Eletromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

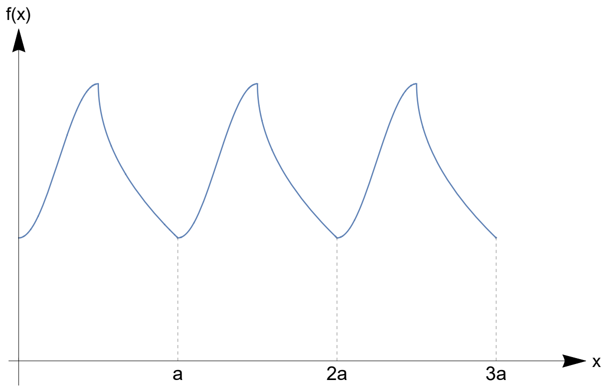
Preparo: Diego Oliveira

Aula 8

Revisão Série de Fourier

Suponhamos que tenhamos uma função $f(x)$ periódica, de período a, como mostrado na figura.

O objetivo da série de Fourier é representar funções periódicas por séries de senos e cossenos, cujo período fundamental seja a:



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)$$

Determinação dos coeficientes

a_0:

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = \int_{-a/2}^{a/2} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) dx$$

Mudança de variável: $\theta = \frac{2\pi x}{a}$; $\quad dx = \frac{a}{2\pi} d\theta$;

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = a_0.a + \frac{a}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancelto{0}{\cos(n\theta) dx} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancelto{0}{\operatorname{sen}(n\theta) dx}$$

$$\therefore \boxed{a_0 = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\,dx = \overline{f(x)}} \text{ : valor médio da função no período}$$

<u>**a**$_n$</u>:

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx &= \cancelto{0}{\int_{-a/2}^{a/2} a_0 \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx} + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx
\end{aligned}$$

Fazendo a mesma mudança de variável[1]:

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx &= \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\,dx \\
&= \frac{a}{4\pi}\left[\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)\theta)dx} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)\theta)dx\right] \\
&= \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 2\pi; & m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

Da mesma forma, usando a identidade $\text{sen}(a)\cos(b) = [\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]/2$, podemos mostrar que

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx = 0$$

[1]onde foi usada a seguinte relação trigonométrica $\cos(a)\cos(b) = [\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$.

Obtemos então:

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{a}{2}\delta_{mn} = \frac{a}{2}a_m$$

ou (trocando m por n):

$$\boxed{a_n = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)dx}$$

$\underline{\mathbf{b}_n}$:

Este coeficiente se obtém fazendo a integral

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)dx \quad = \quad & \int_{-a/2}^{a/2} a_0 \cancelto{0}{\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)} dx + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)dx + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)dx
\end{aligned}$$

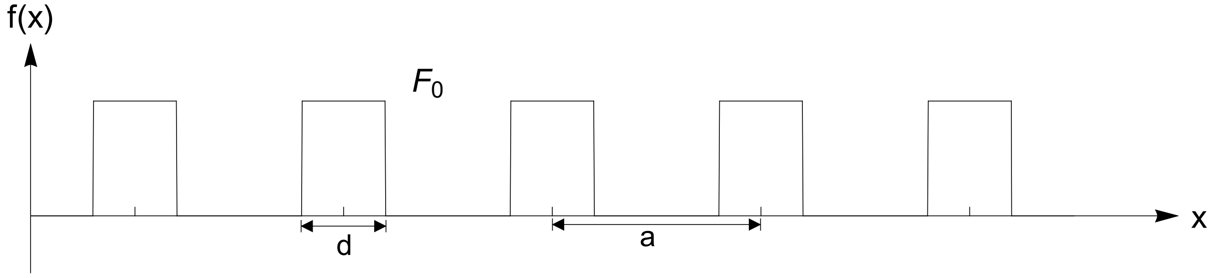
$$\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{sen}\left((n+m)x\right)dx + \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{sen}\left((n-m)x\right)dx\right] = 0 \quad (1)$$

A outra integral pode ser feita fazendo a mesma transformação de variável e usando a identidade trigonométrica: $\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$, o resultado é

$$\boxed{b_n = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)dx}$$

Exemplo: Função de impulsos periódicos.



$$a_0 = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = \frac{F_0}{a}\int_{-d/2}^{d/2} dx = \frac{d}{a}F_0$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx$$

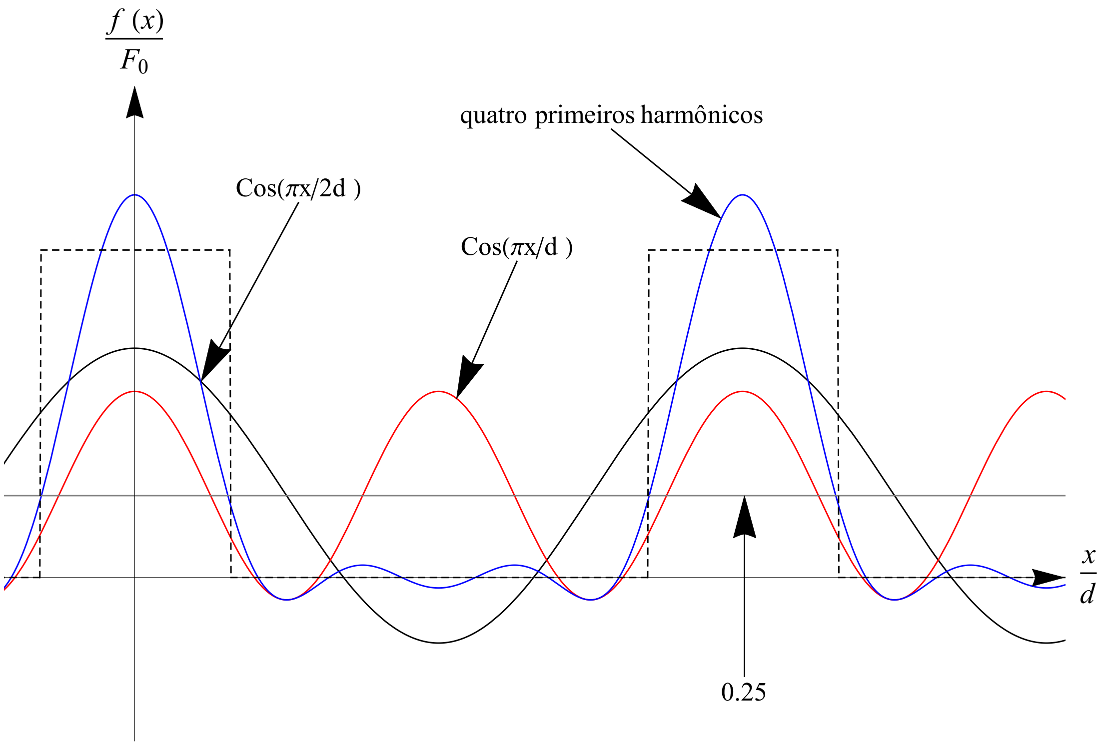
$$= \frac{2F_0}{a}\int_{-d/2}^{d/2} \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx = \frac{2F_0}{\pi n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi nd}{a}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx$$

$$= \frac{2F_0}{a}\int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)dx = -\frac{F_0}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi nd}{a}\right)\right]_{-d/2}^{d/2} = 0$$

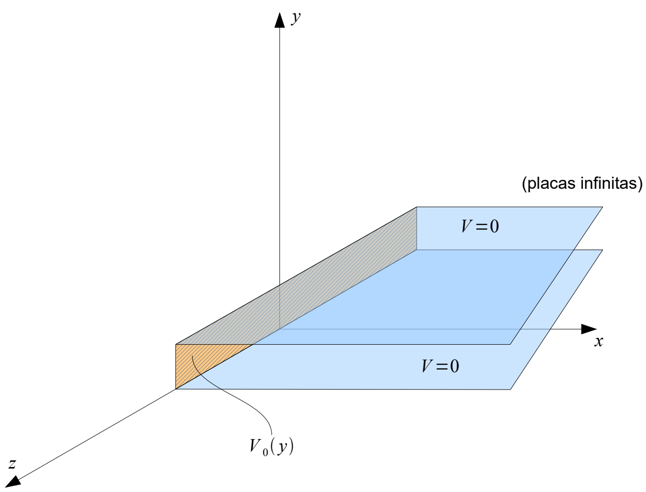
$$\therefore \boxed{f(x) = \frac{d}{a}F_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi d}{a}\right)}{\frac{n\pi d}{a}}\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)\right]}$$

Relembrada a Série de Fourier, vamos empregá-la na solução de alguns problemas de solução da equação de Laplace em coordenadas cartesianas.



Onde fui utilizado $d/a = 1/4$.

Exemplo 3.3 (Livro texto):



Vamos inicialmente supor que $V_0 = const$, simplificando um pouco o exemplo do livro texto.

Como as placas são infinitas na direção z, certamente o potencial não deve variar com esta coordenada, de forma que a Equação de Laplace fica

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0; \qquad \begin{array}{rcl}\phi(x,0) & = & 0\\ \phi(x,a) & = & 0\\ \phi(0,y) & = & V_0\end{array} \qquad \phi(x\to\infty,y)\to 0$$

Temos quatro condições de contorno para uma equação de segundo grau. Como veremos, esta aparente "sobre-determinação" levará a um problema de auto-valor.

Separação de variáveis

$$\phi(x,y,)=X(x)Y(y) \qquad \therefore \qquad Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0$$

$$\therefore \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\alpha^2\\ \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\beta^2\end{array}\right\}\alpha^2+\beta^2=0$$

$$\therefore X(x)=A_1\cosh(\alpha x)+B_1\,\mathrm{senh}(\alpha x)$$

$$Y(y)=A_2\cosh(\beta y)+B_2\,\mathrm{senh}(\beta y)$$

$$\therefore \phi(x,y)=[A_1\cosh(\alpha x)+B_1\,\mathrm{senh}(\alpha x)][A_2\cosh(\beta y)+B_2\,\mathrm{senh}(\beta y)]$$

y=0 $\rightarrow$ $\phi(x,0)=0$

$$\therefore \phi(x,0)=[A_1\cosh(\alpha x)+B_1\,\mathrm{senh}(\alpha x)]A_2=0;\ \text{x qualquer}: \boxed{A_2=0}$$

$$\therefore \phi(x,y)=[A\cosh(\alpha x)+B\,\mathrm{senh}(\alpha x)]\,\mathrm{senh}(\beta y) \qquad (A=A_1B_2;\ B=B_1B_2)$$

y=a $\rightarrow$ $\phi(x,a)=0$

$$0=[A\cosh(\alpha x)+B\,\mathrm{senh}(\alpha x)]\,\mathrm{senh}(\beta a)$$

$\underline{\text{Solução trivial}}$: $\beta = 0$; $\rightarrow$ $\phi(x, y) = 0$, que não é uma solução geral

$$\beta = \frac{in\pi}{a} \rightarrow \operatorname{senh}\left(i\frac{n\pi a}{a}\right) = \underset{n \text{ qualquer}}{i\,\operatorname{sen}(n\pi) = 0}$$

$$(\operatorname{senh}(ix) = i\,\operatorname{sen}(x))$$

Vemos que esta condição de contorno não definiu A e B, mas sim o período das soluções de y!

Por outro lado, como a solução é válida para <u>qualquer</u> n, temos que tomar a solução geral como a soma de todas as soluções possíveis, já que a Equação de Laplace é linear.

Além disso, vemos que como $\beta = in\pi/a = \beta_n$ (com um valor para cada n),

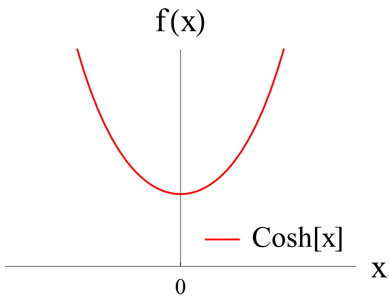
$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = -\beta^2 = n^2\frac{\pi^2}{a^2} \quad \therefore \boxed{\alpha_n = \pm\frac{n\pi}{a}}$$

Então a solução geral fica:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cosh(\alpha_n x) + B_n \operatorname{senh}(\alpha_n x)] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Agora vamos cuidar das condições de contorno em x. A primeira, mais fácil de impor, é a condição assintótica $\phi(x, y)\,|_{x\to\infty} \rightarrow 0$.

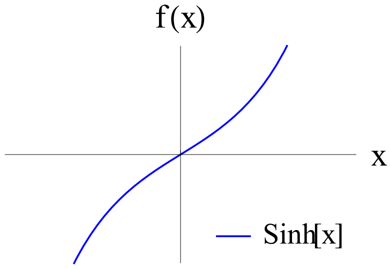
Lembrando que tanto $\cosh(x)$ como $\operatorname{senh}(x)$ divergem quanto $x \rightarrow \infty$, temos que combiná-los para eliminar esta divergência:



$$\lim_{x\to\infty} [A_n \cosh(\alpha_n x) + B_n \operatorname{senh}(\alpha_n x)] \rightarrow 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{A_n}{2}\left(e^{\alpha_n x} + e^{-\alpha_n x}\right) + \frac{B_n}{2}\left(e^{\alpha_n x} - e^{-\alpha_n x}\right)\right] \rightarrow 0$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (\alpha_n>0)}} \frac{1}{2}\left[\underbrace{(A_n + B_n)e^{\alpha_n x}}_{\rightarrow\infty} + \underbrace{(A_n - B_n)e^{-\alpha_n x}}_{\rightarrow 0}\right] \rightarrow 0$$



Então, para evitar a divergência para x tendendo para infinito, tomamos $B_n = -A_n$.

Finalmente temos

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{[\cosh(\alpha_n x) - \operatorname{senh}(\alpha_n x)]}_{e^{-\alpha_n x}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$\therefore \boxed{\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}$$

Até agora não mencionamos a condição em $x = 0$. Primeiro vamos supor que o potencial seja $V_0 = const$. Então

$$x = 0 \;\; \rightarrow \;\; \phi(0,y) = V_0$$

$$\therefore V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Usando o mesmo procedimento da série de Fourier, temos

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy$$

$$\int_0^a V_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = V_0 \left(-\frac{a}{m\pi}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$= \frac{V_0 a}{m\pi}[1 - \cos(m\pi)] = \begin{cases} 0; & m \text{ par} \\ \frac{2V_0 a}{m\pi}; & m \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\int_0^a \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dy \underset{\substack{\uparrow \\ \theta=\frac{\pi y}{a}}}{=} \frac{a}{2\pi}\int_0^a \underbrace{2\,\text{sen}(m\theta)\,\text{sen}(n\theta)}_{\cos[(m-n)\theta]-\cos[(m+n)\theta]}\ d\theta$$

$$= \frac{a}{2\pi}\left[\int_0^\pi \cos[(m-n)\theta]d\theta - \int_0^\pi \cos[(m+n)\theta]d\theta\right]$$

$$= \frac{a}{2\pi}\left[\underbrace{\frac{1}{m-n}\text{sen}[(m-n)\theta]\bigg|_0^\pi}_{\lim\limits_{x\to 0}\ \text{sen}(x)/x\to 1} - \frac{1}{m+n}\text{sen}[(m+n)\theta]\bigg|_0^\pi\right]$$

$$= \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \frac{a}{2}; & m = n \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2V_0 a}{m\pi}\bigg|_{m\text{ ímpar}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a}{2}\delta_{m,n} = \frac{aC_m}{2}$$

$$\therefore \boxed{C_m = \frac{4V_0}{m\pi}}; \quad m \text{ ímpar}$$

$$\therefore \boxed{\phi(x,y)\frac{4V_0}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ \text{ímpar}}} \frac{e^{-\frac{n\pi x}{a}}}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}$$

[O livro informa que esta série pode ser somada, dando

$$\phi(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}arctg\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\text{senh}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right];$$

mas isso não é tão importante]