Eletromagnetismo I

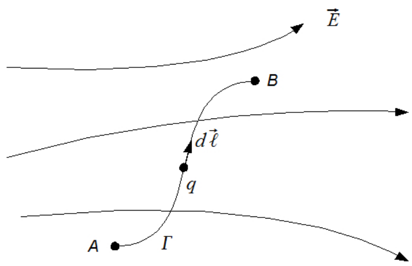
Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 7

Trabalho realizado em um campo eletrostático

Suponhamos que numa região do espaço exista um campo elétrico $\vec{E}$. Qual seria o trabalho que uma força externa $\vec{F}$ teria que realizar para mover uma carga q de A até B, ao longo de uma trajetória Γ qualquer, na presença do campo? Naturalmente o trabalho seria dado por



$$W_{ext} = \int_{A\,\Gamma}^{B} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell}$$

Se a carga for deslocada sem aceleração, em cada ponto da trajetória ela deve estar em equilíbrio, de forma que

$$\vec{F}_{ext} = -q\vec{E}$$

em todos os pontos da trajetória; assim

$$W_{ext} = -q\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q\int_{A}^{B} \nabla\phi \cdot d\vec{\ell} = q\int_{A}^{B} \frac{d\phi}{d\ell} d\ell = q\int_{A}^{B} d\phi = q[\phi(B) - \phi(A)]$$

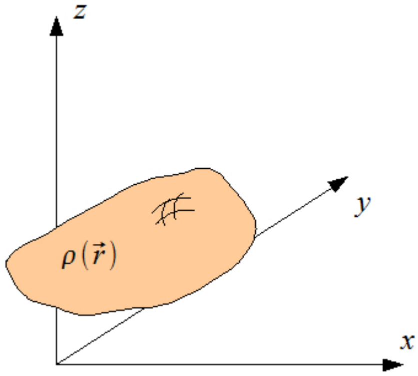
Portanto:

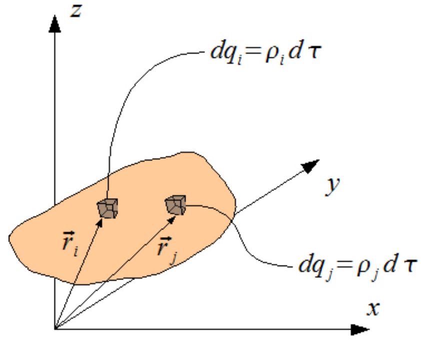
- A diferença de potencial eletrostático entre dois pontos é igual ao trabalho por unidade de carga que uma força externa deve fazer para mover uma carga entre esses pontos.

Em geral tomamos a referência de potencial no infinito. Isto só é válido se as fontes de carga que produzem o campo forem finitas. Neste caso

$$W = q\phi(\vec{r})$$

Energia de uma distribuição de cargas





Suponhamos que tenhamos uma distribuição de cargas aglomeradas num volume V. Como cargas interagem entre si (se forem todas do mesmo sinal se repelem), é necessário realizar trabalho para "montar" a distribuição de cargas. Este trabalho fica armazenado como energia potencial na distribuição de cargas. Se o processo físico que as mantém unidas (por exemplo, a força nuclear no núcleo) for removido, as cargas simplesmente se separam, utilizando a energia potencial armazenada, e se deslocam para o infinito.

O cálculo da energia armazenada numa dada distribuição de cargar é feito nas seções 2.4.2 e 2.4.3 do livro texto. Nós vamos fazer este cálculo usando um formalismo diferente e é útil os alunos compararem os dois métodos.

Considere a distribuição de cargas dividida em volumes elementares $d\tau'$, cada um com uma carga elementar $dq = \rho(\vec{r}\,')d\tau'$. Suponhamos um processo em que, a cada instante, seja trazida do infinito uma pequena fração $\delta\alpha$ de carga elementar que existe em cada ponto, ou seja,

$$\delta q_\alpha = \delta\alpha\rho(\vec{r}\,')d\tau'$$

Quando houver um fração α de todas as cargas em cada posição, o potencial por elas produzidos deve ser uma fração α do potencial final, ou seja,

$$\phi_\alpha = \alpha\phi(\vec{r})$$

Para trazer a próxima fração $\delta q_\alpha = \delta\alpha\rho(\vec{r}\,')d\tau'$ ao ponto $\vec{r}\,'$, é necessário realizar um trabalho

$$\delta W = [\delta\alpha\rho(\vec{r})d\tau'][\alpha\phi(\vec{r}\,')]$$

O trabalho total pode ser então obtido integrando-se sobre todas as cargas e para α variando de 0 a 1, ou seja,

$$W = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_V \rho(\vec{r}\,')\phi(\vec{r})d\tau' \quad \therefore \boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r}\,')\phi(\vec{r}\,')d\tau'}$$

Se, ao invés de uma distribuição volumétrica contínua de cargas, tivermos N cargas discretas localizadas nas posições $\vec{r}_i; i = 1,\ldots,N$ podemos representá-las como

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

então a expressão para a energia armazenada fica

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_i q_i \int [\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)]\phi(\vec{r})d\tau = \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi(\vec{r}_i) \\ W &= \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

que corresponde à expressão 2.42 derivada na seção 2.4.2 do livro texto.

Exemplo: Problema 2.31 do livro texto.

a)

$$\begin{aligned} W &= q\phi(a,a) \\ W &= q\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{2}a}-\frac{1}{a}\right] \\ W &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left[-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned}$$

b) Cargas uma a uma

$$W_1 = 0; \qquad W_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}; \qquad W_4 \text{ já calculado}$$

$$\begin{aligned} \therefore W &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left[-1-1+\frac{2}{\sqrt{2}}-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \therefore W &= \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

No emprego da expressão para cargas pontuais, é necessário lembrar que o potencial é o produzido por todas as outras cargas, menos a considerada!

A expressão para a energia de uma distribuição de cargas pode ser escrita de forma ainda mais conveniente como energia armazenada no campo elétrico. Retornando à expressão geral

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau$$

e utilizando a primeira equação de Maxwell, $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, temos

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla\cdot\vec{E})\phi d\tau$$

Mas, utilizando a identidade vetorial $\nabla(g\vec{f}) = \nabla g\cdot\vec{f} + g\nabla\cdot\vec{f}$, onde g é uma função escalar e $\vec{f}$ uma função vetorial, podemos escrever

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int \nabla\cdot(\phi\vec{E})d\tau - \int \nabla\phi\cdot\vec{E}d\tau\right]$$

Mas $\nabla\phi = -\vec{E}$ e, utilizando o *Teorema de Gauss*, a primeira integral pode ser escrita em uma integral de superfície, ou seja,

$$W = \int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) d\tau + \int_S \phi\vec{E}\cdot\hat{n}\, d\tau$$

Para situações em que as cargas estão limitadas a uma região finita do espaço, podemos tomar para S uma superfície esférica de raio $R \to \infty$. Muito distante das cargas, o campo se comporta como o de uma carga pontual, ou seja

$$R \to \infty \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \phi \propto \frac{1}{R} \\ \\ E \propto \frac{1}{R^2} \end{array}\right| \quad \therefore \int \phi\vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \int \phi E_R R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \propto \frac{1}{R} \to 0$$

Nesta situação a energia armazenada em uma distribuição de cargas pode ser expressa como

$$\boxed{W = \int_V \left[\frac{\epsilon_0 E^2(\vec{r})}{2}\right] d\tau}$$

É importante chamar a atenção para o detalhe importante que, quando utilizamos esta forma de presentar a energia armazenada, a integral é sobre todo o espaço. Já quando utilizamos a expressão.

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\, d\tau$$

a integral naturalmente é somente sobre o volume onde $\rho(\vec{r}) \neq 0$, porque fora dela se cancela. Qual expressão é melhor utilizar dependerá do problema, mas ambas são equivalentes.

Densidade de Energia no Campo Elétrico

Como a energia produzida por uma configuração de cargas pode ser expressa em termos do campo elétrico por ela produzido,

$$W = \int \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right] d\tau$$

onde a integral de volume é sobre todo o espaço, podemos dizer que o campo tem uma densidade volumétrica de energia a ele associada dada por

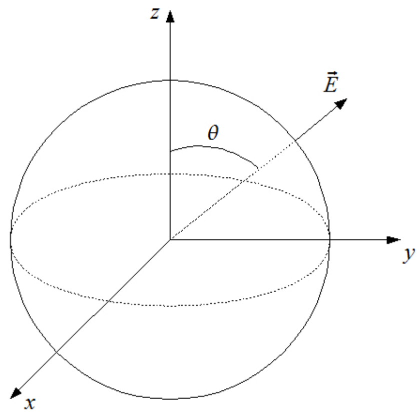
$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

É interessante notar que energia por unidade de volume tem dimensão de pressão; de fato

$$[w] = \frac{J}{m^3} = \frac{N.m}{m^3} = \frac{N}{m^2}$$

Assim podemos afirmar que o campo elétrico exerce uma pressão dada por $p = \epsilon_0 E^2/2$. Este resultado será discutido de forma rigorosa mais tarde, neste curso. Como aplicação deste resultado, vamos resolver o Prob. 2.38 pág. 103 do livro texto:

P.2.38: Uma esfera metálica de raio R tem carga total Q. Qual é a força de repulsão entre os hemisférios "norte" e "sul" da esfera?



Utilizando a *Lei de Gauss*, sabemos que o campo na superfície da esfera é equivalente a considerar a carga total na origem,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{e}_r$$

Portanto a força por unidade de área será

$$\vec{f} = \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\epsilon_0 R^4}\hat{e}_r$$

Mas esta força é radial e, para separar ps dois hemisférios, é a força na direção z que importa; portanto

$$f_z = \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\epsilon_0 R^4}\cos(\theta)$$

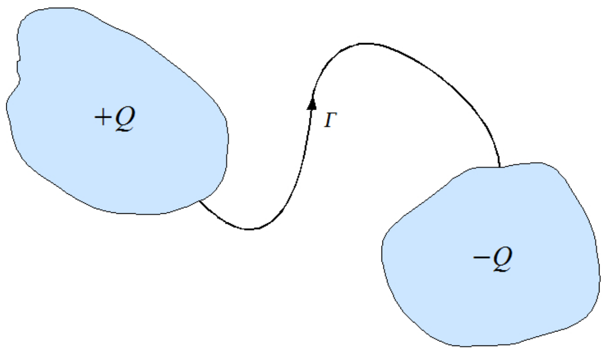
Integrando sobre o hemisfério superior, temos

$$F_z = \frac{Q^2}{2\times 16\pi^2\epsilon_0 R^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\rho = \frac{Q^2}{2\times 16\pi^2\epsilon_0 R^2}\times\pi$$

$$\therefore \boxed{F_z = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}}$$

Condutores e Capacitores

Suponhamos que tenhamos dois condutores (perfeitos) e coloquemos uma carga Q em um e $-Q$ em outro. Como dentro do condutor $\vec{E} = 0$, temos $\nabla\phi = 0$ e $\phi = constante$ dentro dos condutores. Portanto os dois condutores terão potenciais constantes, mas com valores distintos. Mas, como o campo elétrico é conservativo, podemos definir de forma unívoca a diferença de potencial entre os condutores



$$V = \phi_+ - \phi_- = -\int_{\substack{(-)\\ \Gamma}}^{(+)} \vec{E}\cdot d\vec{l},$$

ao longo do percurso Γ. Mas o campo elétrico é proporcional à carga, $|E| \propto |Q|$ e, portanto, $|V| \propto |Q|$. Portanto podemos definir uma grandeza que só depende da geometria da configuração dos condutores, denominada <u>Capacitância</u>

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{|V|} \qquad [C] = \frac{C}{V} = f : \text{Farad}}.$$

Por outro lado, a energia armazenada nos capacitores pode também ser expressa em termos de C:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau = \frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_-)\underbrace{\int \rho(\vec{r})d\tau}_{|Q|}$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2}|Q|V = \frac{1}{2}CV^2}$$

Equação de Laplace e Poisson

Na maior parte dos problemas de eletrostática de interesse prático, a distribuição de cargas não é especificada e sim o potencial aplicado em diferentes superfícies, principalmente superfícies condutoras. Nestes casos, os métodos vistos anteriormente para calcular o campo elétrico não são adequados; ao invés temos que utilizar um método que permita calcular o potencial eletrostático em todo o espaço, dadas condições de contorno em algumas superfícies (e, em alguns casos, também distribuições de carga). Para isso utilizaremos as Equações de Poisson e Laplace.

Consideraremos a primeira equação de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Aplicando $\vec{E} = -\nabla\phi$, temos

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

que é a Equação de Poisson, onde

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

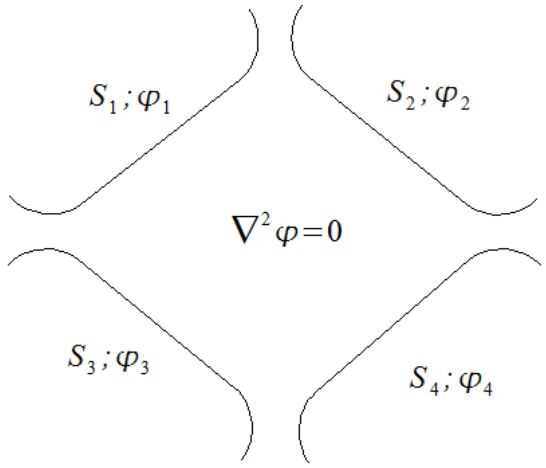
Se a densidade de cargas for nula em uma região do espaço, obtemos a Equação de Laplace

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$$

Formalmente, essas equações são equações de derivadas parciais de segunda ordem do tipo elíptica. O problema típico em que a Equação de Laplace é utilizada é dado por um conjunto de superfícies condutoras, onde o valor do potencial é especificado, e se resolve a equação na região externa às superfícies impondo-se como condições de contorno os valores dos potenciais. As distribuições de cargas nas superfícies condutoras não são conhecidas e devem ser determinadas com as soluções.

Unicidade da Solução

Uma questão importante, do ponto de vista formal, é se a solução da equação de Laplace, com imposição das condições de contorno em superfícies fixas, é única. Para provar isto, vamos supor que o valor do potencial seja especificado nas superfícies $S_i \quad \forall \quad i = 1,2,...$, e que ao resolver a equação de Laplace encontramos duas soluções ϕ_a e ϕ_b, isto é,



$$\nabla^2\phi_a = 0 \quad \nabla^2\phi_b = 0$$

$$\phi_{a1} = \phi_{b1} = \phi_1; \phi_{a2} = \phi_{b2} = \phi_2; \ldots$$
$$\ldots \phi_{aN} = \phi_{bN} = \phi_N;$$

Vamos agora definir uma função escalar dada pela diferença entre as duas soluções e uma função vetorial dada pelo seu gradiente, isto é,

$$g = \phi_a - \phi_b; \quad \vec{f} = \nabla(\phi_a - \phi_b) = \nabla\phi_a - \nabla\phi_b.$$

Levando em conta a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (g\vec{f}) = g\nabla \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla g$$

temos

$$\nabla \cdot \left[(\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)\right] = (\phi_a - \phi_b)\nabla. \left[\nabla(\phi_a - \phi_b)\right] + \nabla[\phi_a - \phi_b].\nabla[\phi_a - \phi_b]$$

$$\therefore \nabla \cdot [(\phi_a - \phi_b)\nabla(\phi_a - \phi_b)] = (\phi_a - \phi_b)[\nabla^2(\phi_a - \phi_b)] + [\nabla(\phi_a - \phi_b)]^2$$

mas, como as duas soluções satisfazem a equação de Laplace, temos

$$\nabla^2(\phi_a - \phi_b) = \nabla^2\phi_a - \nabla^2\phi_b = 0$$

Portanto,

$$\nabla[(\phi_a-\phi_b)\nabla(\phi_a-\phi_b)] = [\nabla(\phi_a-\phi_b)]^2$$

Integrando este resultado sobre todo o volume externo às superfícies condutoras e interno a um superfície no ∞, temos

$$\int \nabla\cdot[(\phi_a-\phi_b)\nabla(\phi_a-\phi_b)]\,d\tau = \int [\nabla(\phi_a-\phi_b)]^2 d\tau$$

Aplicando agora o Teorema de Gauss, em um volume limitado pelas superfícies condutoras e por uma superfície no infinito, obtemos

$$\int_S (\phi_a-\phi_b)\nabla(\phi_a-\phi_b)\,dS = 0$$

porque, em todas as superfícies $\phi_a = \phi_b$, por hipótese. Assim

$$\int [\nabla(\phi_a-\phi_b)]^2 d\tau = 0 \;\;\rightarrow\;\; \nabla(\phi_a-\phi_b) = 0$$

$$\therefore \phi_a - \phi_b = \text{constante}$$

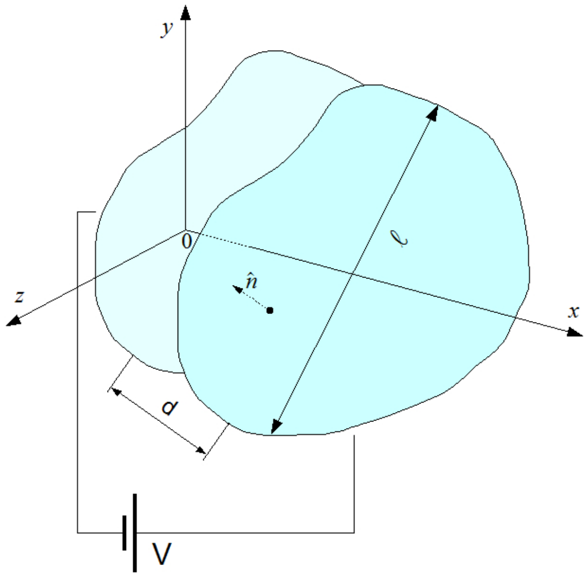
Mas como em todas as superfícies condutoras $\phi_a = \phi_b$, temos que $const = 0$.

Isto demonstra que $\phi_a(\vec{r}) = \phi_b(\vec{r})$, ou seja, a solução da <u>Equação de Laplace</u> com as equações de contorno impostas é <u>única</u>.

Exemplos de solução da Equação de Laplace

1.CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS.

Suponha que $\ell \gg d$, onde ℓ é a dimensão característica das placas e d a separação entre elas. Neste caso, podemos considerar as placas como infinitas, de forma que o potencial entre elas só deve depender da variável x, isto é



$$\nabla^2\phi = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\phi = ax + b$$

Condições de Contorno

$$x = 0 : \phi(x) = 0 \;\therefore\; b = 0$$

$$x = d : \phi(d) = V \;\therefore\; a = \frac{V}{d}$$

Campo Elétrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dx}\hat{e}_x \;\therefore\; \vec{E} = -\frac{V}{d}\hat{e}_x$$

Carga Superficial

Na superfície condutora da placa, $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0\ \hat{n}$. Considerando a placa em $x = d$, $\hat{n} = -\hat{e}_x$, deforma que

$$-\frac{V}{d} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \;\therefore\; \sigma = \epsilon_0\frac{V}{d}.$$

Capacitância

A carga total em uma área S da placa será

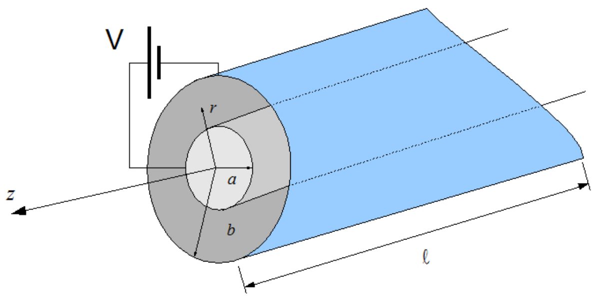
$$Q = \sigma S = \epsilon_0\frac{V}{d}S,$$

portanto a capacitância será

$$C = \frac{Q}{V} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{C}{S} = \frac{\epsilon_0}{d}},$$

que é a capacitância por unidade de área da configuração de placas paralelas.

2. CABO COAXIAL



Neste caso naturalmente utilizamos coordenadas cilíndricas, de forma que

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0.$$

Como a configuração tem simetria cilíndrica, naturalmente $\partial\phi/\partial\theta = 0$. Por outro lado, se o cabo for bastante longo, isto é, $\ell \gg b$, podemos desprezar a variação do potencial com a coordenada longitudinal ℓ; então $\phi = \phi(r)$ e

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi(r) = c_1 \ln r + c_2.$$

Condições de Contorno

$$r = b : \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 \ln b + c_2 : c_2 = -c_1 \ln b \qquad \therefore \boxed{\phi(r) = c_1 \ln\left(\frac{r}{b}\right)}$$

$$r = a : \phi = V = c_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \therefore \quad c_1 = \frac{V}{\ln a/b} \qquad \therefore \boxed{\phi(r) = -V\frac{\ln r/b}{\ln a/b} = V\frac{\ln b/r}{\ln b/a}}$$

Campo Elétrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \therefore \quad \vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{V}{\ln b/a}\frac{d}{dr}\left[\ln b - \ln r\right]\hat{e}_r \quad \therefore \quad \boxed{\vec{E} = \frac{V}{r\ln b/a}\hat{e}_r}$$

Carga Superficial

Vamos considerar o cilindro interno $\hat{n} = \hat{e}_r$; $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$

$$\therefore \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V}{a\ln b/a} \quad \therefore \quad \sigma = \epsilon_0\frac{V}{a\ln b/a}$$

Capacitância

Carga em um comprimento ℓ do cilindro interno:

$$Q = \sigma(2\pi a\ell) \quad \therefore \quad Q = \tfrac{2\pi\ell V}{\ln b/a}$$

$$\therefore C = \tfrac{Q}{V} = \tfrac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln b/a} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}}$$

Note que C/ℓ é uma capacitância por unidade de comprimento.