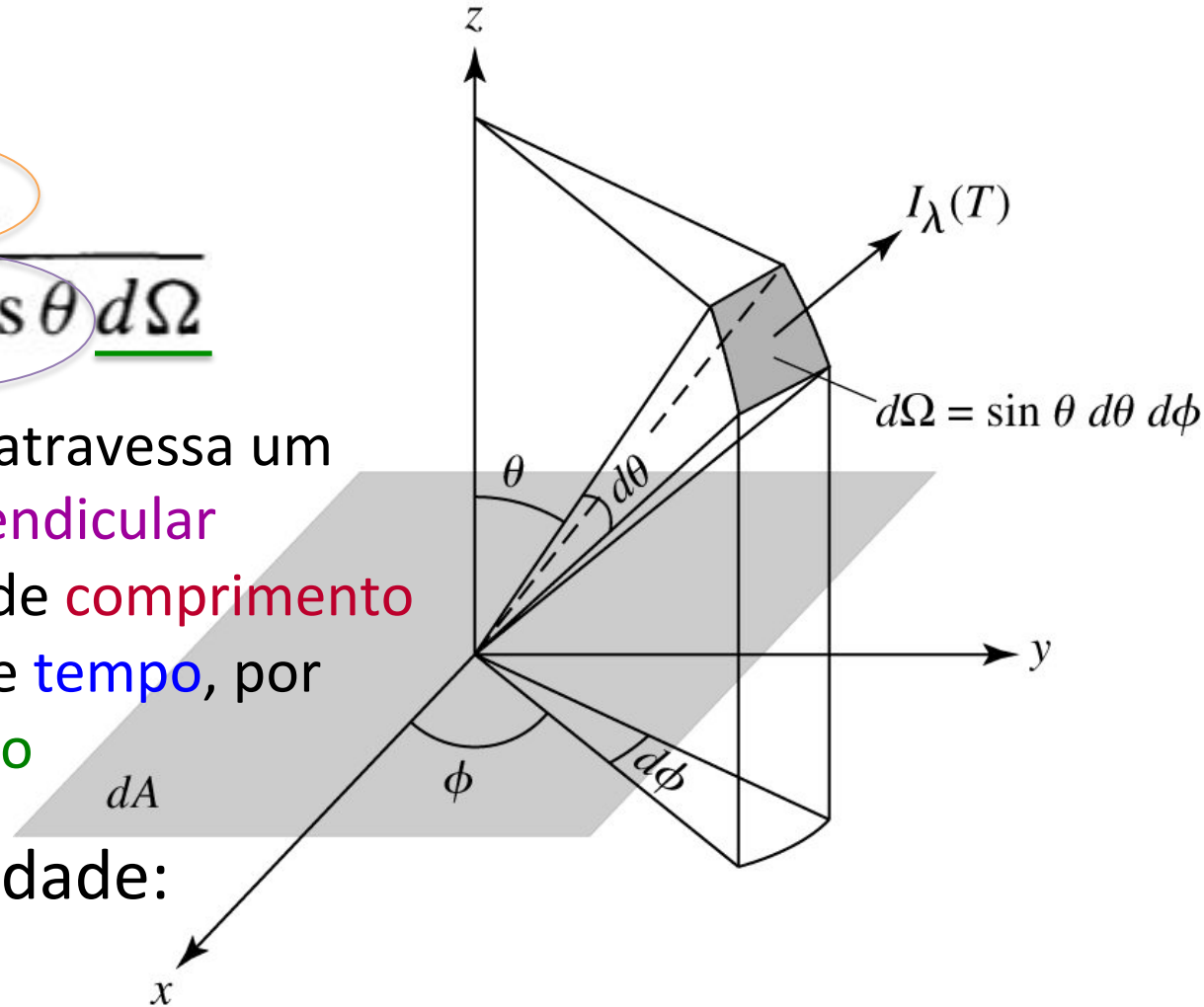
$$I_\lambda \equiv \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega}$$

Energia  $\delta E (=E_\lambda d\lambda)$  que atravessa um elemento de área perpendicular ( $dA \cos\theta$ ), por unidade de comprimento de onda, por unidade de tempo, por unidade de ângulo sólido

Unidades da intensidade:

$$\text{erg m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{nm}^{-1} \text{sr}^{-1}$$

$$\text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1} \text{sr}^{-1}$$



Quantidade de energia do feixe  $\delta E = E_\lambda d\lambda$

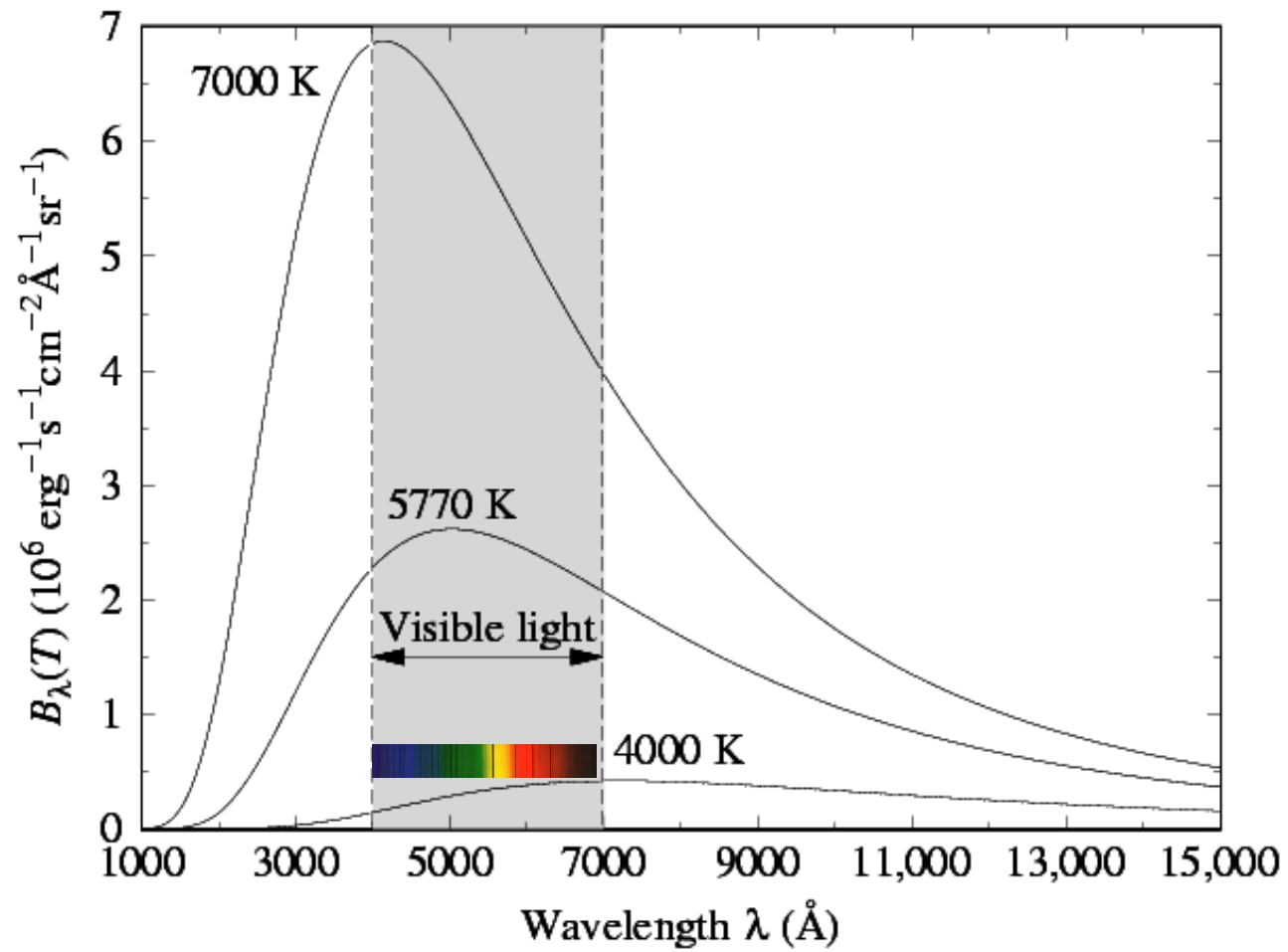
Intensidade específica  
(ou Intensidade):

$$I_\lambda \equiv \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega}$$

Energia  $\delta E (=E_\lambda d\lambda)$  que atravessa um elemento de área perpendicular ( $dA \cos \theta$ ), por unidade de tempo, por unidade de comprimento de onda, por unidade de ângulo sólido

$$\begin{aligned} \text{Energia } \delta E &= E_\lambda d\lambda = I_\lambda d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega \\ &= I_\lambda d\lambda dt dA \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

Radiação de corpo negro é exemplo de intensidade específica



$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(hc/\lambda kT)} - 1}$$

Intensidade media  $\langle I_\lambda \rangle$  (ou  $J_\lambda$ )

$$\begin{aligned}\langle I_\lambda \rangle &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\lambda d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda \sin \theta d\theta d\phi\end{aligned}$$

Em um caso isotrópico:  $\langle I_\lambda \rangle = I_\lambda$

A radiação de corpo negro é isotrópica:  $\langle I_\lambda \rangle = B_\lambda$



Fluxo específico  $F_\lambda = \frac{\delta E}{\Delta A \Delta t \Delta \lambda} = \frac{E_\lambda d\lambda}{\Delta A \Delta t \Delta \lambda}$

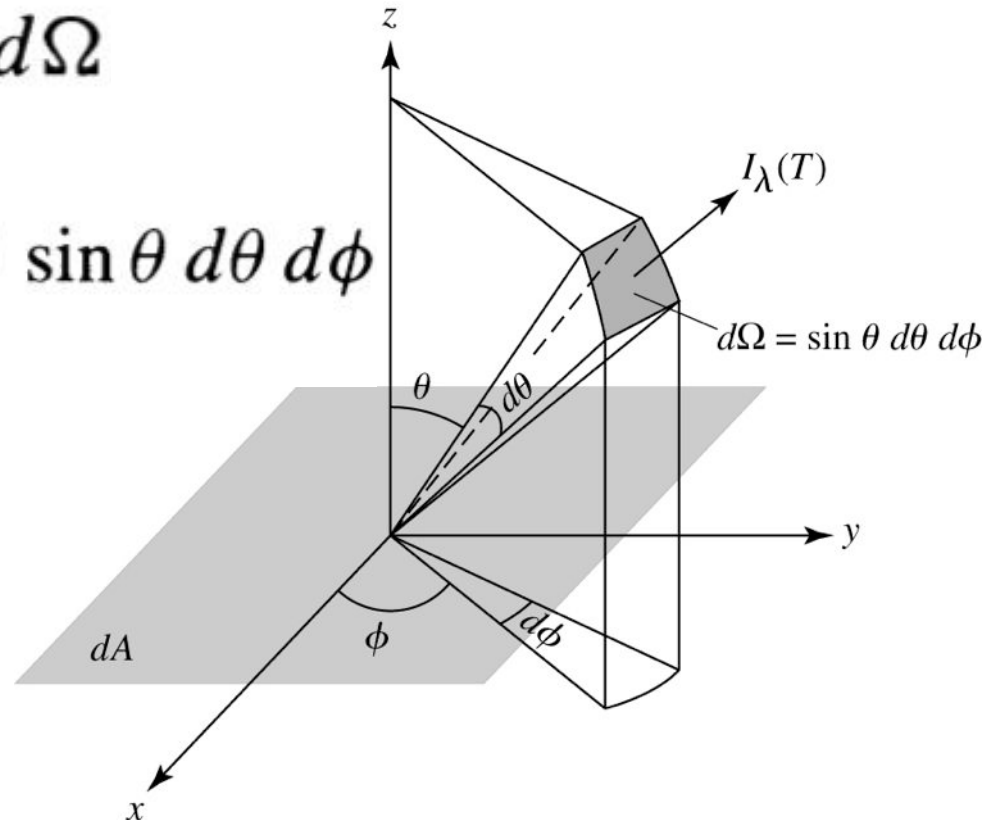
$$I_\lambda \equiv \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega}$$

$$F_\lambda d\lambda = \int I_\lambda d\lambda \cos \theta d\Omega$$

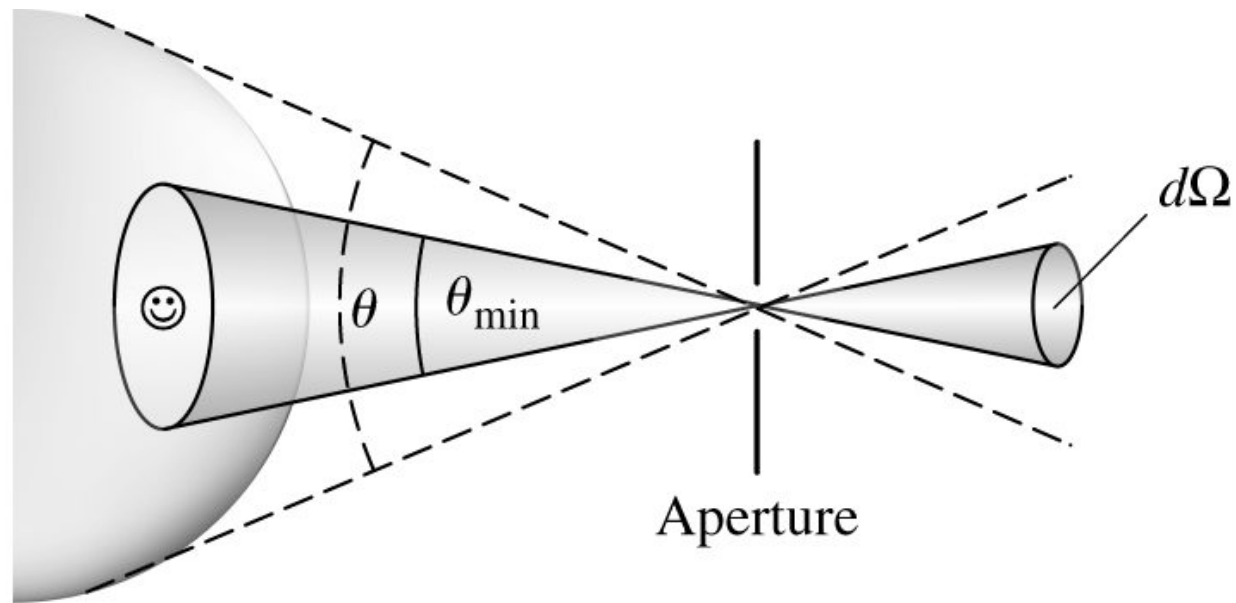
$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda d\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$I_\lambda \sim B_\lambda \rightarrow$$

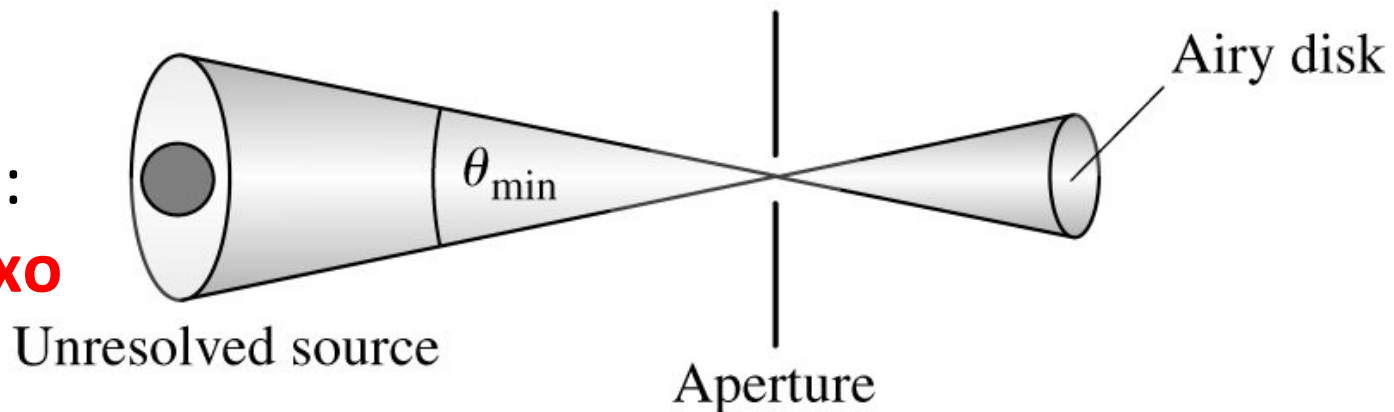
Fluxo na superfície de  
estrelas,  $F_\lambda \sim \pi B_\lambda$



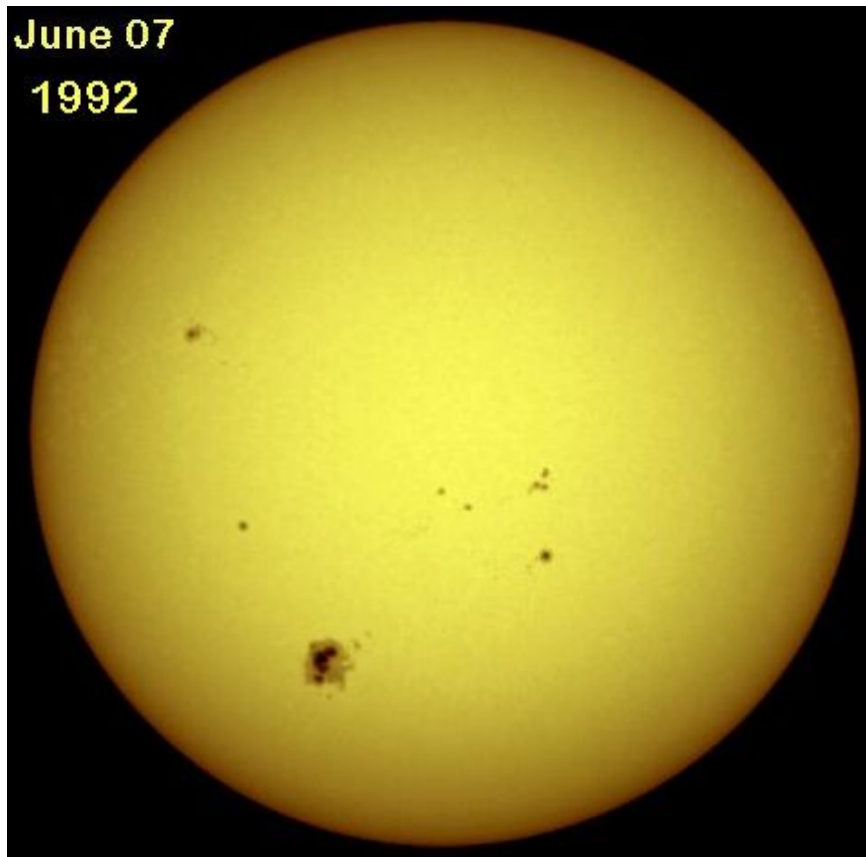
Fonte resolvida espacialmente:  
**medida de intensidade específica**



Fonte não resolvida espacialmente:  
**medida de fluxo**



# Intensidade específica vs. Fluxo



- Sol: é possível medir intensidade específica
- Estrelas: medida de fluxo



<http://solarscience.msfc.nasa.gov/surface.shtml>

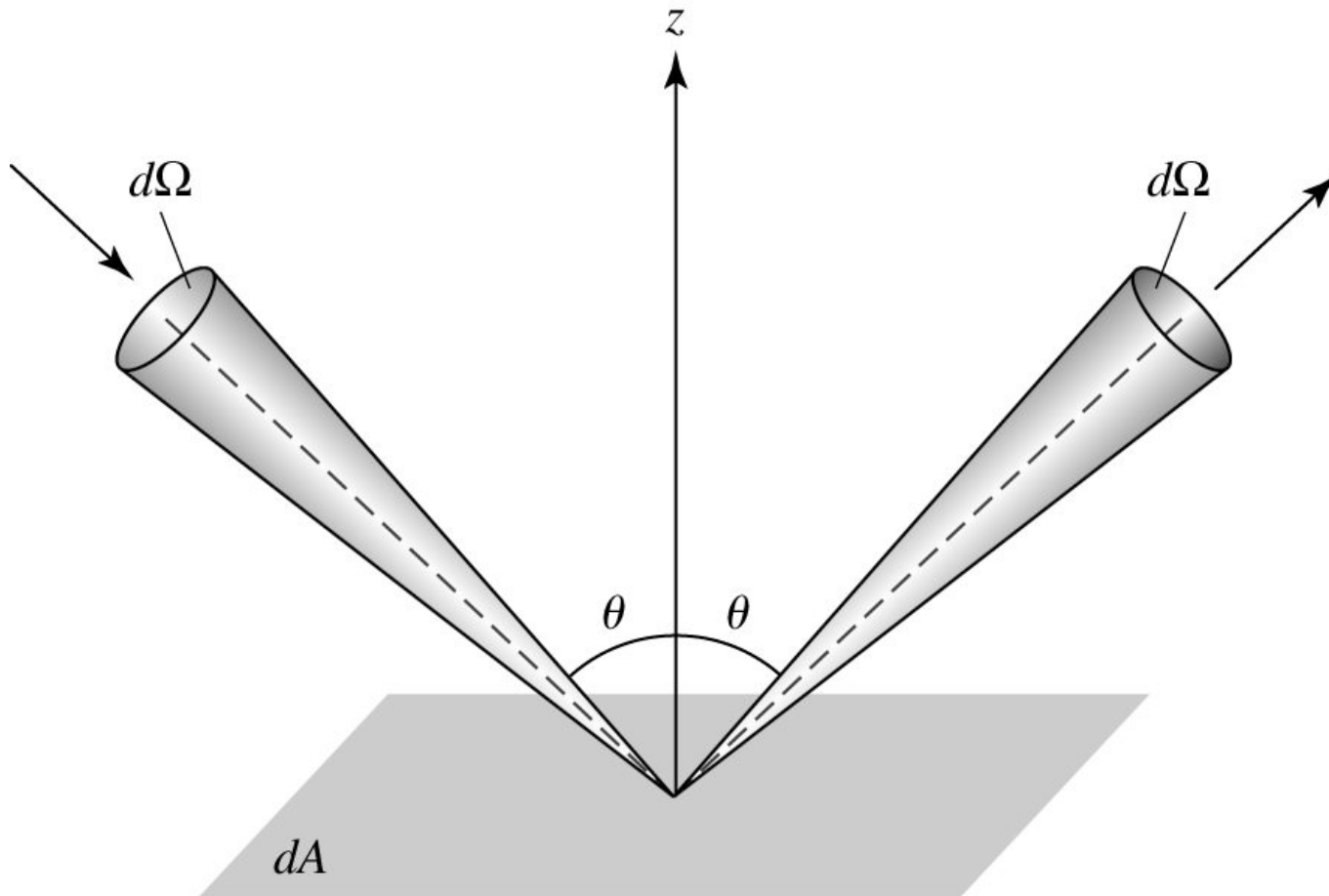
<http://www.twanight.org/newtwan/photos.asp?ID=3001503>

# Pressão de radiação

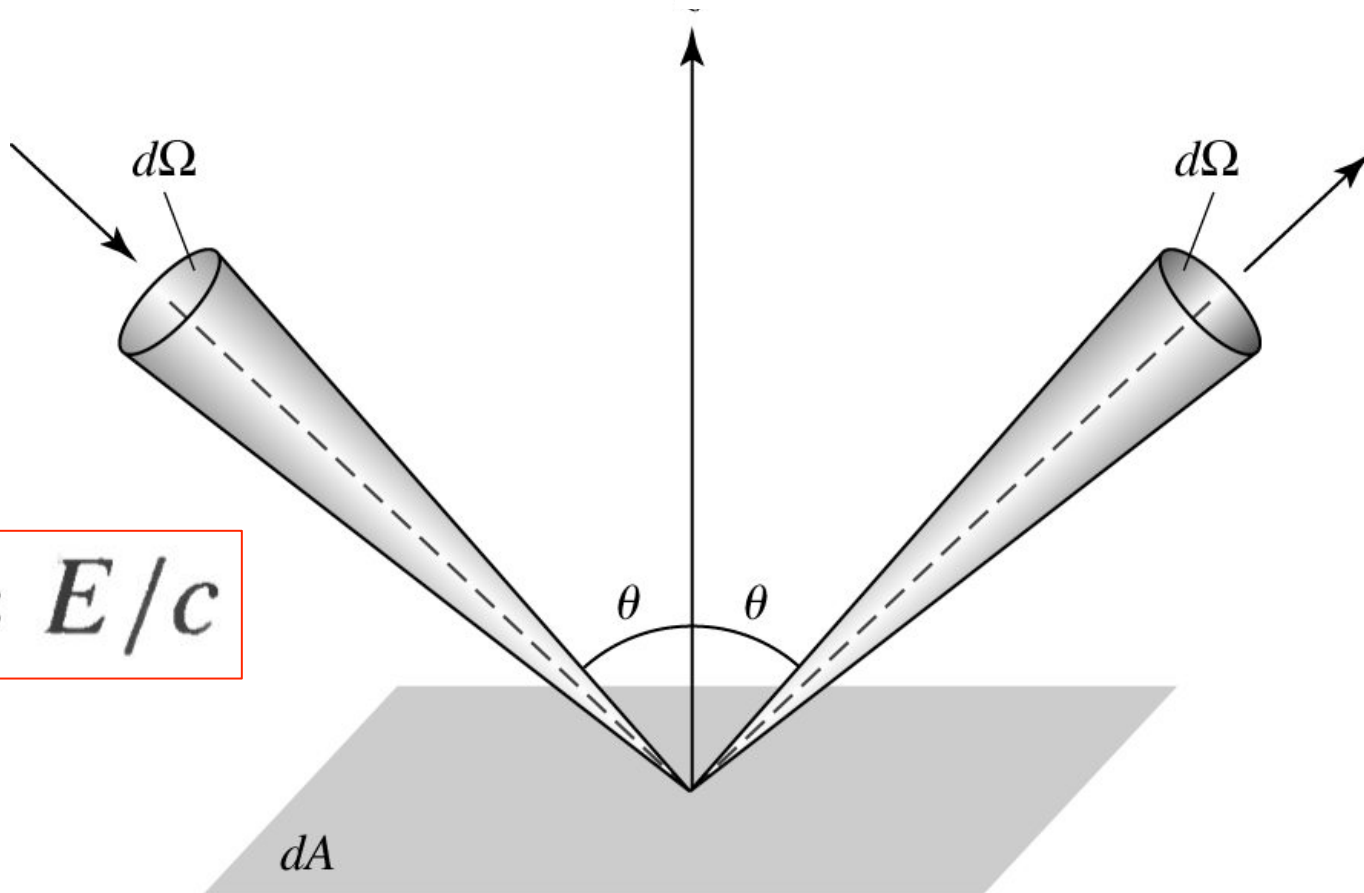
Fóton  
carrega  
momento

$$p = E/c$$

$$dp_\lambda d\lambda = \left[ (p_\lambda)_{\text{final},z} - (p_\lambda)_{\text{initial},z} \right] d\lambda$$



$$dp_{\lambda} d\lambda = \left[ \frac{E_{\lambda} \cos \theta}{c} - \left( -\frac{E_{\lambda} \cos \theta}{c} \right) \right] d\lambda$$
$$= \frac{2 E_{\lambda} \cos \theta}{c} d\lambda = \frac{2}{c} I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos^2 \theta d\Omega$$

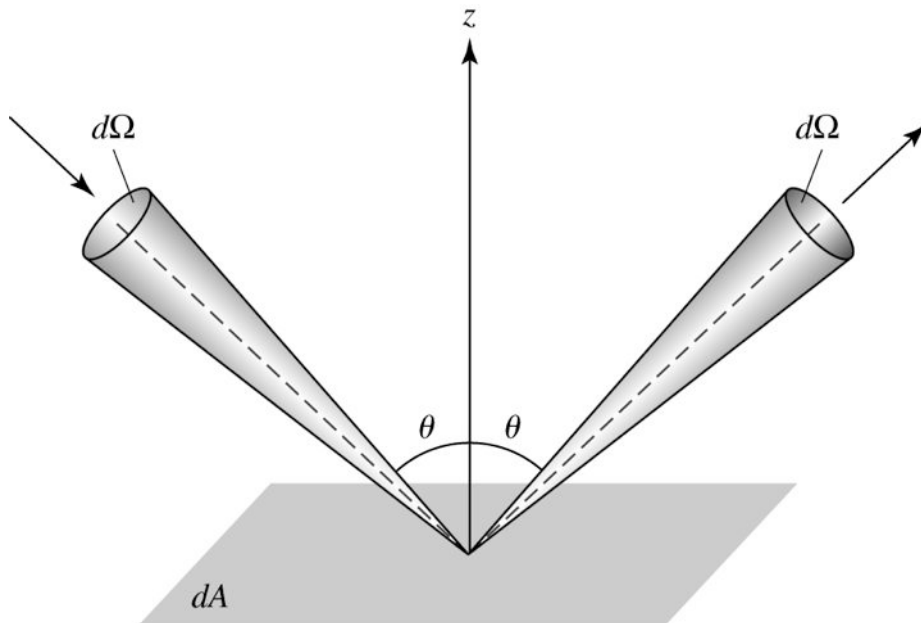


$$p = E/c$$

# Integrando no hemisfério dos fótons incidentes na superfície A

$$P_{\text{rad},\lambda} d\lambda = \frac{2}{c} \int_{\text{hemisphere}} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta d\Omega \quad (\text{reflection})$$

$$= \frac{2}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi.$$



Para um campo de radiação isotrópico não existe o fator 2

Pressão total integrando em todo o  $\Omega$

$$P_{\text{rad},\lambda} d\lambda = \frac{1}{c} \int_{\text{sphere}} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta d\Omega \quad (\text{transmission})$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{4\pi}{3c} I_{\lambda} d\lambda \quad (\text{isotropic radiation field}).$$

Pressão total por fótons de todos os  $\lambda$ :

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{\infty} P_{\text{rad},\lambda} d\lambda$$

Para radiação de corpo negro:

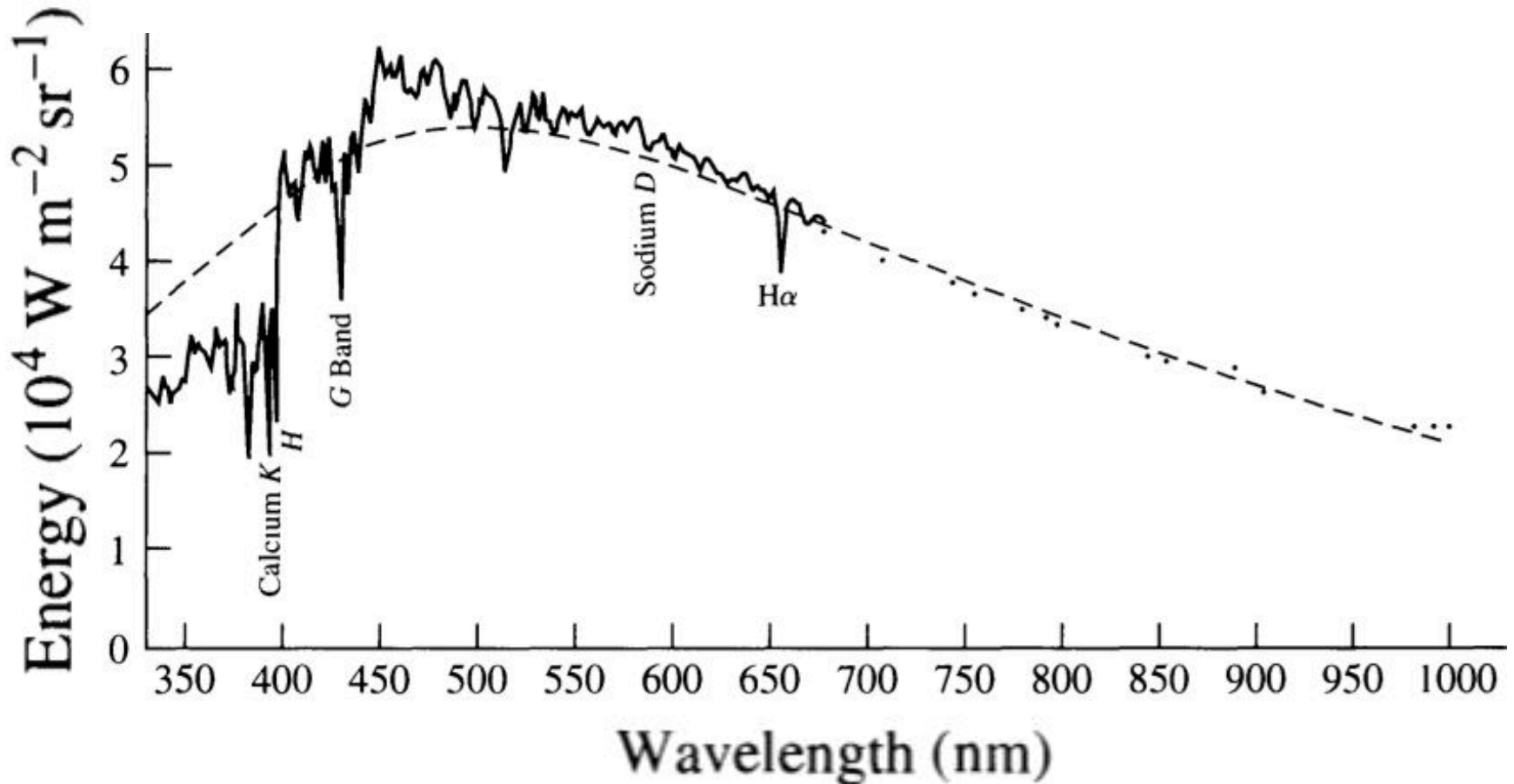
$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda = \frac{4\sigma T^4}{3c}$$

Pressão de radiação é muito importante para estrelas quentes



## 9.2 Opacidade estelar

Atmosfera do Sol remove energia nas linhas de absorção (**line blanketing**) → espectro solar não é um corpo negro



# Temperatura e equilíbrio termodinâmico local

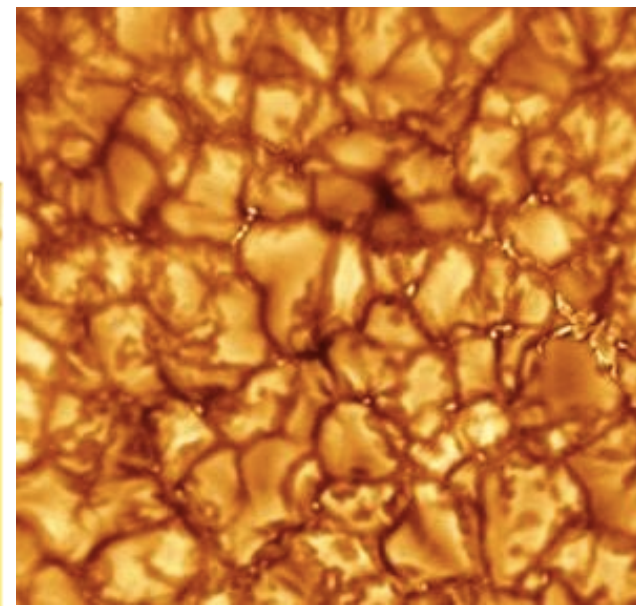
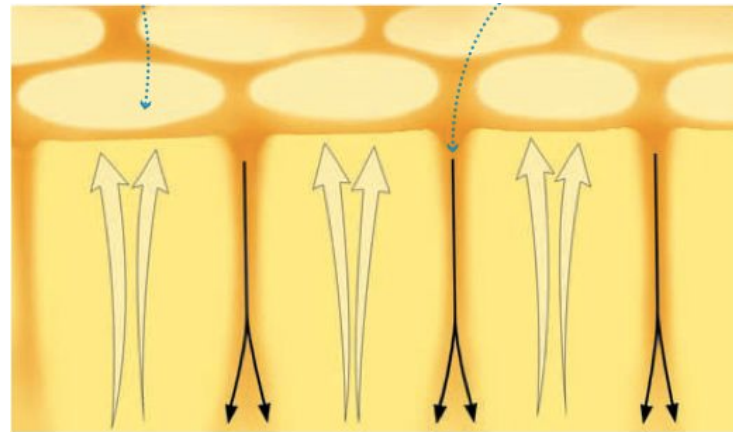
- **Temperatura efetiva:** lei de Stefan-Boltzmann (fluxo na “superfície” da estrela)  $F_{\text{surf}} = \sigma T_e^4$
- **Temperatura de excitação** (equação de Boltzmann)  $\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$
- **Temperatura de ionização** (eq. Saha)  $\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$
- **Temperatura cinética** (Maxwell-Boltzmann)  $n_v dv = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$
- **Temperatura de cor:** pela cor da estrela devido à sua distribuição de energia

# Equilíbrio termodinâmico

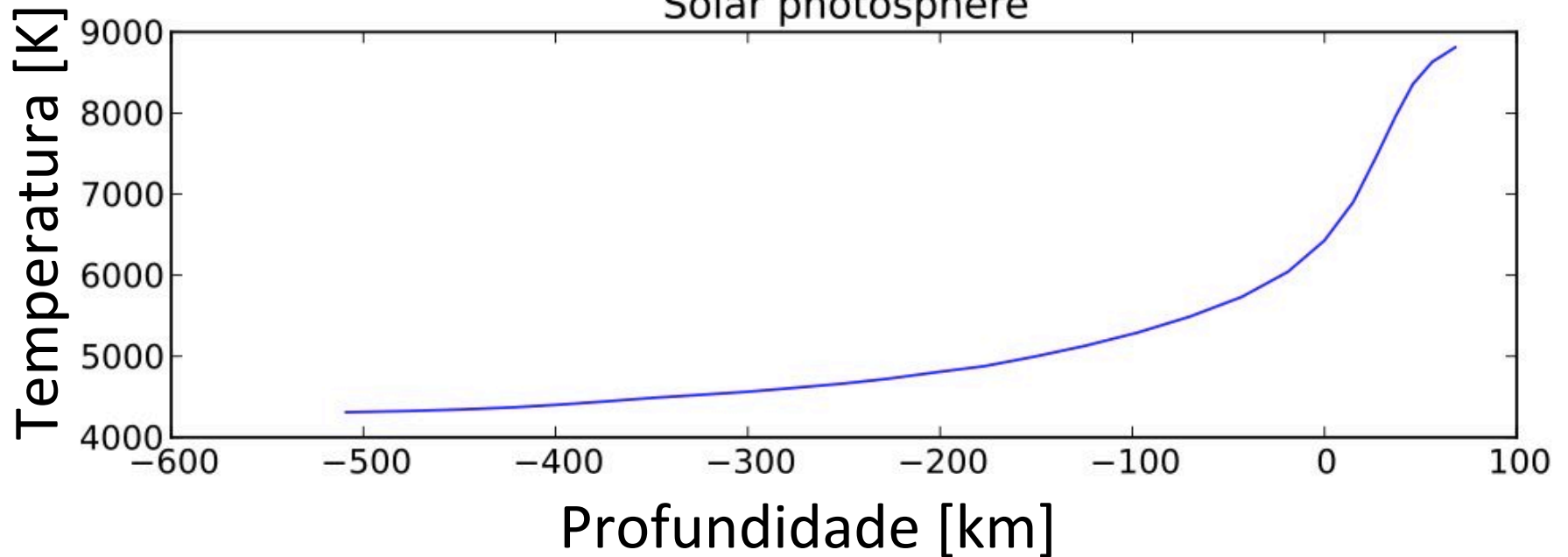
Considerando um gás confinado em uma “caixa ideal” → partículas do gás e a radiação de corpo negro em equilíbrio podem ser descritas por uma temperatura

- Não existe fluxo neto de energia
- Cada processo ocorre na mesma razão que seu processo inverso (absorção e emissão de fótons)
- **No entanto, existe um fluxo de energia e a temperatura na atmosfera estelar varia → não existe equilíbrio termodinâmico perfeito**

# Equilíbrio Termodinâmico Local (ETL)



Solar photosphere



**Exemplo 9.2.1** A temperatura da fotosfera solar muda em escalas  $H_T \sim 100\text{km}$ . Como essa distância se compara com o percurso livre médio de um átomo?

**Example 9.2.1.** The photosphere is the surface layer of the Sun's atmosphere where the photons can escape into space (see page 253 and Section 11.2). According to a model solar atmosphere (see Cox, page 348), the temperature in one region of the photosphere varies from 5580 K to 5790 K over a distance of 25.0 km. The characteristic distance over which the temperature varies, called the *temperature scale height*,  $H_T$ , is given by

$$H_T \equiv \frac{T}{|dT/dr|} = \frac{5685 \text{ K}}{(5790 \text{ K} - 5580 \text{ K})/(25.0 \text{ km})} = 677 \text{ km}$$

where the average temperature has been used for the value of  $T$

# Percurso livre médio de um átomo

Densidade da fotosfera:  $\rho = 2.1 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$

Supondo apenas H, o número de átomos de H/m<sup>3</sup>:

$$n = \frac{\rho}{m_H} = 1.25 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

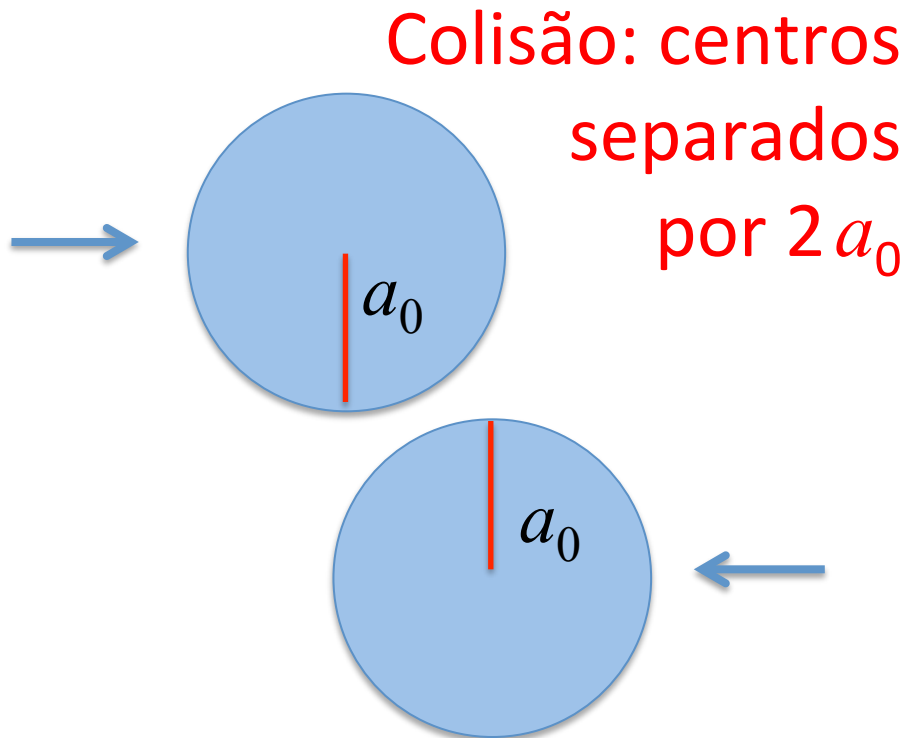
$m_H$ : massa do átomo de hidrogênio

Átomo de Bohr (Cap. 5):

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} n^2 = a_0 n^2$$

Onde  $a_0$  é o raio de Bohr:

$$\begin{aligned} a_0 &= 5,291772083 \times 10^{-11} \text{ m} \\ &= 0,0529 \text{ nm} \end{aligned}$$



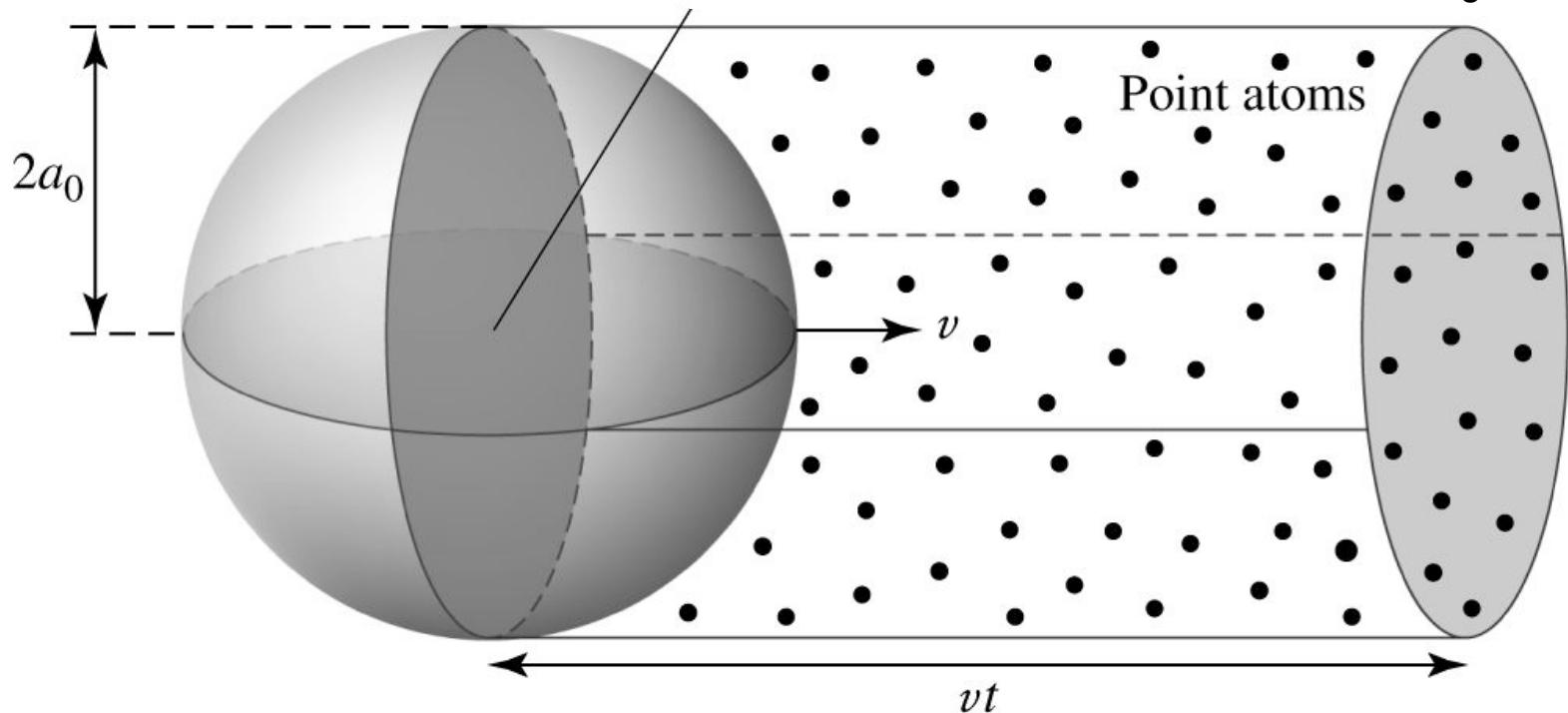
Equivalente: átomo de H com raio  $2a_0$  (e veloc.  $v$ )

(supondo os outros átomos de H como fontes pontuais estacionárias)

Em tempo  $t$ , terá percorrido distância  $d = vt$

Volume coberto:  $V = d \times \sigma = vt \times \pi (2a_0)^2$

Seção de choque  $\sigma = \pi (2a_0)^2$



Átomos de hidrogênio/volume:  $n = \frac{\rho}{m_H} = 1.25 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$

Numero de átomos de H no volume  $V = nV$

Lembrando:  $V = d \times \sigma = vt \times \sigma \rightarrow nV = n v t \sigma$

A distância média entre colisões:  $\ell = d/\#\text{átomos}$

$$\ell = \frac{vt}{n\sigma vt} = \frac{1}{n\sigma}$$
$$\sigma = \pi(2a_0)^2 = 3.52 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$
$$\ell = \frac{1}{n\sigma} = 2.27 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$\ell \ll H_T$  (escala de Temperatura na atmosfera)

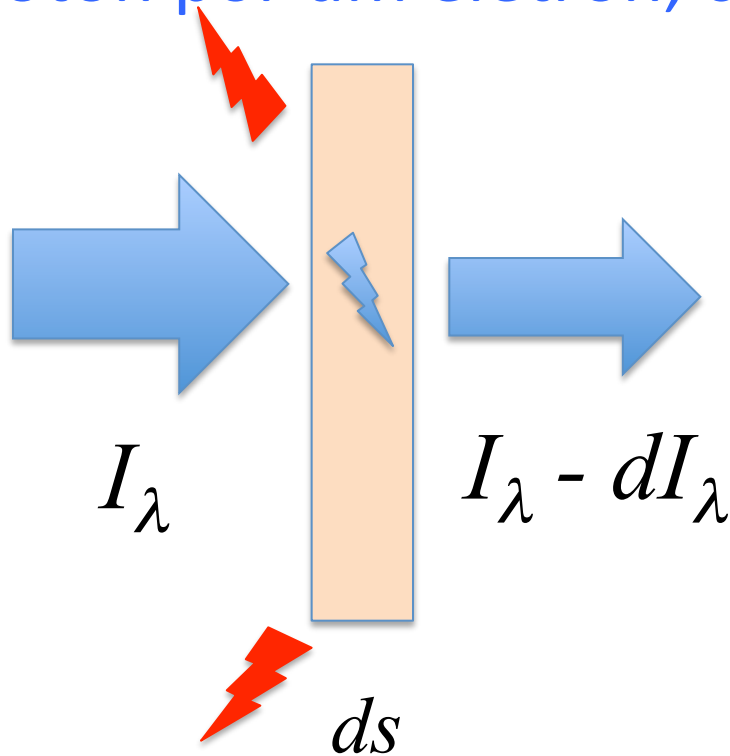
→ Temperatura  $\sim$  constante entre colisões de átomos.

E os fótons?



# Absorção

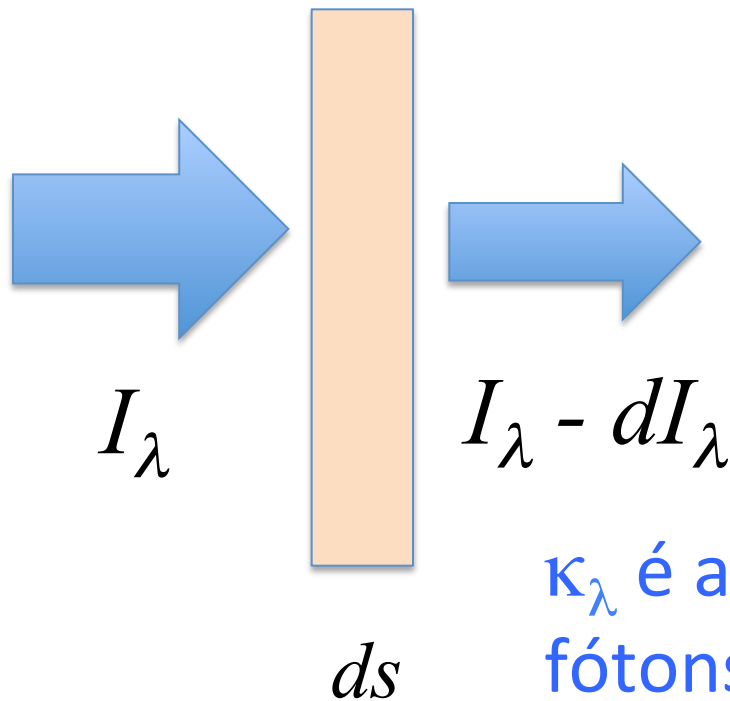
Qualquer processo que remove fótons do feixe de luz é chamado de absorção. Por exemplo, a absorção do fóton por um elétron, criando uma linha de absorção.



O espalhamento também pode ser considerado como fonte de absorção, pois tira fótons do feixe de luz

# Opacidade

Mudança de intensidade da luz  $dI_\lambda$  ao atravessar um gás é proporcional à intensidade  $I_\lambda$ , a distância percorrida  $ds$ , a densidade do gás  $\rho$ , e o coeficiente de absorção  $\kappa_\lambda$ :



$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds$$

$\kappa_\lambda$  também é chamado de **opacidade**.

$\kappa_\lambda$  é a seção de choque para absorber fótons por unidade de massa. [ $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ ]

Exemplo 9.2.2: qual a intensidade final de um feixe de intensidade inicial  $I_{\lambda,0}$  (em  $s=0$ ) após atravessar uma distância  $s$ ?

Podemos integrar:  $dI_{\lambda} = -\kappa_{\lambda}\rho I_{\lambda} ds$

$$\int_{I_{\lambda,0}}^{I_{\lambda,f}} \frac{dI_{\lambda}}{I_{\lambda}} = - \int_0^s \kappa_{\lambda}\rho ds$$

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\int_0^s \kappa_{\lambda}\rho ds}$$

Para um gás com densidade uniforme e  $\kappa_{\lambda}$  constante:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_{\lambda}\rho s}$$

Para um gás com densidade uniforme e  $\kappa_\lambda$  constante:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s}$$

Intensidade vai diminuir em fator  $e^{-1}$ , se  $\kappa_\lambda \rho s = 1$

Ou seja,  $I_\lambda$  vai diminuir em  $e^{-1}$  para uma distância característica:

$$\ell = 1/\kappa_\lambda \rho$$

Na fotosfera solar:  $\rho = 2.1 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$   
 $\kappa_{500} = 0.03 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$

Distância característica antes do fóton ser removido do feixe:

$$\ell = \frac{1}{\kappa_{500} \rho} = 160 \text{ km.}$$

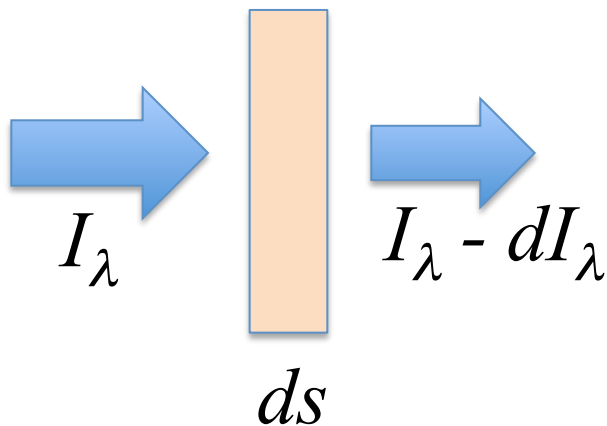
Similar à escala de temperatura!  
Be careful with LTE approximation!

# Profundidade óptica

Caminho livre médio dos fótons:  $\ell = \frac{1}{\kappa_\lambda \rho} = \frac{1}{n\sigma_\lambda}$

$\kappa_\lambda \rho$  e  $n\sigma_\lambda$  podem ser considerados como a fração de fótons espalhados fora do feixe em 1 m de distância

É conveniente definir a profundidade óptica  $\tau_\lambda$ :



$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds$$

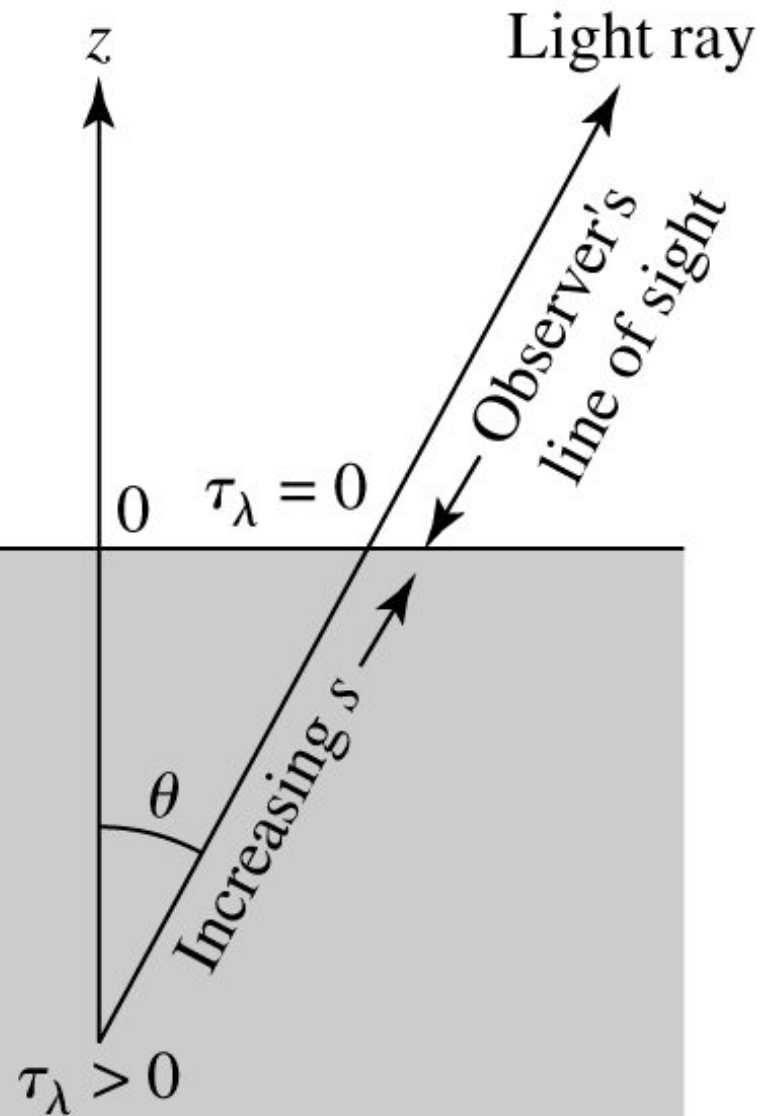
$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds$$

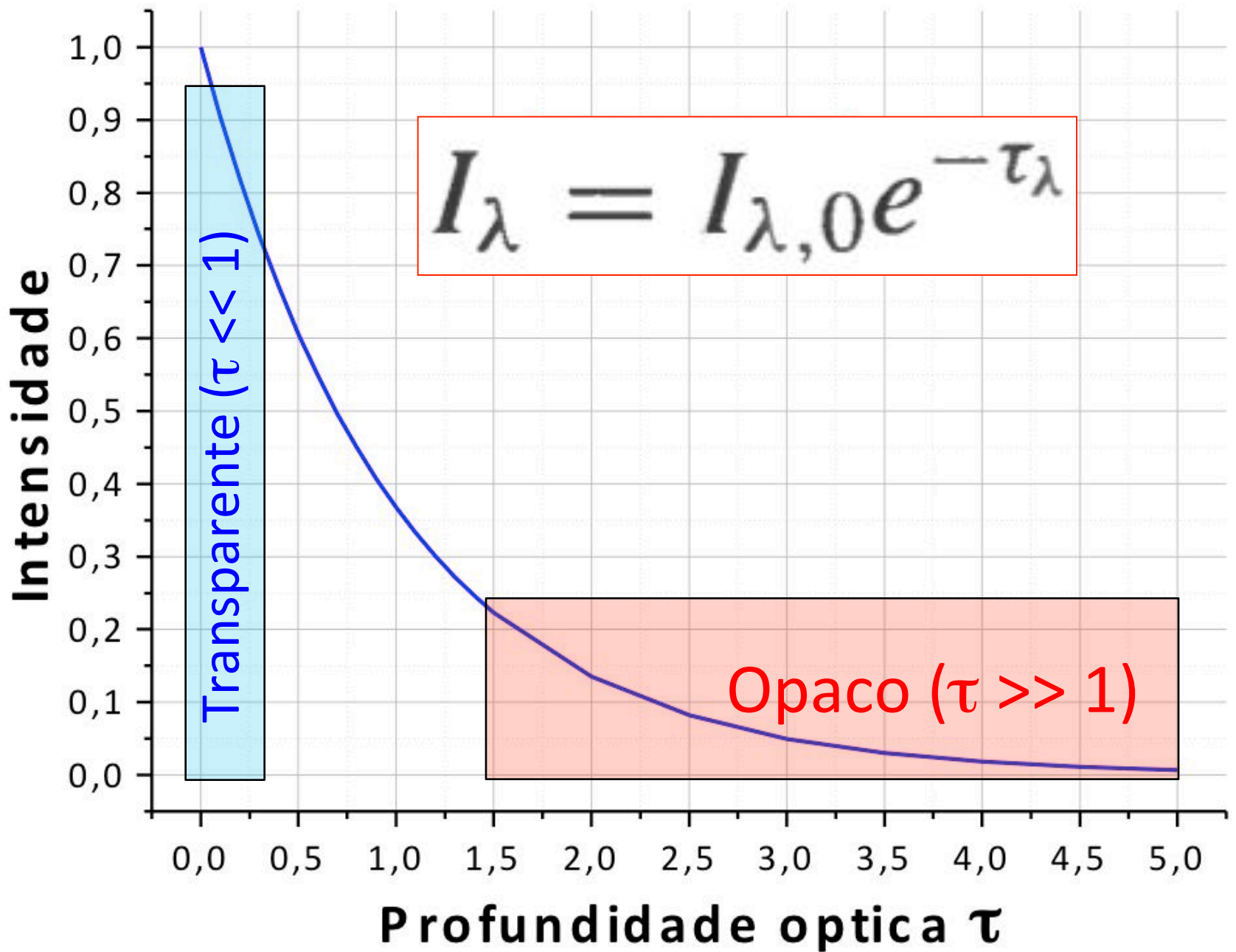
Considerando  $\tau_{\lambda,0} = 0$  para  $s=0$ , a profundidade ótica na posição  $s$ :

$$\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\int_0^s \kappa_\lambda \rho ds}$$

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda}$$





$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda}}$$

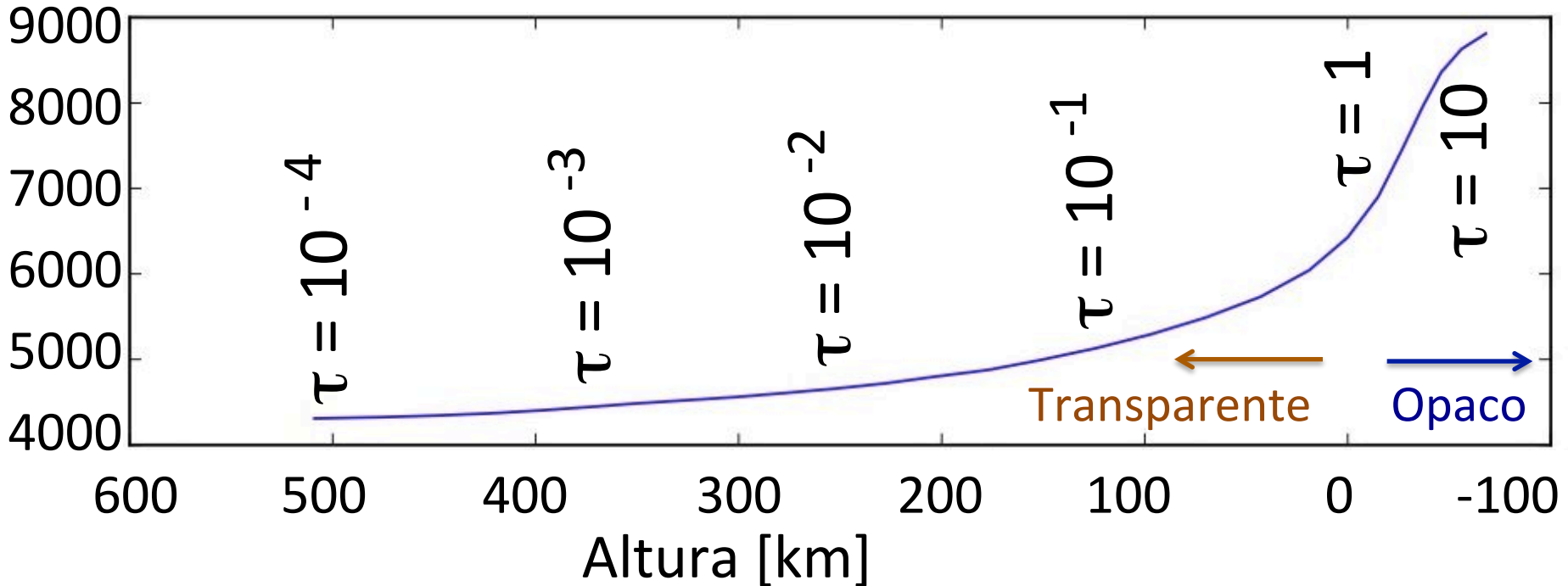


“Superfície” do Sol,  $\tau \sim 1$

$\tau \ll 1$ : opticamente fino  
(transparente)

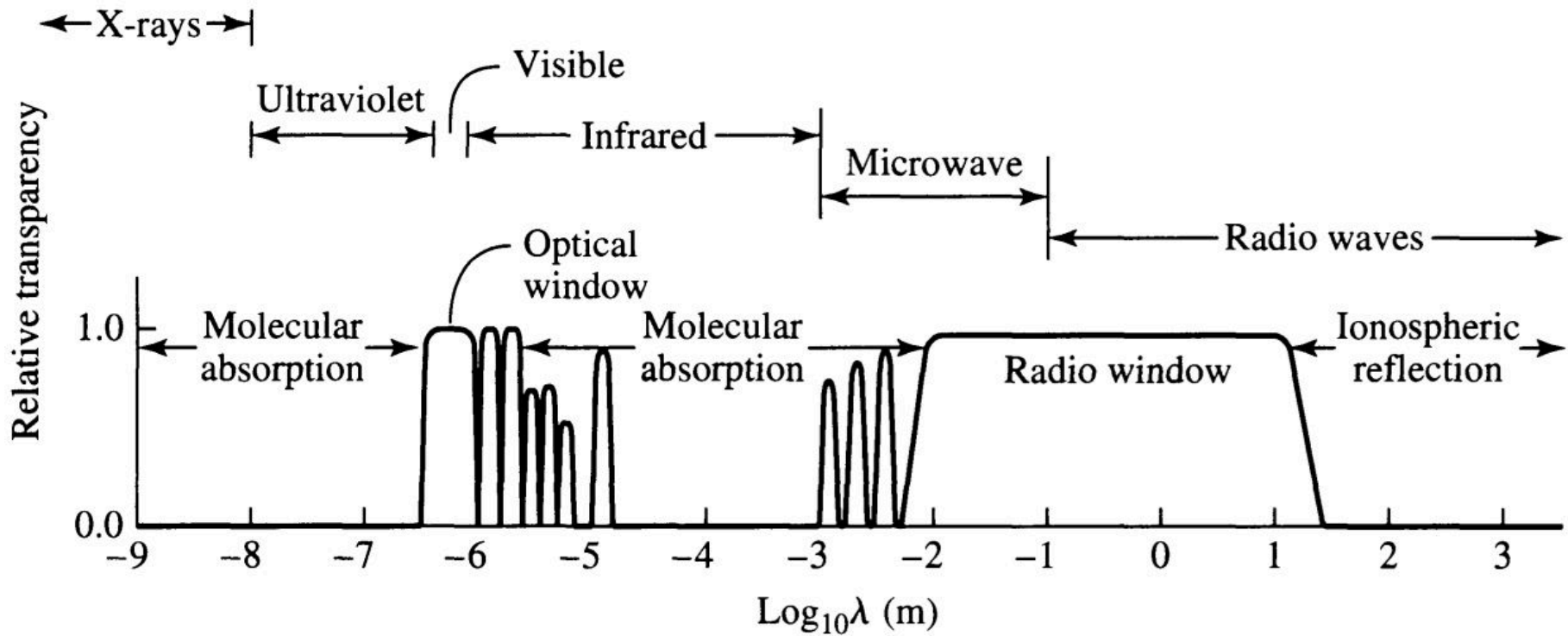
$\tau \gg 1$ : opticamente espesso  
(opaco)

Temperatura [K]





# Profundidade óptica $\tau_\lambda$ varia com $\lambda$ . Exemplo, a atmosfera terrestre



**FIGURE 6.25** The transparency of Earth's atmosphere as a function of wavelength.

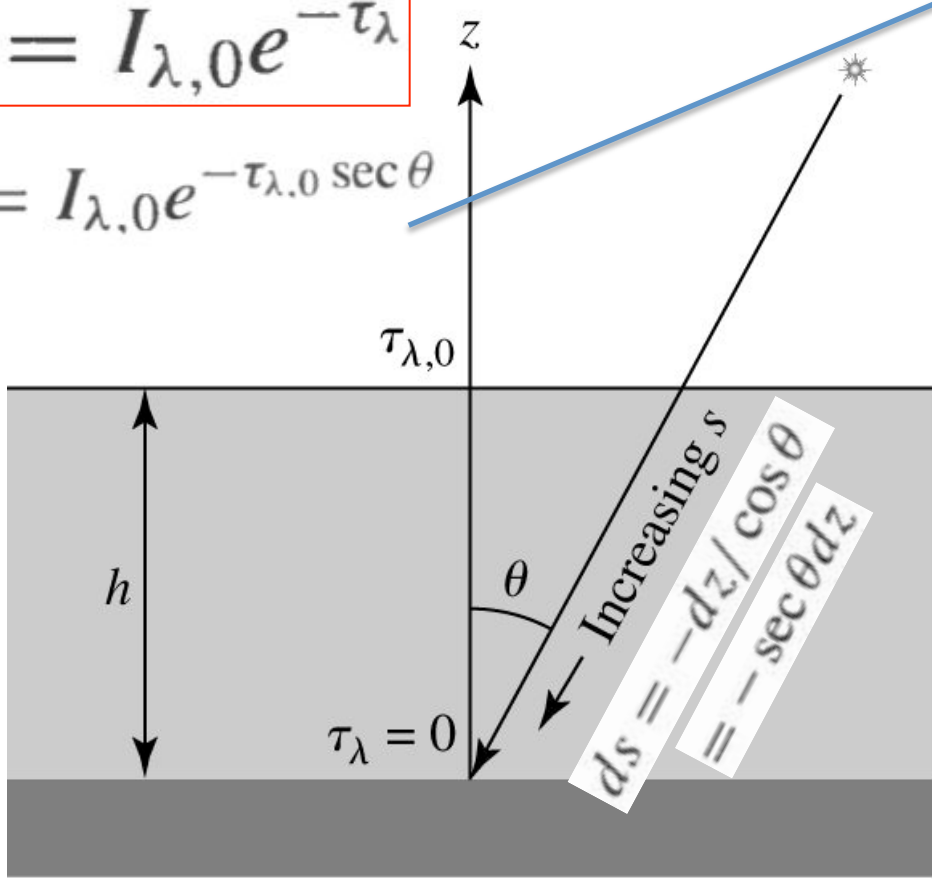
# Exemplo 9.2.3. Absorção pela atmosfera terrestre

$$\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds = - \int_h^0 \kappa_\lambda \rho \frac{dz}{\cos \theta} = \sec \theta \int_0^h \kappa_\lambda \rho dz = \tau_{\lambda,0} \sec \theta$$

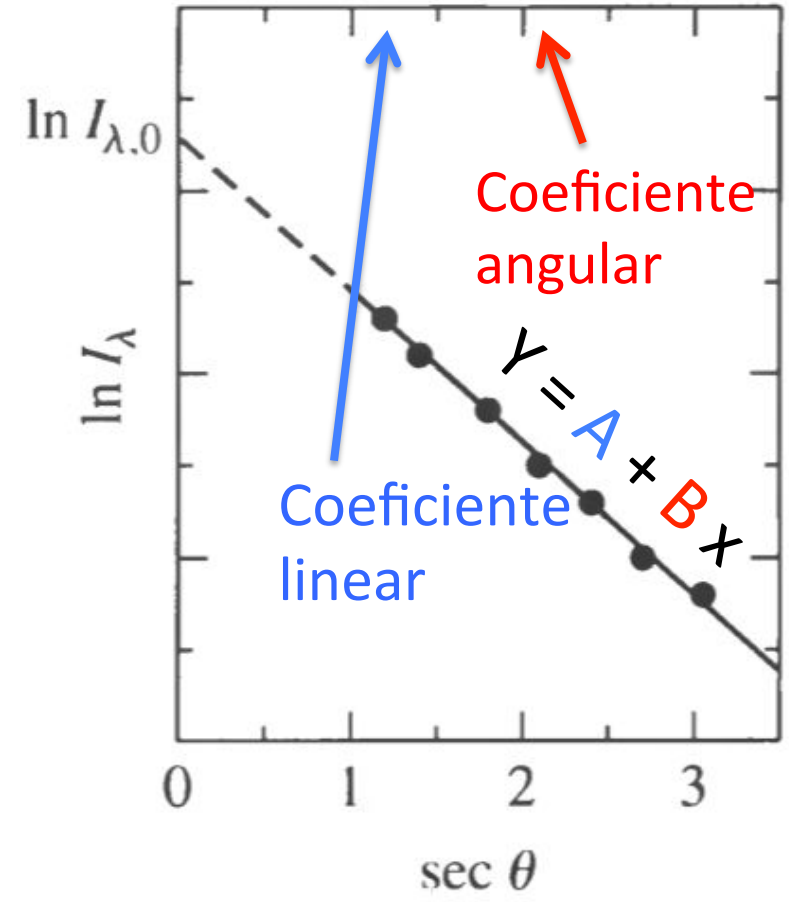
$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda}$$

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0} \sec \theta}$$

$$\ln I_\lambda = \ln I_{\lambda,0} - \tau_{\lambda,0} \sec \theta$$



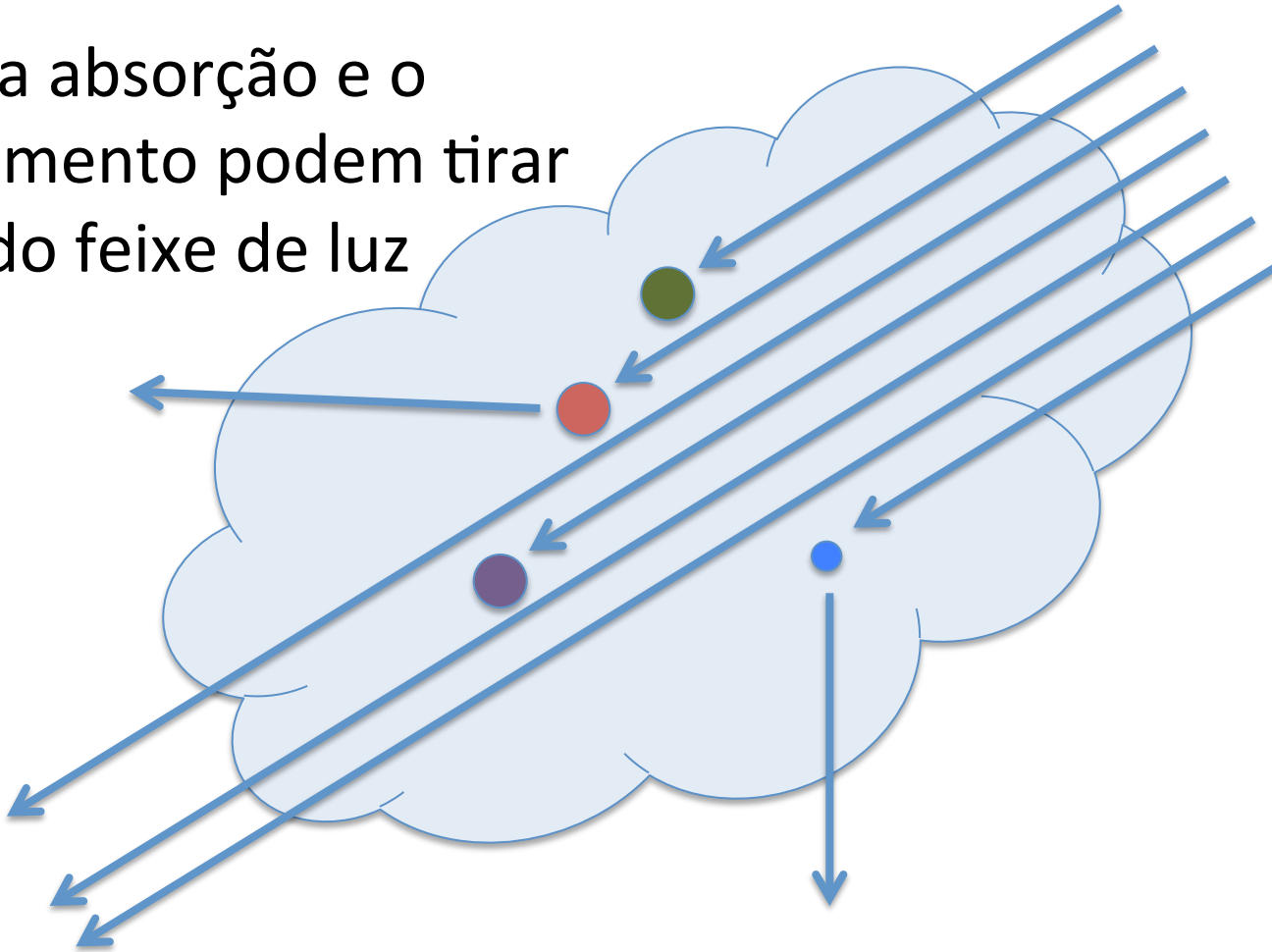
(a)



# Fontes de opacidade

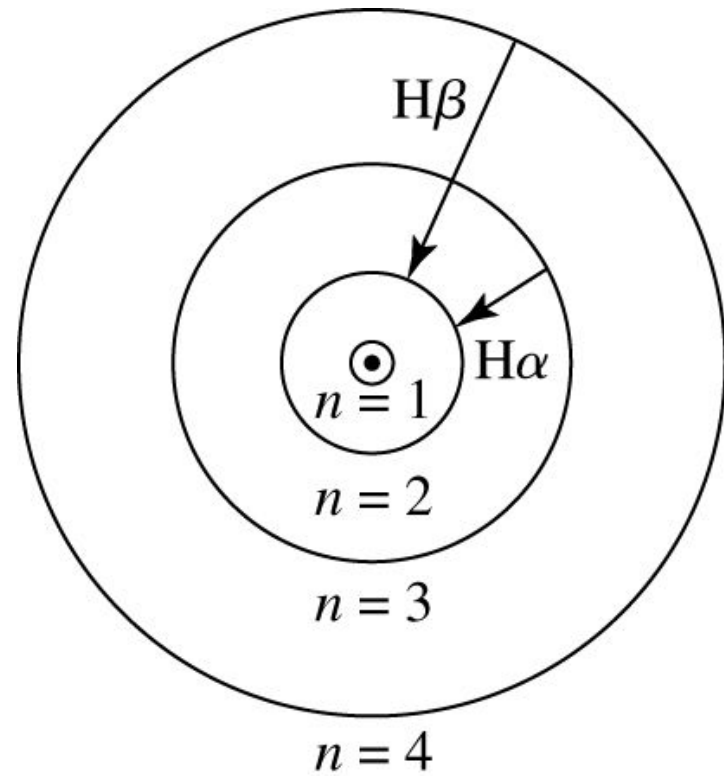
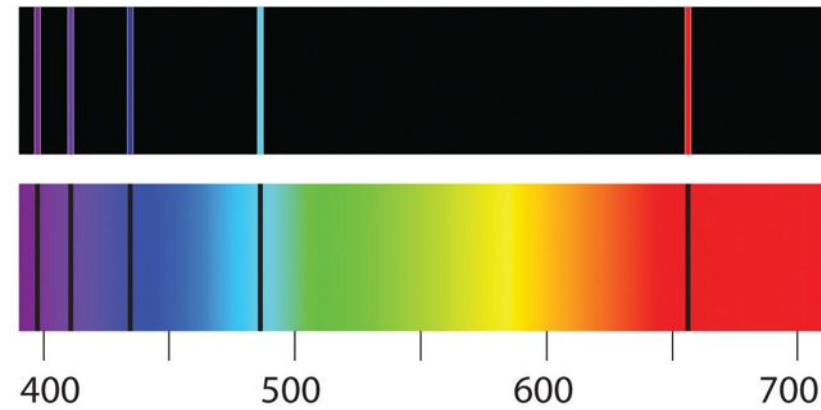
Devido à interação de fótons com átomos, íons, e-

Ambos a absorção e o espalhamento podem tirar fótons do feixe de luz

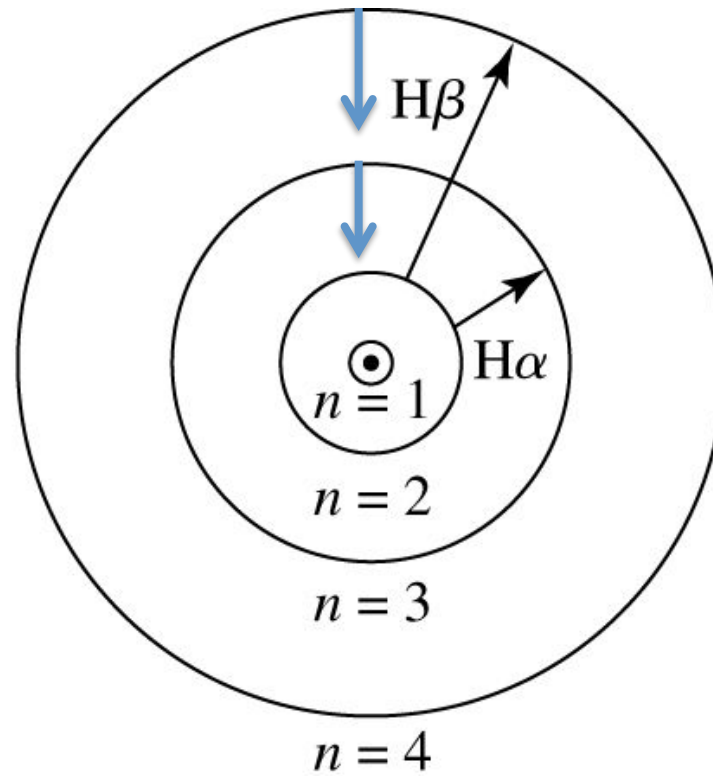


# Fontes de opacidade: Transições ligado-ligado

(a) emissão, (b) absorção



(a)



(b)

Diminuição da energia média dos fótons: em alguns casos é absorvido 1 fóton mas podem ser emitidos 2

Átomo de hidrogênio

# Fonte de opacidade: absorção ligado-livre

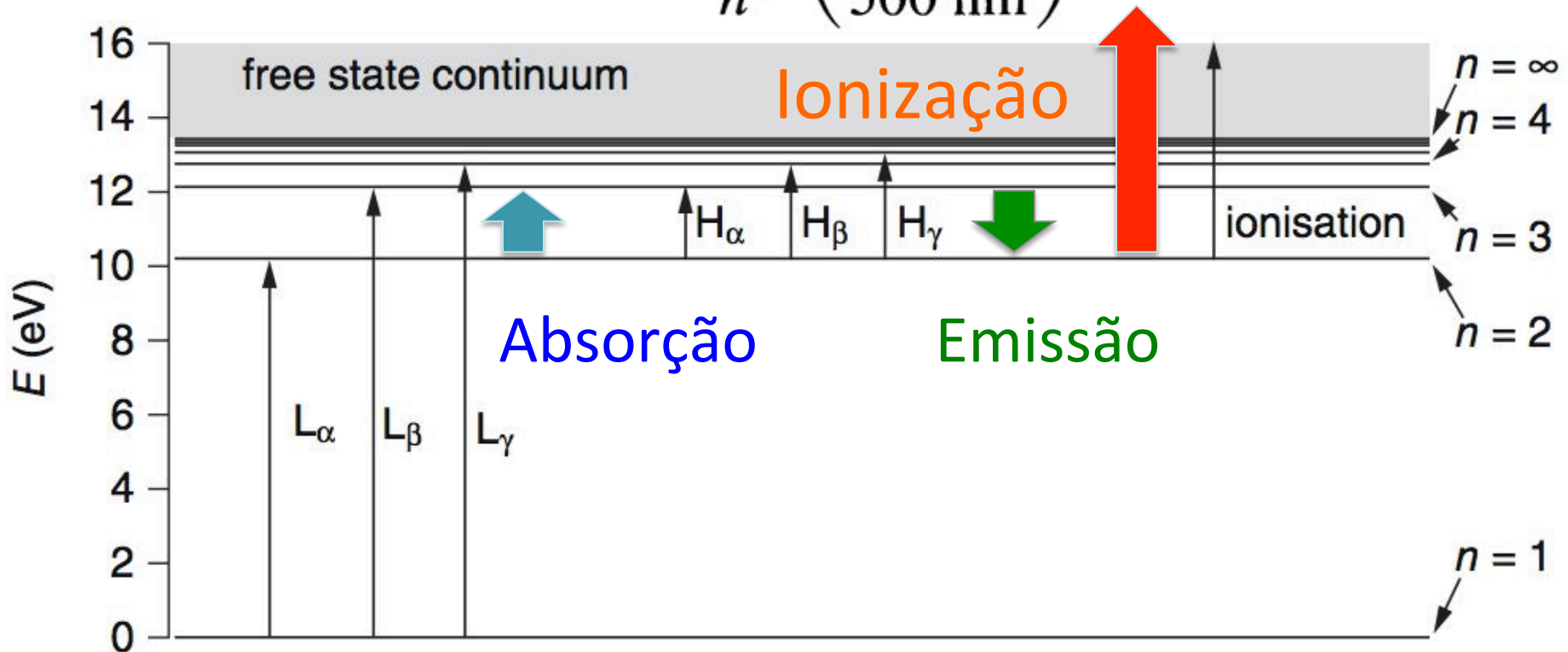
Também conhecida como ionização

Elétrons podem ser removidos por fótons com comprimento:

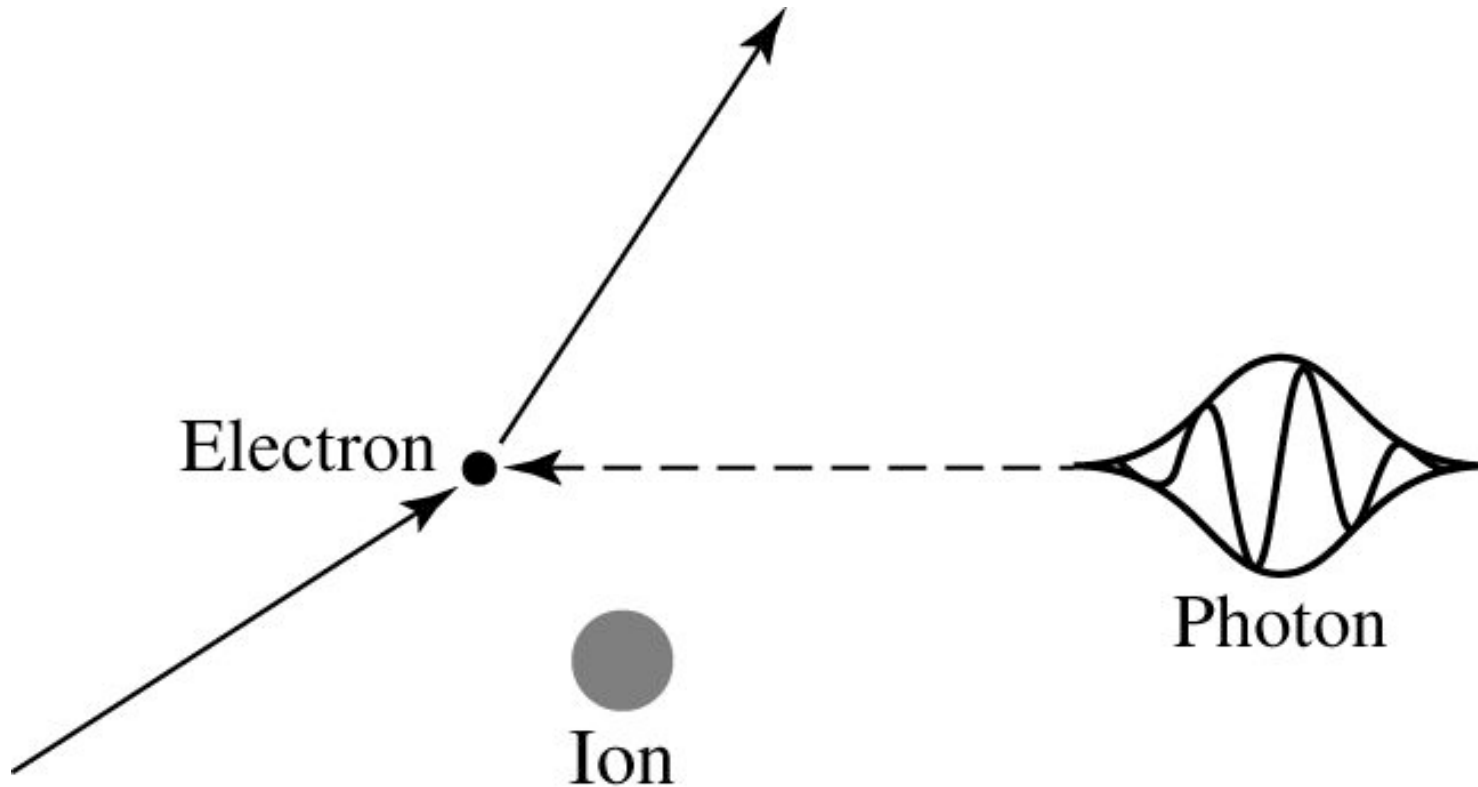
$$\lambda \leq hc/\chi_n$$

$\chi_n$  : energia de ionização do nível n

Para H:  $\sigma_{bf} = 1.31 \times 10^{-19} \frac{1}{n^5} \left( \frac{\lambda}{500 \text{ nm}} \right)^3 \text{ m}^2$



Fonte de opacidade: **absorção livre-livre**  
e- livre na vizinhança de 1 íon pode absorver um fóton



Processo inverso: e- passando perto de um íon pode emitir um fóton (***Bremsstrahlung***)

# Fonte de opacidade: **espalhamento de e-**

Fóton é espalhado por um e- livre. Também é conhecido como espalhamento Thomson, com seção de choque:

$$\sigma_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$$

É aproximadamente 2 bilhões de vezes menor à seção de choque para fotoionização ( $\sigma_{bf}$ ) → apenas importante quando existem muitos e- (estrelas quentes)

A photon may also be scattered by an electron that is loosely bound to an atomic nucleus. This result is called *Compton scattering* if the photon's wavelength is much smaller than the atom or *Rayleigh scattering* if the photon's wavelength is much larger. Compton scattering is usually lumped together with Thomson scattering.

Seção de choque do espalhamento Rayleigh é proporcional a  $1/\lambda^4$

# Descontinuidade de Balmer

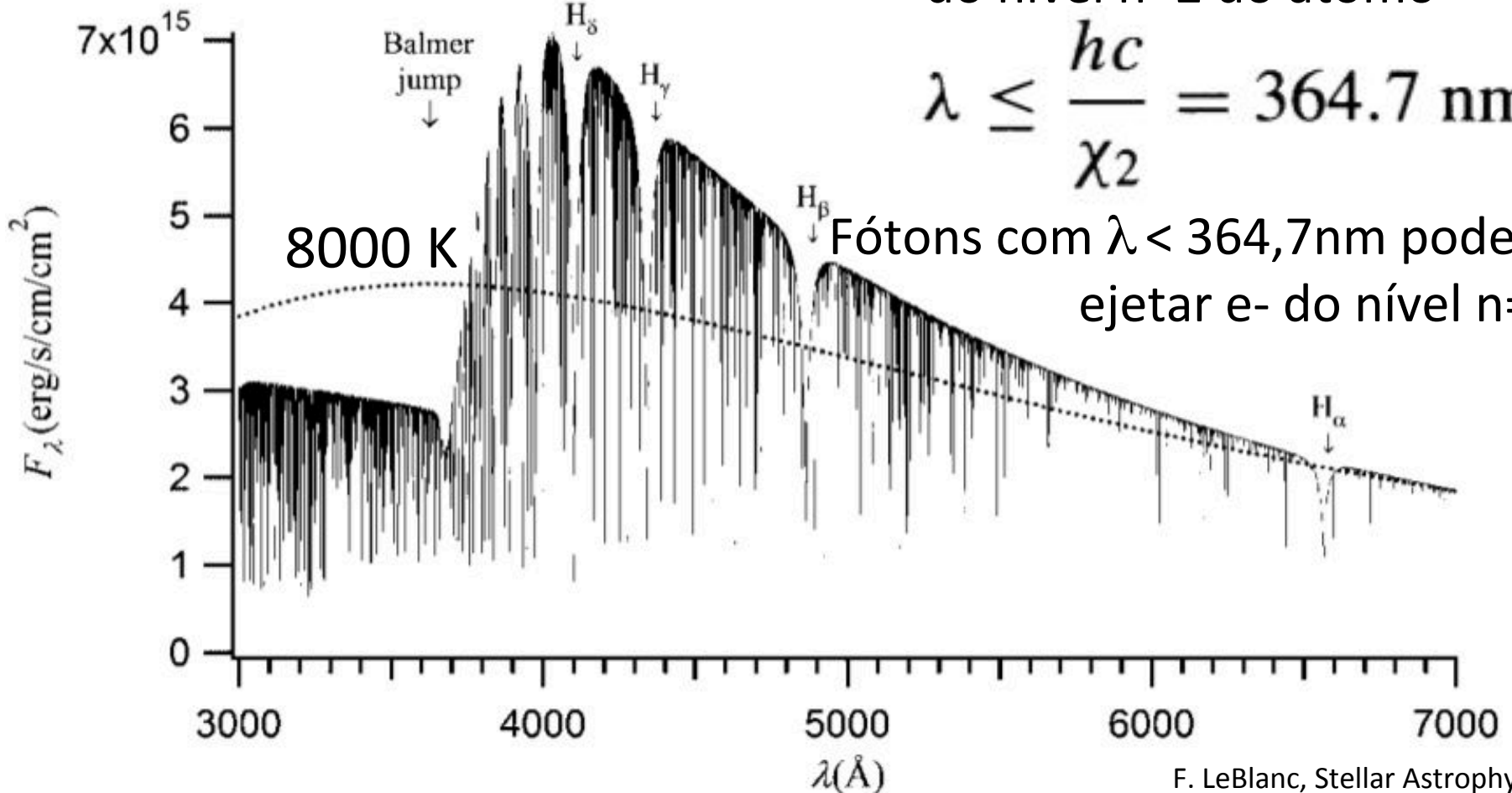
**Example 9.2.4.** The energy of an electron in the  $n = 2$  orbit of a hydrogen atom is given by Eq. (5.14):

$$E_2 = -\frac{13.6}{2^2} \text{ eV} = -3.40 \text{ eV}$$

Fóton deve ter no mínimo  $\chi_2 = 3,40 \text{ eV}$  para ejetar e- do nível  $n=2$  do átomo

$$\lambda \leq \frac{hc}{\chi_2} = 364.7 \text{ nm}$$

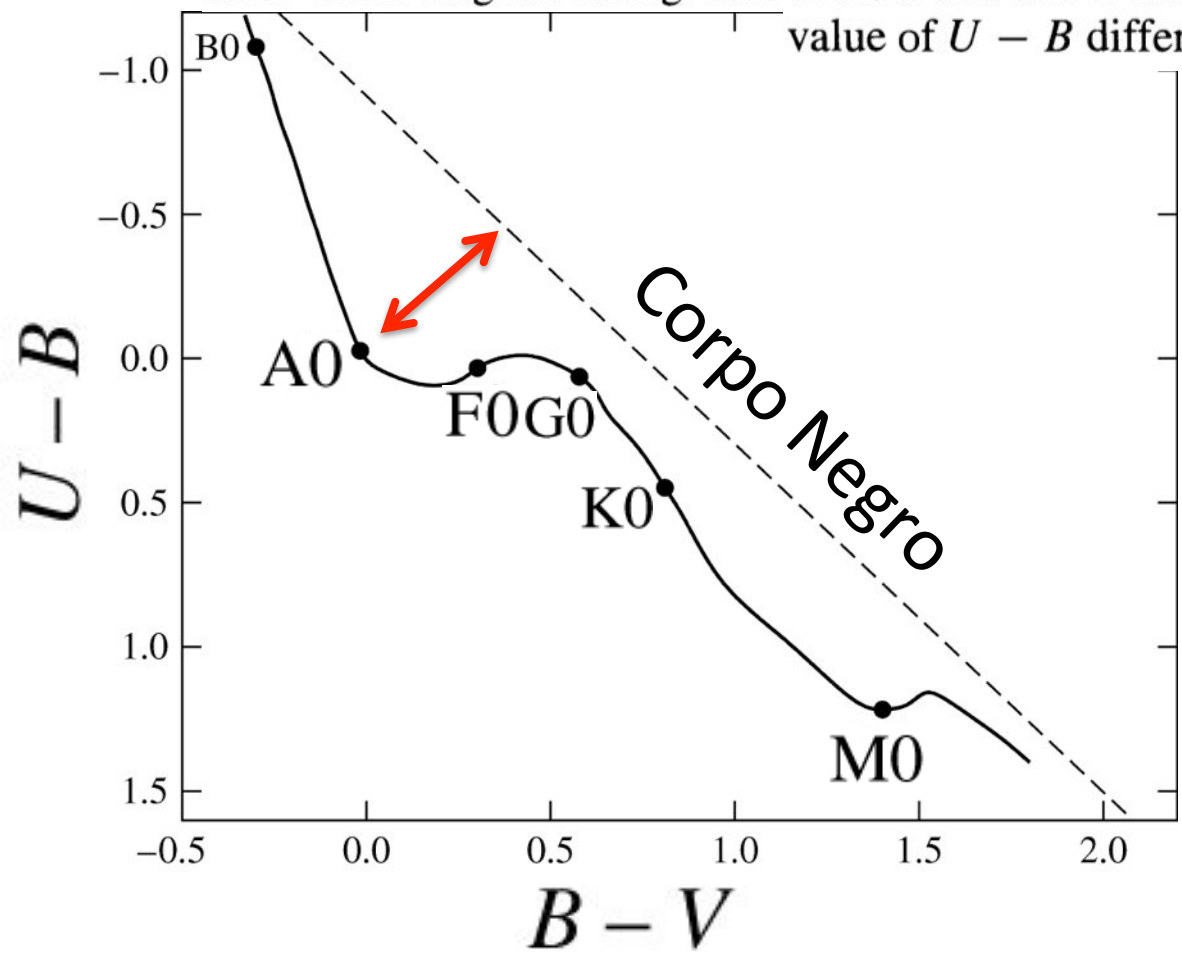
Fótons com  $\lambda < 364,7 \text{ nm}$  podem ejetar e- do nível  $n=2$





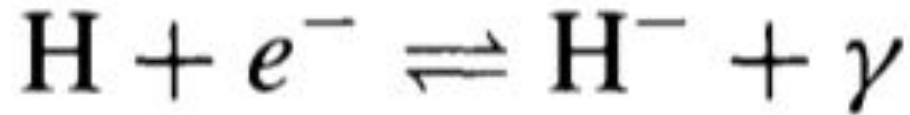
The wavelength 364.7 nm is right in the middle of the bandwidth of the ultraviolet ( $U$ ) filter in the  $UBV$  system, described on page 75. As a result, the Balmer jump will tend to decrease the amount of light received in the bandwidth of the  $U$  filter and so *increase* both the ultraviolet magnitude  $U$  and the color index ( $U - B$ ) observed for a star. This effect will be strongest when  $N_2/N_{\text{total}}$ , the fraction of all hydrogen atoms that are in the first excited state, is a maximum. From Example 8.1.4, this occurs at a temperature of 9600 K, about the temperature of an A0 star on the main sequence. A careful examination of the color-color diagram in Fig. 3.11 reveals that this is indeed the spectral type at which the

value of  $U - B$  differs most from its blackbody value.



# Opacidade do contínuo e o íon $H^-$

- Energia de ligação do segundo  $e^-$  : 0,754 eV
- Corresponde a  $\lambda = 1640$  nm, ou seja, fótons com  $\lambda < 1640$  nm podem remover o  $e^-$  do  $H^-$  (ligado-livre)

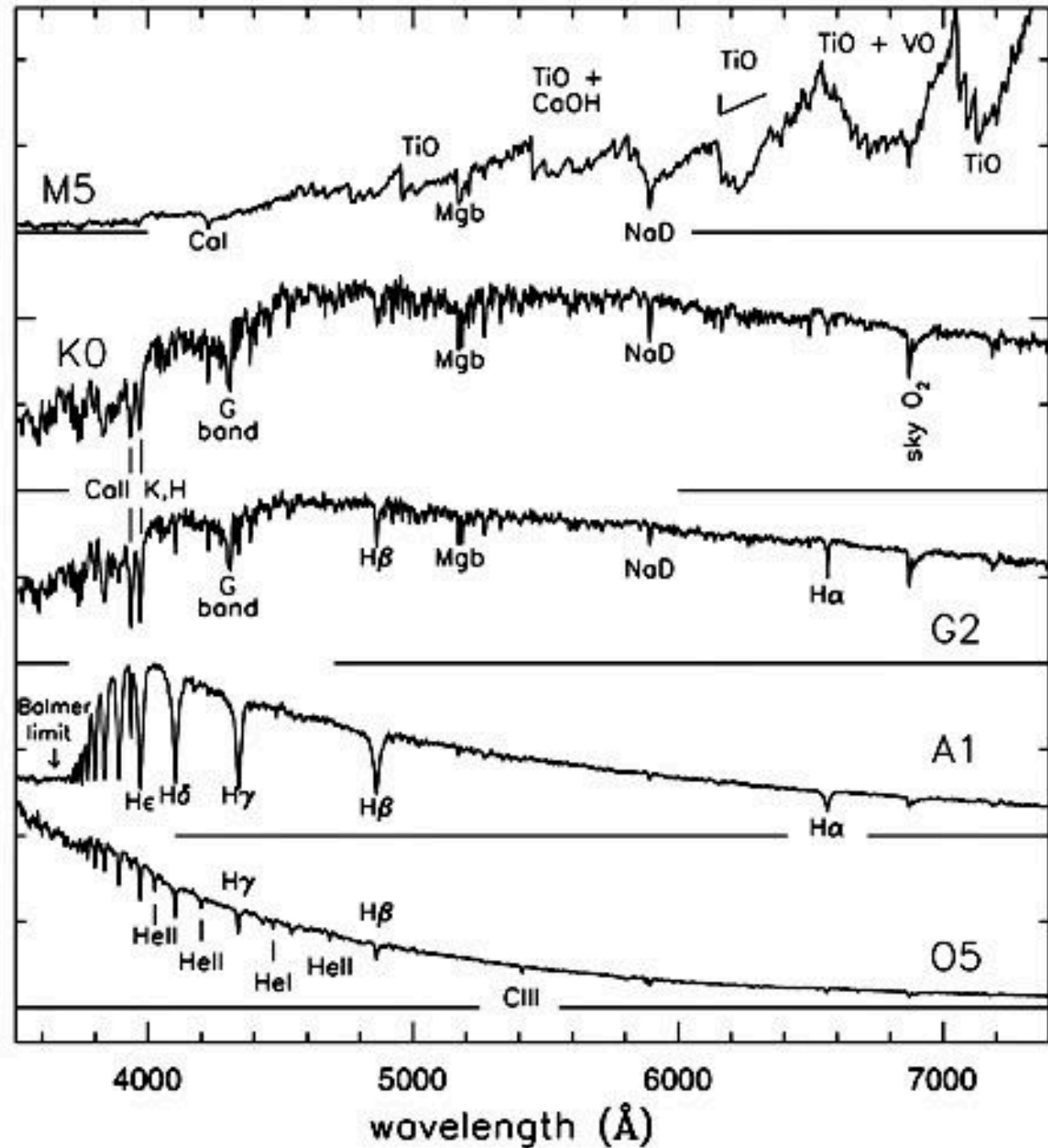


- Para  $\lambda > 1640$  nm podemos ter absorção livre-livre do  $H^-$
- $H^-$  é importante para estrelas mais frias que F0

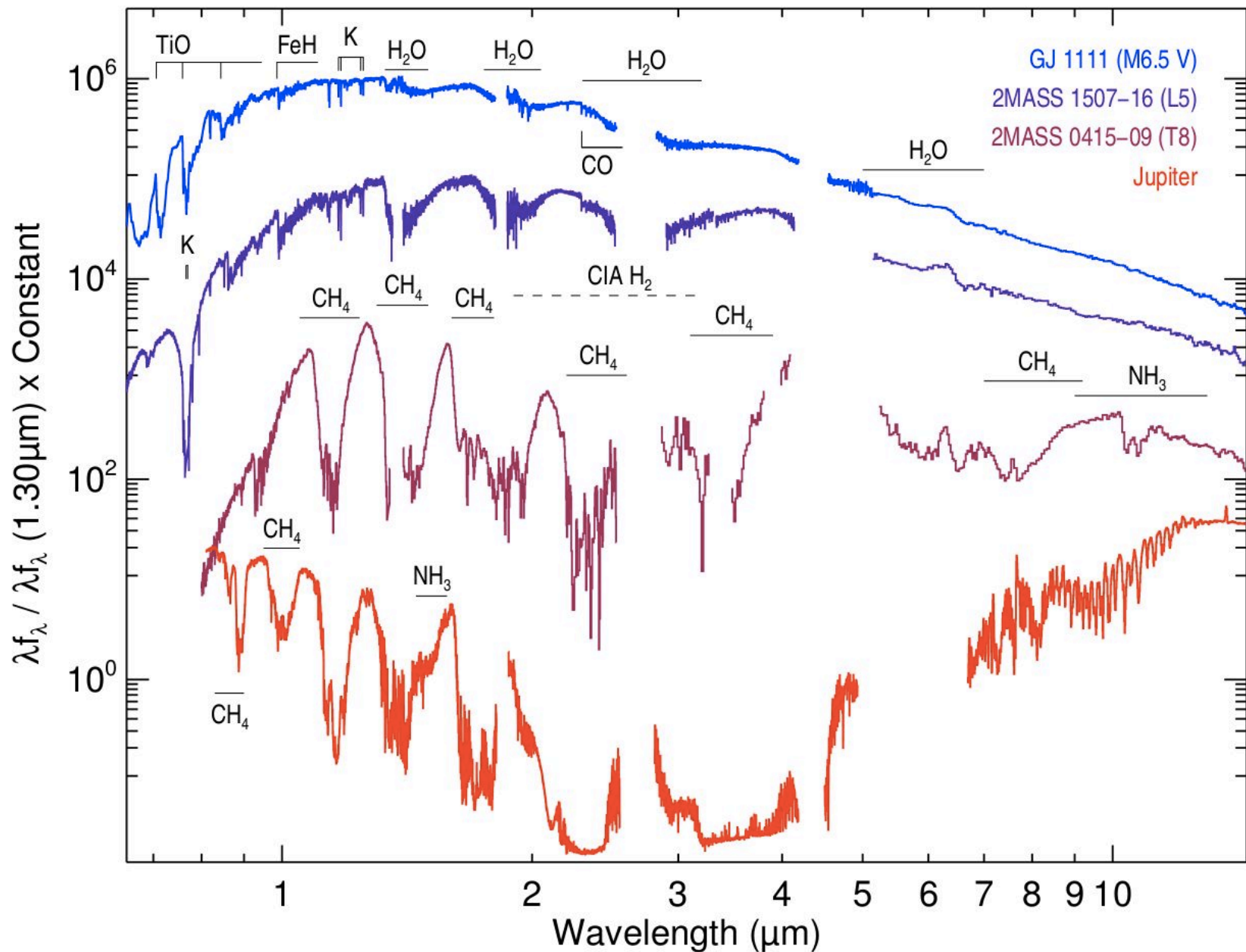
A baixas temperaturas (estrelas M) também temos moléculas:

- Absorção ligado-ligado
- foto-dissociação das moléculas

flux  $F_\lambda$  (arbitrary units)




# Moléculas dominam Anãs M, Anãs Marrons e Planetas




# Opacidade total

$$\kappa_{\lambda} = \kappa_{\lambda,bb} + \kappa_{\lambda,bf} + \kappa_{\lambda,ff} + \kappa_{es} + \kappa_{H^{-}}$$


Bound-bound  
(ligado-ligado)




Bound-free  
(ligado-livre)




free-free  
(livre-livre)



Electron  
scattering  
(espalhamento  
de e-)



H- opacity  
(opacidade H-)



# Opacidade média de Rosseland

Às vezes é interessante ter um valor médio da opacidade

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}$$

$$\bar{\kappa}_{\text{bf}} = 4.34 \times 10^{21} \frac{g_{\text{bf}}}{t} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

$$\bar{\kappa}_{\text{ff}} = 3.68 \times 10^{18} g_{\text{ff}} (1 - Z)(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

where  $\rho$  is the density (in  $\text{kg m}^{-3}$ ) and  $T$  is the temperature (in kelvins).  $X$  and  $Z$  are the **mass fractions**, or fractional abundances (by mass), of hydrogen and metals, respectively.<sup>17</sup>

The **Gaunt factors**,  $g_{\text{bf}}$  and  $g_{\text{ff}}$ , are quantum-mechanical correction terms

$t$  = guillotine factor

# Abundâncias em fração de massa

$$X \equiv \frac{\text{total mass of hydrogen}}{\text{total mass of gas}}$$

$$Y \equiv \frac{\text{total mass of helium}}{\text{total mass of gas}}$$

$$Z \equiv \frac{\text{total mass of metals}}{\text{total mass of gas}}.$$

$$X + Y + Z = 1$$

$$\bar{\kappa}_{es} = 0.02(1 + X) \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

An estimate of the contribution to the mean opacity provided by the  $\text{H}^-$  ion may also be included over the temperature range  $3000 \text{ K} \leq T \leq 6000 \text{ K}$  and for densities between  $10^{-7} \text{ kg m}^{-3} \leq \rho \leq 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$  when  $X \sim 0.7$  and  $0.001 < Z < 0.03$  (the values of  $X$  and  $Z$  are typical of main-sequence stars). Specifically,

$$\bar{\kappa}_{\text{H}^-} \approx 7.9 \times 10^{-34} (Z/0.02) \rho^{1/2} T^9 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

A opacidade média de Rosseland é a média das opacidades:

$$\bar{\kappa} = \overline{\kappa_{bb} + \kappa_{bf} + \kappa_{ff} + \kappa_{es} + \kappa_{\text{H}^-}}$$

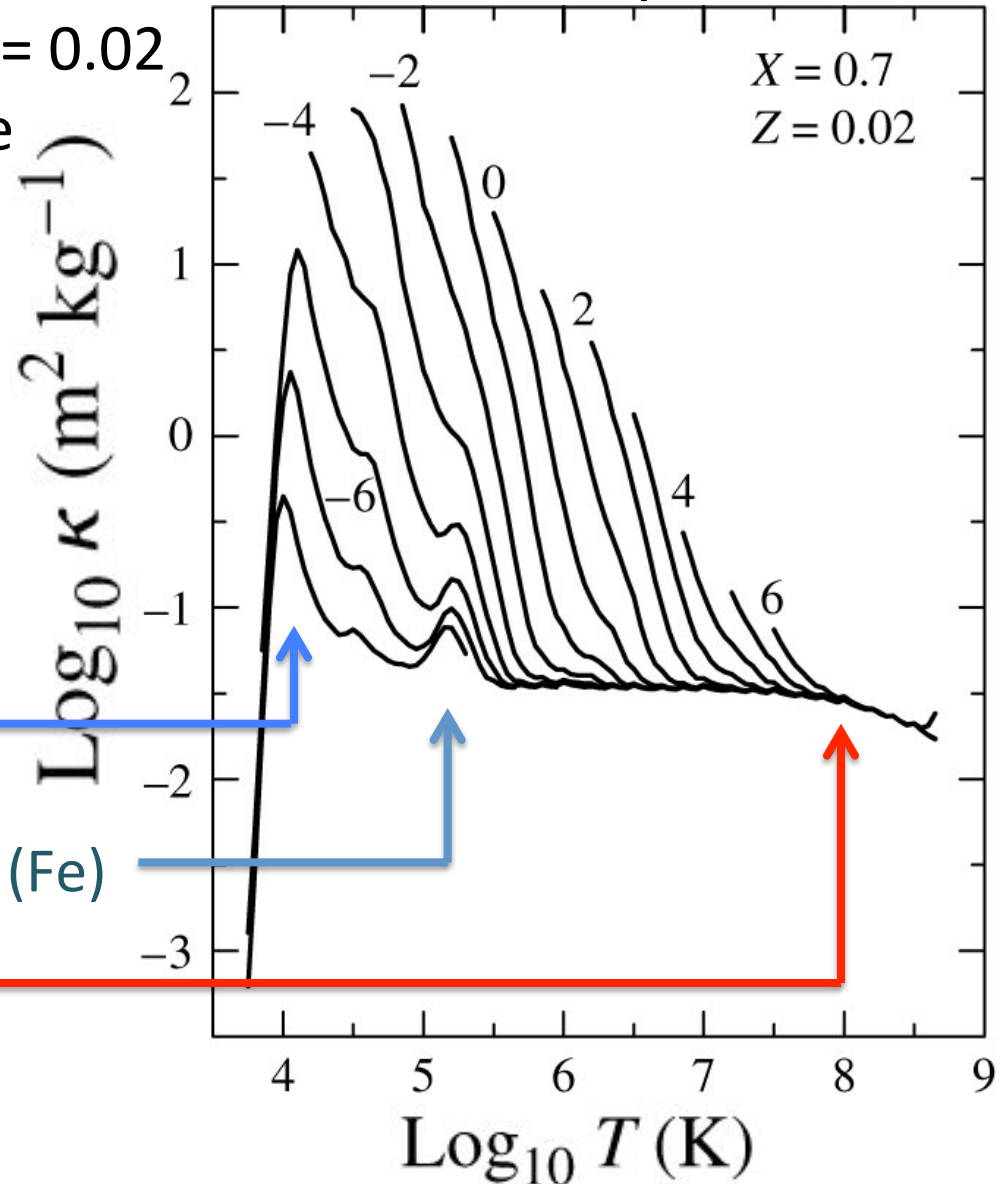


# Opacidade média de Rosseland, calculada para uma

composição com  $X = 0.7$  e  $Z = 0.02$

Cada curva é uma densidade  $\log(\rho)$  diferente

- Para uma determinada temperatura, a opacidade aumenta para densidades maiores
- O 1º máximo é devido à ionização do H e He
- O 2º máximo é devido à ionização de alguns metais (Fe)
- A altíssimas temperaturas domina espalhamento e-



**FIGURE 9.10** Rosseland mean opacity for a composition that is 70% hydrogen, 28% helium, and 2% metals by mass. The curves are labeled by the logarithmic value of the density ( $\log_{10} \rho$  in  $\text{kg m}^{-3}$ ).