

PME 3230

Escoamento Viscoso em Condutos

- Características Gerais
- Escoamento laminar
- Noções de camada limite

Alberto Hernandez Neto

Introdução:

- Objeto de estudo: escoamentos viscosos e incompressíveis em tubos (circulares) e dutos (não circulares)
- Aplicações: oleodutos, sistemas de distribuição de água, sistema vascular e respiratório, sistemas de ar condicionado
- Componentes de uma tubulação: tubos (que podem ter diferentes diâmetros), conexões, dispositivos de controle de vazão, medidores, bombas, turbinas, etc.



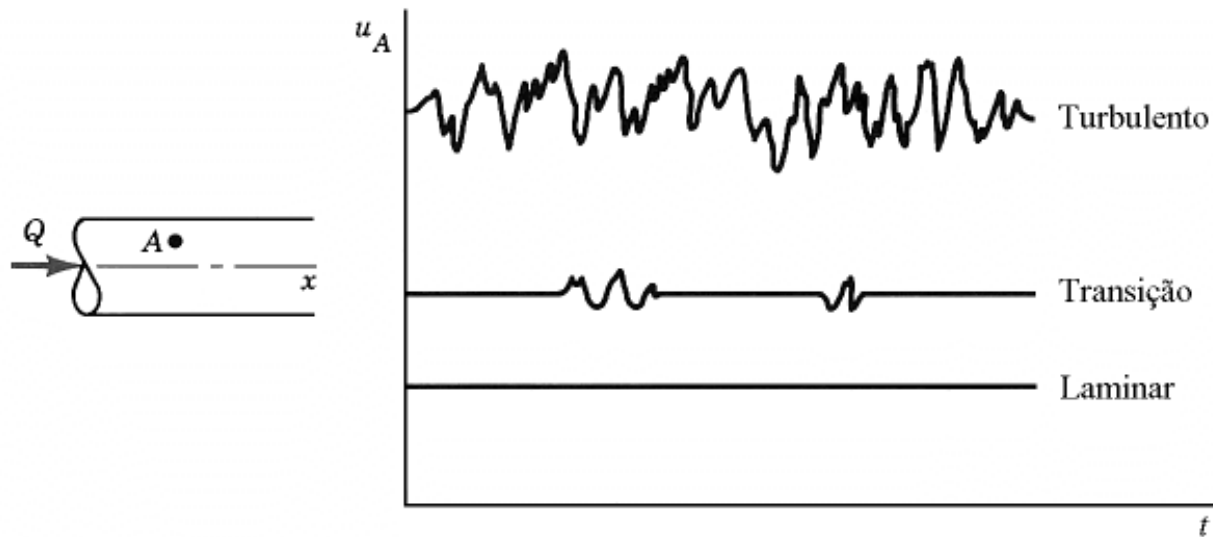
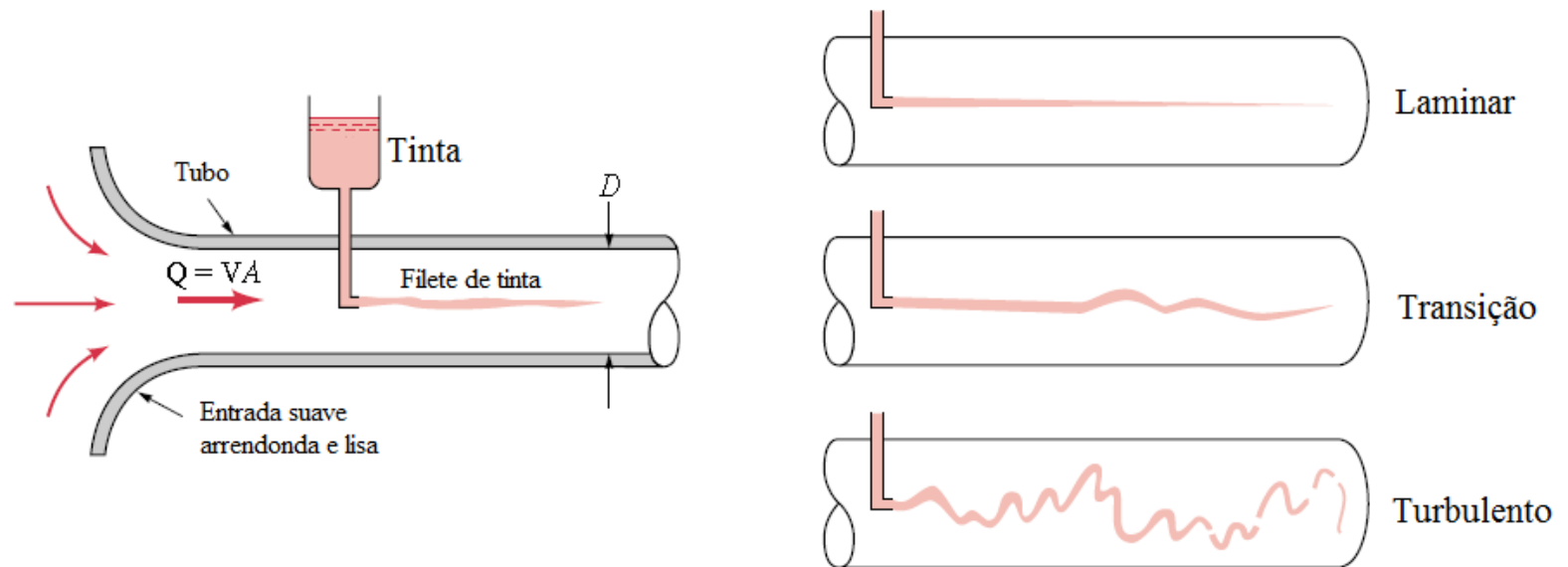




Características Gerais do escoamento laminar e turbulento



Características Gerais do escoamento laminar e turbulento



Características Gerais do escoamento laminar e turbulento

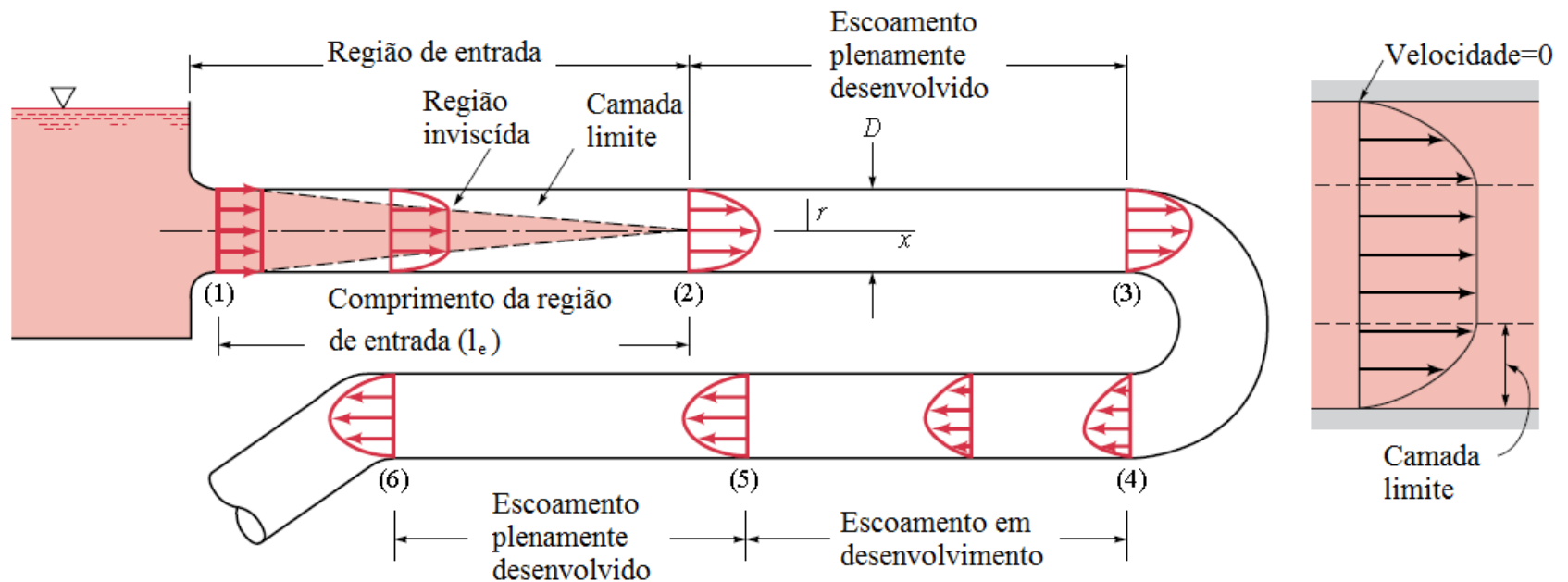
- Escoamento turbulento: velocidade apresenta flutuações aleatórias
- Parâmetro importante no escoamento viscoso em condutos: número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$$

Para cálculos de engenharia:

- $\text{Re} \leq 2100 \rightarrow$ escoamento laminar
- $2100 \leq \text{Re} \leq 4000 \rightarrow$ escoamento de transição
- $\text{Re} > 4000 \rightarrow$ escoamento turbulento

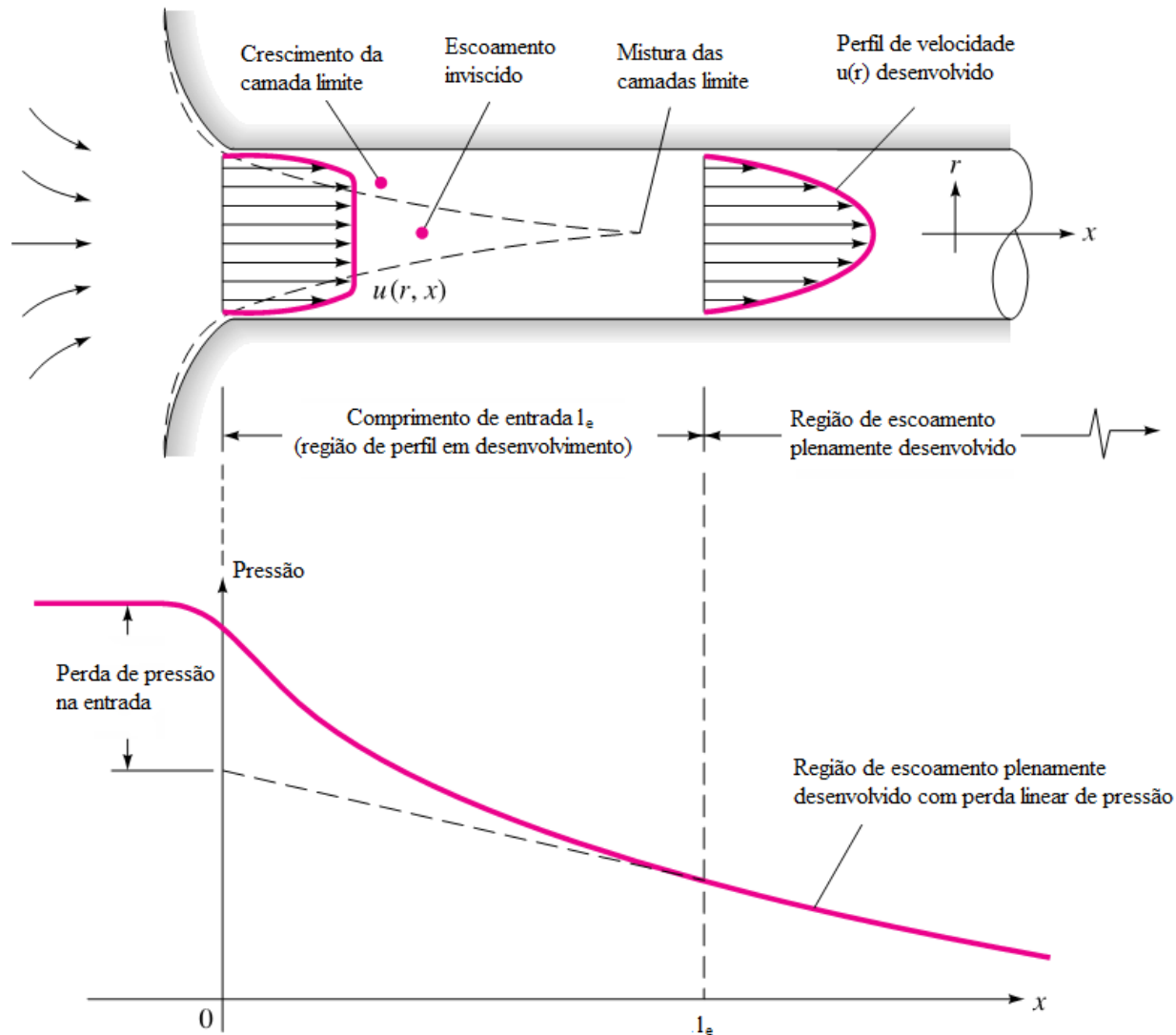
Características gerais: Região de entrada e escoamento completamente desenvolvido



Características gerais: Região de entrada e escoamento completamente desenvolvido

- Região de entrada: região do escoamento próxima da seção de alimentação.
- Escoamento plenamente (ou completamente) desenvolvido (E.P.D.): perfil de velocidades não muda com a distância longitudinal (eixo x).
- Comprimento da região de entrada l_e :
 - $l_e = 0,06 * Re * D$, para escoamento laminar
 - $l_e = 4,4 * (Re)^{1/6} D$, para escoamento turbulento

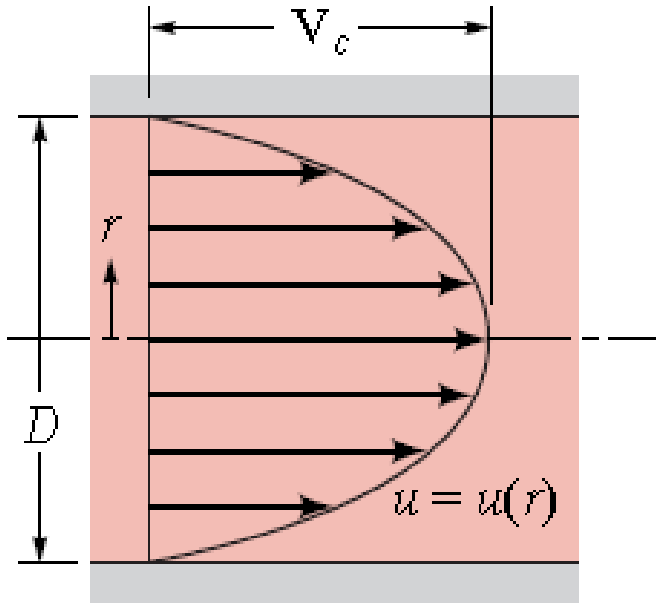
Características gerais: Tensão de cisalhamento e pressão



Características gerais: Tensão de cisalhamento e pressão

- Escoamento plenamente desenvolvido: forças de pressão são equilibradas pelas forças viscosas
- Escoamento não é plenamente desenvolvido: forças de inércia não são desprezíveis
- Tubo não é horizontal: força peso é relevante
- Efeitos viscosos fazem com que o gradiente de pressão não seja nulo.

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

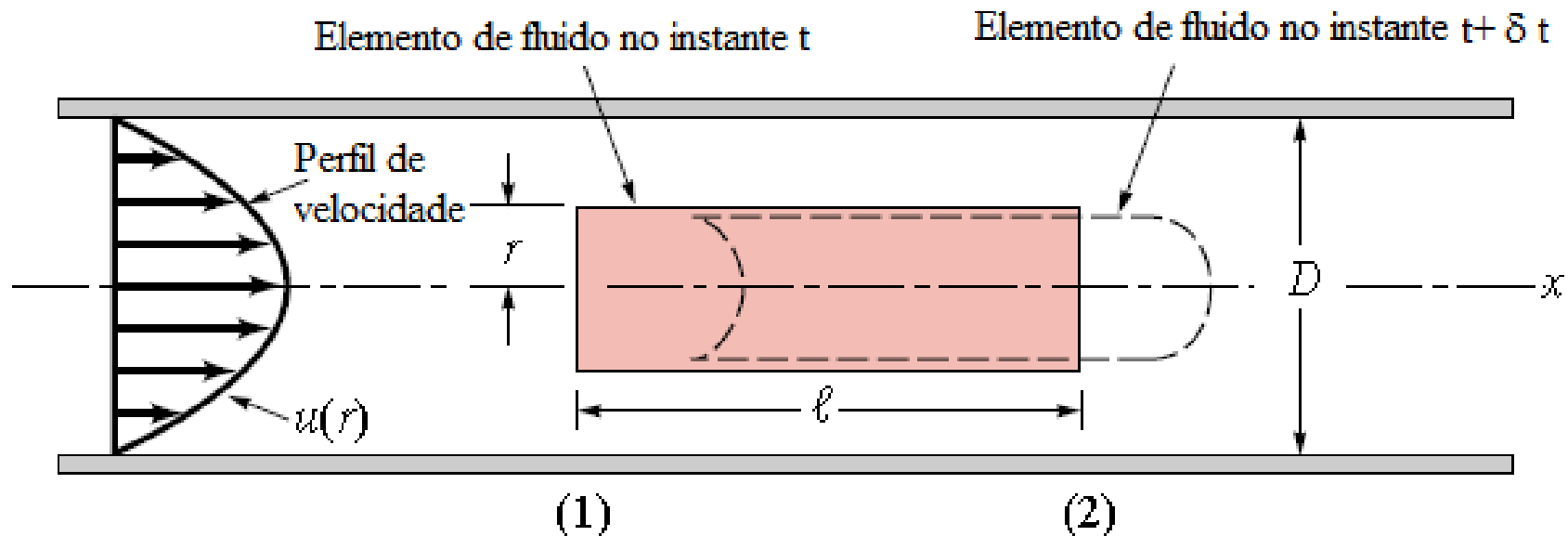


Hipóteses:

- Escoamento em trechos retos de tubulação
- Escoamento laminar plenamente desenvolvido
- Regime permanente
- Fluido Newtoniano
- Efeitos gravitacionais desprezados

$$u(r) = V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] \quad \text{sendo:} \quad V_c = \frac{\Delta p D^2}{16 \mu l}$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

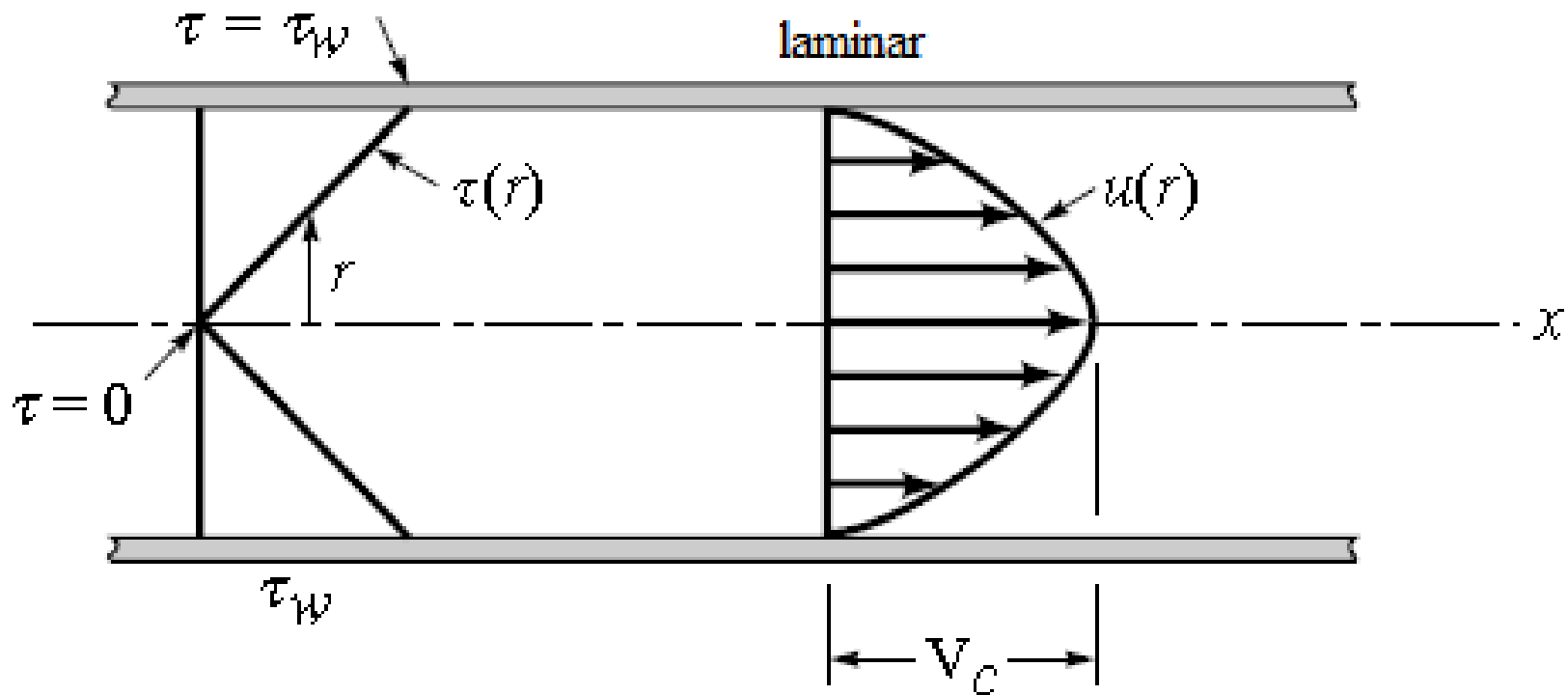


$$p_2 = p_1 - \Delta p; \Delta p > 0$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

Distribuição da
tensão de cisalhamento

Perfil de escoamento
laminar



- Efeitos gravitacionais desprezados: pressão constante ao longo da seção vertical
- Pressão varia ao longo da tubulação

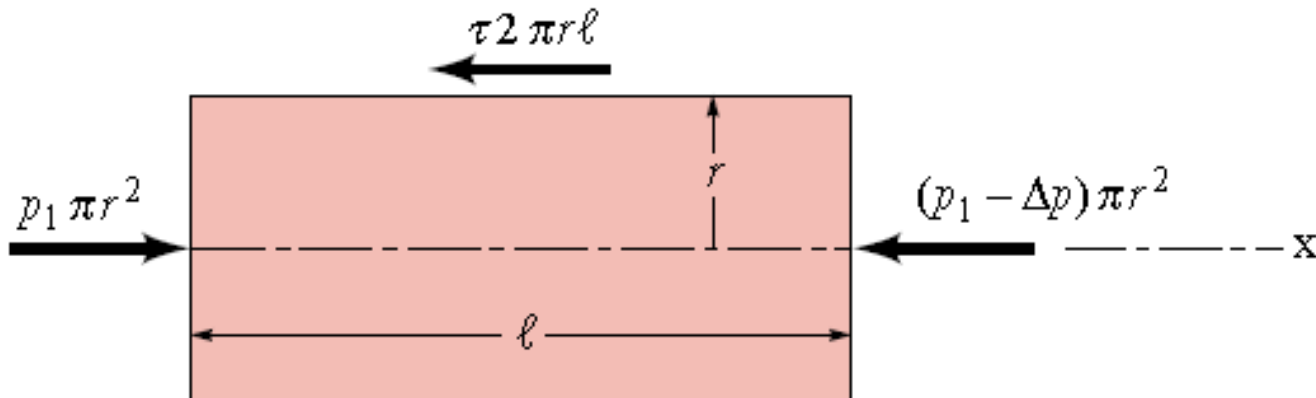
Escoamento laminar plenamente desenvolvido

2ª Lei de Newton: $\sum F_x = ma_x$

Sem aceleração no escoamento do fluido: $a_x = 0$

Camadas de fluido mais lentas exercem sobre o volume de controle uma força devido a tensão de cisalhamento:

$$F_{\text{cisalhamento}} = \tau^*(2\pi r l)$$



Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$\sum F_x = 0$$

$$p_1 * (\pi r^2) - (p_1 - \Delta p) * (\pi r^2) - \tau * (2\pi r l) = 0$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

$$\left. \frac{\Delta p}{l} \right\} \text{ não depende de } r \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{2\tau}{r}}_{\tau = Cr} \text{ não depende de } r$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$\tau = Cr$$

Condições de contorno:

- para $r=0 \rightarrow \tau=0$
- para $r=D/2 \rightarrow \tau = \tau_w$ (tensão de cisalhamento na parede)

$$\tau_w = C \frac{D}{2}$$

Logo:

$$C = \frac{2\tau_w}{D} \Rightarrow \tau = \frac{2\tau_w}{D} r$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{2\tau_w}{D} r \\ \frac{\Delta p}{l} &= \frac{2\tau}{r} \end{aligned} \right\} \Delta p = \frac{4l\tau_w}{D}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &< 0 \quad (\text{velocidade decresce com } r) \\ \tau &> 0 \\ \tau &= \mu \frac{du}{dr} \quad (\text{Fluido newtoniano}) \end{aligned} \right\} \tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{2\tau_w}{D} r \\ \tau &= -\mu \frac{du}{dr} \\ \tau_w &= \frac{\Delta p D}{4l} \end{aligned} \right\} \underbrace{-\mu \frac{du}{dr} = \frac{2\tau_w}{D} r \Rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{2\tau_w}{\mu D} r}_{\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right) r}$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right)r \Rightarrow du = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right)rdr$$

Integrando:

$$\int du = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right)\int rdr$$

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right)\frac{r^2}{2} + C_1 = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)r^2 + C_1$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)r^2 + C_1$$

Como para $r=D/2 \rightarrow u=0$:

$$0 = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)\left(\frac{D}{2}\right)^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$$

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)r^2 + C_1 = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)r^2 + \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$$

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)r^2 + \frac{\Delta p D^2}{16\mu l} = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l} \left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2 \right] = V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2 \right]$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$u = V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right]$$

Vazão volumétrica (Q)

$$\dot{Q} = \int u dA = \int_{r=0}^{r=R} u(r) 2\pi r dr = \int_0^R V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] 2\pi r dr$$

$$\dot{Q} = 2\pi V_c \int_0^R \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] r dr \Rightarrow \dot{Q} = \frac{\pi R^2 V_c}{2}$$

Escoamento laminar plenamente desenvolvido

Velocidade média:

$$V = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\frac{\pi R^2 V_c}{2}}{\pi R^2} = \frac{V_c}{2} \quad \text{Como: } V_c = \frac{\Delta p D^2}{16 \mu l}$$

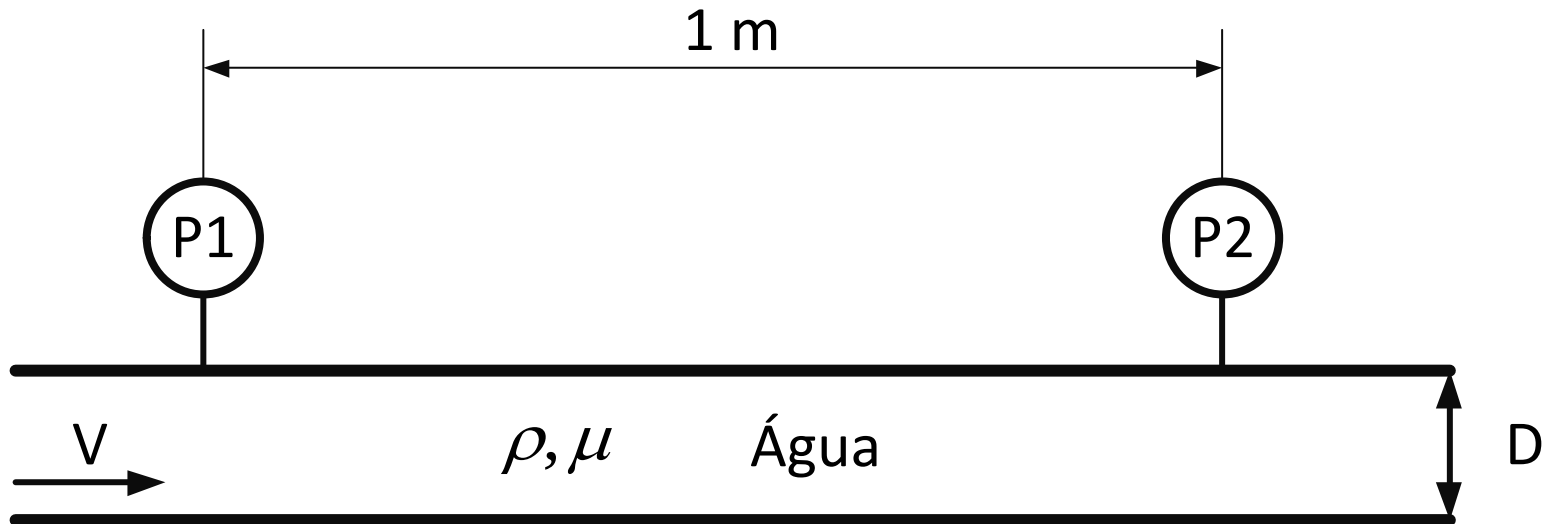
$$V = \frac{V_c}{2} = \frac{\frac{\Delta p D^2}{16 \mu l}}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32 \mu l}$$

Logo:

$$\dot{Q} = \frac{\pi R^2 V_c}{2} = \frac{\pi R^2}{2} \frac{\Delta p D^2}{16 \mu l} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \mu l} \quad (\text{Lei de Poiseuille})$$

Exercício 01

Água escoa em tubo horizontal com 1 mm de diâmetro no qual são colocados dois medidores de pressão separados por uma distância de 1 m. Qual é a perda máxima de pressão que pode ser medida, admitindo que o escoamento seja laminar?



Exercício 01

Para escoamento laminar:

$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \mu l} \Rightarrow \Delta p = \frac{128 \mu l \dot{Q}}{\pi D^4}$$

Para água a 20°C a 101,325 kPa: $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1,002 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$

Temos que:

$$\dot{Q} = VA = V \frac{\pi D^2}{4}$$

Para avaliar a máxima pressão, deve-se avaliar a maior velocidade para escoamento laminar em tubos. Logo: $V_{\max} \rightarrow Re_{\max} = 2100$

Exercício 01

Portanto:

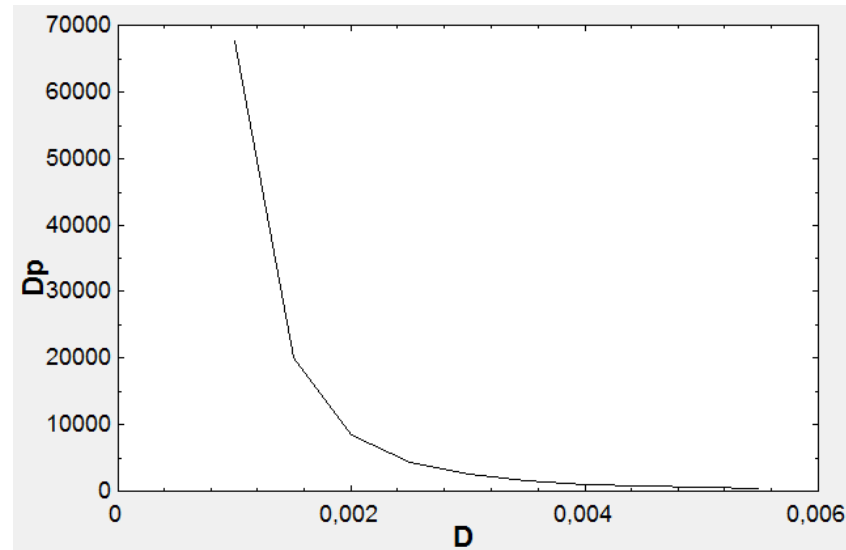
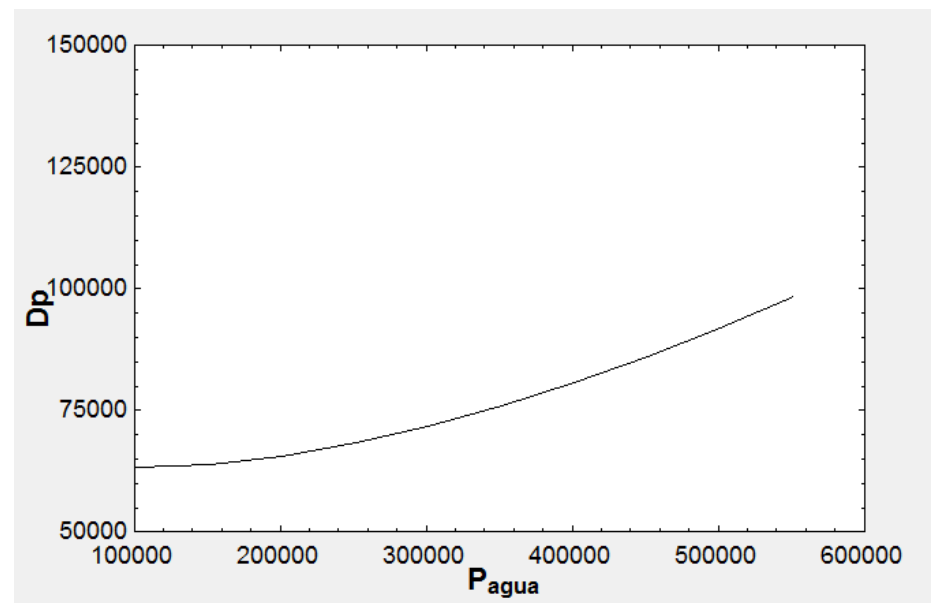
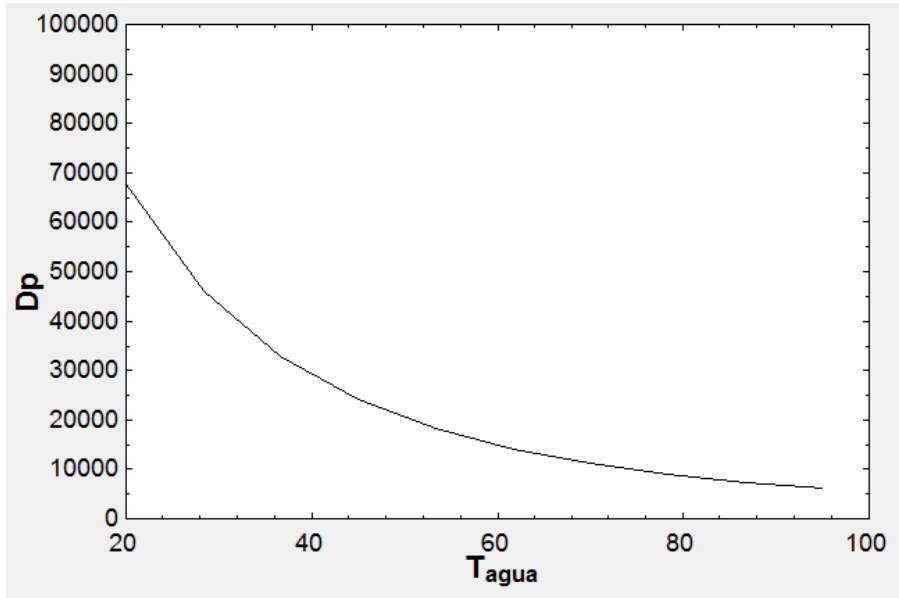
$$\text{Re}_{\max} = 2100 = \frac{\rho V D}{\mu} \Rightarrow V = \frac{2100 \mu}{\rho D} = \frac{2100 * (1,002 \times 10^{-3})}{(998,2)(1 \times 10^{-3})} = 2,11 \text{ m/s}$$

$$\dot{Q} = V \frac{\pi D^2}{4} = 2,11 * \left(\frac{\pi (1 \times 10^{-3})^2}{4} \right) = 1,66 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta p = \frac{128 \mu l \dot{Q}}{\pi D^4} = \frac{128 * (1,002 \times 10^{-3})(1)(1,66 \times 10^{-6})}{\pi (1 \times 10^{-3})^4} = 6,76 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

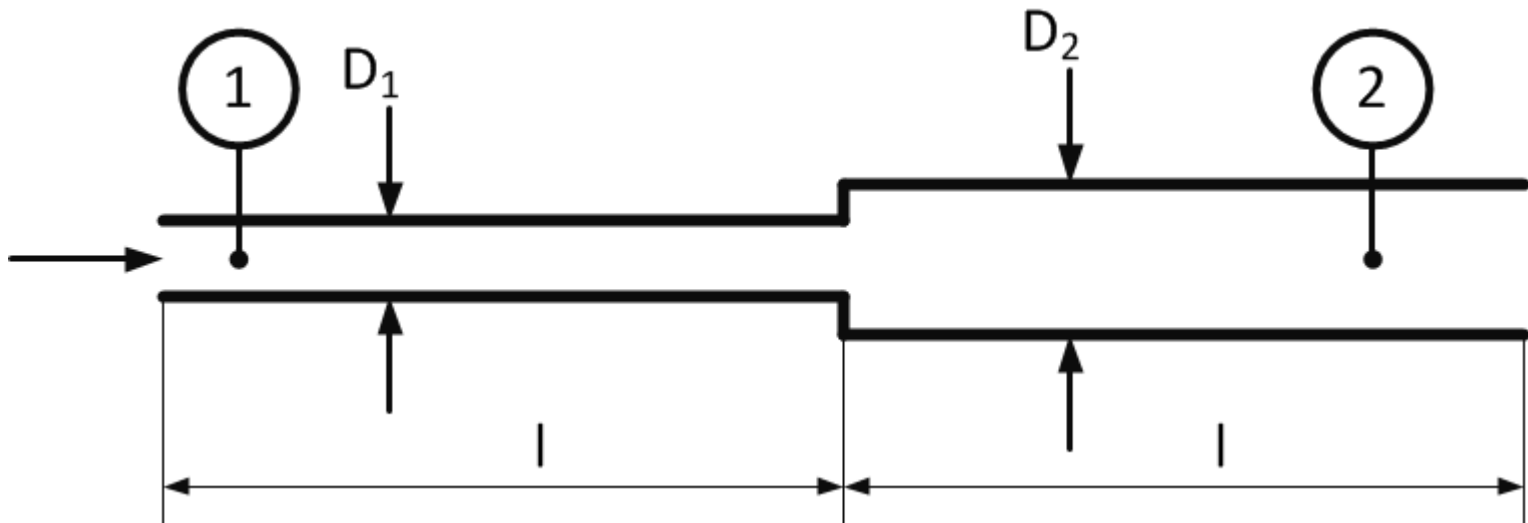
$$\Delta p = 6,76 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 6,76 \times 10^4 \text{ Pa} = 67,6 \text{ kPa}$$

Exercício 01



Exercício 02

Um fluido escoar em dois tubos horizontais de igual comprimento que conectados forma uma tubulação de comprimento $2l$. Pode-se considerar que o escoamento é laminar e plenamente desenvolvido. A perda de pressão no primeiro trecho é 1,24 vezes maior que no segundo trecho. Se o diâmetro do primeiro trecho é D , determine o diâmetro do segundo trecho.



Exercício 02

Realizando o balanço de massa entre os pontos 1 e 2:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Fazendo a hipótese de fluido incompressível e que variações da viscosidade são desprezíveis: $\rho_1 = \rho_2$

$$\mu_1 = \mu_2$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

Sendo escoamento laminar plenamente desenvolvido:

$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \mu l} \Rightarrow \frac{\pi D_1^4 \Delta p_1}{128 \mu_1 l} = \frac{\pi D_2^4 \Delta p_2}{128 \mu_2 l}$$

$$D^4 \Delta p_1 = D_2^4 \Delta p_2 \Rightarrow D_2 = D \left(\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} \right)^{1/4}$$

Exercício 02

Como: $\Delta p_1 = 1,24\Delta p_2$

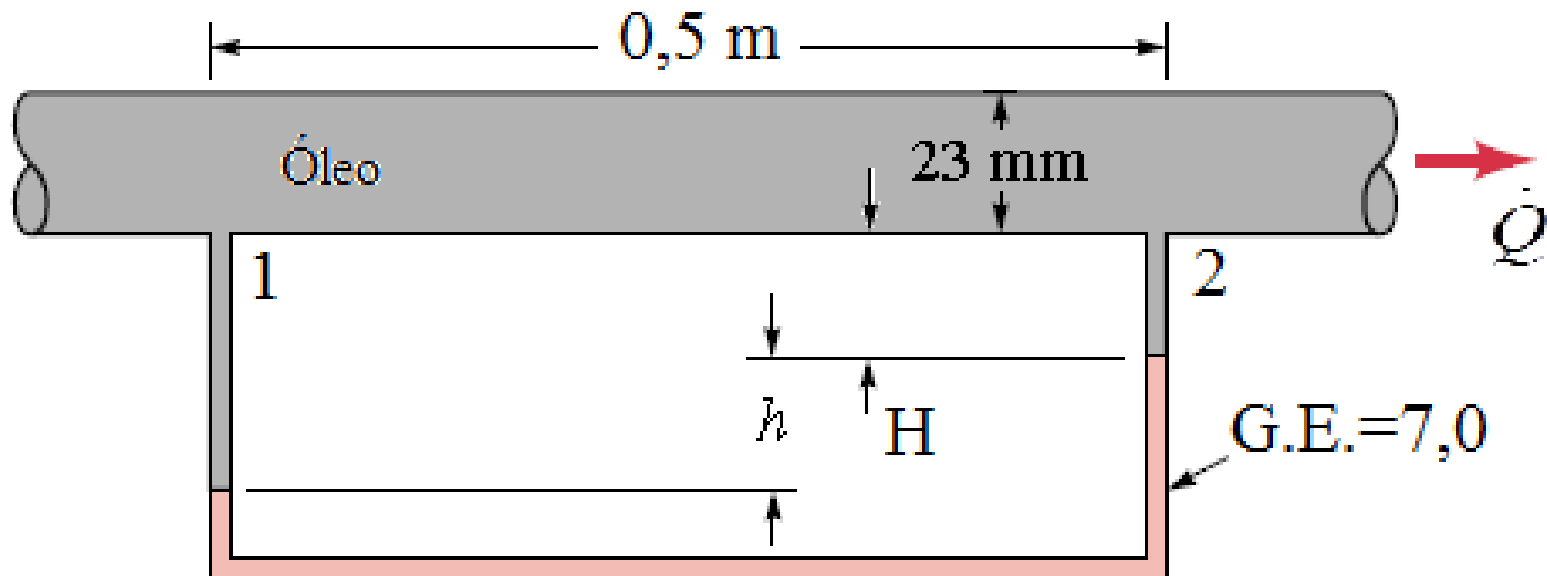
$$D_2 = D \left(\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} \right)^{1/4}$$

$$D_2 = D (1,24)^{1/4}$$

$$D_2 = 1,055D$$

Exercício 03

Óleo (peso específica=8.900 N/m³, viscosidade=0,10 N.s/m²) escoa em um tubo horizontal de diâmetro igual a 23 mm. Um manômetro em U é usado para medir a pressão como mostra a figura abaixo. Determine a faixa de valores de h para a condição de escoamento laminar



Exercício 03

$$h_{\text{mínimo}} = 0 \text{ (sem escoamento)}$$

$$h_{\text{máximo}} \rightarrow \text{Re} = 2100 \text{ (escoamento laminar)}$$

Realizando o equilíbrio de forças no manômetro em U temos:

$$p_1 + \gamma_{\text{óleo}} (H + h) - \gamma_{\text{manômetro}} h - \gamma_{\text{óleo}} H = p_2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\gamma_{\text{manômetro}} - \gamma_{\text{óleo}}) h$$

Sendo escoamento laminar:

$$\Delta p = \frac{128 \mu l \dot{Q}}{\pi D^4}$$

Exercício 03

Como:

$$\dot{Q} = VA = V \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{óleo}} VD}{\mu_{\text{óleo}}} = 2.100 \Rightarrow V = \frac{2.100 \mu_{\text{óleo}}}{\rho_{\text{óleo}} D} = \frac{2.100 * 0,10}{\left(\frac{8.900}{9,81} \right) * 23 \times 10^{-3}} = 10,06 \text{ m/s}$$

$$\dot{Q} = V \frac{\pi D^2}{4} = 10,06 * \frac{\pi (23 \times 10^{-3})^2}{4} = 0,0042 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta p = \frac{128 \mu_{\text{óleo}} l \dot{Q}}{\pi D^4} = \frac{128 * 0,10 * 0,50 * 0,0042}{\pi (23 \times 10^{-3})^4} = 30575 \text{ N/m}^2$$

Exercício 03

Como:

$$\Delta p = (\gamma_{\text{manômetro}} - \gamma_{\text{óleo}}) h$$

$$G.E = \frac{\gamma_{\text{fluido}}}{\gamma_{\text{água}}} \Rightarrow \gamma_{\text{manômetro}} = 7 * \gamma_{\text{água}} = 7 * \rho_{\text{água}} * g$$

$$\gamma_{\text{manômetro}} = 7 * 1000 * 9,81 = 68670 \text{ N/m}^3$$

$$h = \frac{\Delta p}{(\gamma_{\text{manômetro}} - \gamma_{\text{óleo}})} = \frac{30575}{(68670 - 8900)} = 0,51m$$

$$\therefore 0 \leq h \leq 0,51m$$